

## 시간영역 변위근사 유한차분법의 자유면 경계조건

민동주<sup>1)\*</sup> · 유해수<sup>1)</sup>

### Free-surface Boundary Condition in Time-domain Elastic Wave Modeling Using Displacement-based Finite-difference Method

Dong-Joo Min<sup>1)\*</sup> and Hai Soo Yoo<sup>1)</sup>

**요 약 :** 자유면 경계조건을 정확하게 묘사할 수 있는 변위근사 유한차분법을 이용하는 시간영역 탄성과 모델링법을 고안하였다. 기존의 변위근사 유한차분법의 경우 변위와 매질의 물성을 격자점에 정의하는 격자군(격자점 기반의 격자군)을 이용하였으나, 이 연구에서 제시하는 새로운 유한차분법에서는 변위는 격자점에 정의하지만 매질의 물성을 격자점으로 둘러싸인 면에 정의하는 격자군(셀 기반의 격자군)을 이용한다. 매질의 물성을 셀에 정의할 경우 자유면에서 응력이 사라진다는 자유면 경계조건을 추가로 적용할 필요가 없으며 매질의 물성 변화만으로 자유면 경계조건을 표현할 수 있다. 수치예를 통한 정확도 분석 결과 셀 기반의 격자군을 이용할 경우 계산된 수치적인 해가 해석적인 해에 매우 근사함을 알 수 있었다.

**주요어 :** 시간영역, 유한차분법, 탄성과 모델링, 변위근사, 자유면 경계조건

**Abstract :** We designed a new time-domain, finite-difference, elastic wave modeling technique, based on a displacement formulation, which yields nearly correct solutions to Lamb's problem. Unlike the conventional, displacement-based, finite-difference method using a node-based grid set (where both displacements and material properties such as density and Lamé constants are assigned to nodal points), in our new finite-difference method, we use a cell-based grid set (where displacements are still defined at nodal points but material properties within cells). In the case of using the cell-based grid set, stress-free conditions at the free surface are naturally described by the changes in the material properties without any additional free-surface boundary condition. Through numerical tests, we confirmed that the new second-order finite differences formulated in the cell-based grid set generate numerical solutions compatible with analytic solutions unlike the old second-order finite-differences formulated in the node-based grid set.

**Keywords :** time domain, finite-difference method, displacement formulation, elastic wave modeling, free-surface boundary condition

## 서 론

탄성과 자료해석의 중요한 방법일 뿐 아니라 다른 자료해석 방법인 탄성과 역산이나 구조보정에서 중요한 역할을 하는 탄성과 모델링법에서 가장 중요한 문제는 자유면 경계조건을 정확히 표현하는 것이다. 지난 수십 년 간 탄성과 모델링의 정확성과 효율성을 증대시키기 위한 많은 연구가 있어왔다. 그중 일부는 변위근사식에 기초하여 시간영역이나 주파수영역에서 유한차분법이나 유한요소법을 이용하는 것이었으며(박권규외, 2000; 민동주와 유해수, 2002; Alterman and Karal, 1968; Kelly *et al.*, 1976; Bayliss *et al.*, 1986; Stekl and Pratt, 1998; Min *et al.*, 2000; Min *et al.*, 2003), 나머지들은 응력과 속도를 엇격자에 정의하는 엇격자 유한차분법(staggered-grid

finite-difference method; Virieux, 1986; Levander, 1988; Fornberg, 1989; Graves, 1996; Robertsson, 1996; Ohminato and Chouet, 1997; Gottschammer and Olsen, 2001)에 관한 것이었다. 이러한 탄성과 모델링법들 중에서 자유면 경계조건을 정확히 묘사할 수 있는 방법은 많지 않다. 정확한 자유면 경계조건은 탄성과 모델링법의 정확도를 검증하기 위하여 종종 이용되어온 Lamb의 문제에 대하여 정확한 해를 제시하기 위하여 필요하다. 대부분의 탄성과 모델링법들이 무한균질 매질에 대해서는 해석적인 해에 매우 근사한 수치적인 해를 제시하지만 지표면에 송신원과 수신기가 놓여 있는 Lamb의 문제에 대해서는 정확한 해를 제시하지 못하였다.

안정적이고 정확한 자유면 경계조건을 제시하기 위하여 Vidale and Clayton(1986)은 분산방정식에 대한 Crank-Nicol-

\*2003년 3월 24일 접수

1) 한국해양연구원 지구환경연구본부(Global Environment Research Laboratory, Korea Ocean Research & Development Institute, 1270, Sadoong, Ansan, Kyunggi 425-170, Korea)

son법과 유사한 음함수식을 제시하였다. 음함수식에서 자유면은 격자위에 존재하는 것이 아니라 격자와 격자사이에 존재하게 된다. Lamb의 문제에 대하여 정확한 해를 제시하는 방법으로 시간영역에서 엇격자 유한차분법이 제안되었다(Virieux, 1986; Jih *et al.*, 1988; Levander, 1988; Tessmer *et al.*, 1992; Hestholm and Ruud, 1994; Tessmer and Kosloff, 1994; Graves, 1996; Robertsson, 1996; Ohminato and Chouet, 1997; Gottschammer and Olsen, 2001). 엇격자 근사법은 속도와 응력으로 표현되는 1차미분형태의 탄성파동방정식을 이용하므로 자유면에서 응력이 존재하지 않는다는 자유면 경계조건을 묘사하기가 쉽다. 따라서, 엇격자 근사법은 Lamb의 문제에 대하여 비교적 정확한 해를 제시한다(Graves, 1996; Gottschammer and Olsen, 2001). 그러나 엇격자 근사법은 속도와 응력을 각각 엇격자에 정의한 후 방정식을 풀게 되므로 변위만을 이용하는 변위근사법에 비하여 수행하기가 쉽지 않다. 변위근사법 중에는 Galerkin법을 이용하는 유한요소법이 특정한 자유면 경계조건을 이용하지 않고도 Lamb의 문제에 대하여 정확한 해를 제시하는 것으로 알려져 있다(Strang and Fix, 1973; Geller and Ohminato, 1994; Min *et al.*, 2003). 변위만을 이용하는 유한차분법의 경우 Lamb의 문제에 대하여 부정확한 해를 제시하는 것으로 알려져 왔으나, 최근 들어 박권규외(2000)와 Min *et al.*(2002)이 주파수영역 유한차분법에서 자유면 경계조건을 정확히 묘사할 수 있는 방법을 제시하였다. 박권규 외(2000)가 제시한 알고리즘은 중간점 기법으로 주파수영역에서의 유한요소법을 유한차분화한 것이며, Min *et al.*(2002)이 제시한 알고리즘은 유한요소법에서처럼 매질의 물성을 격자점이 아니라 격자점으로 둘러싸인 셀에 정의하는 격자군(셀 기반의 격자군; cell-based grid set)을 이용하여 기존의 유한차분법과 유사한 방법으로 차분식을 구성하는 것이다. Min *et al.*(2002)의 경우 매질의 물성을 셀에 정의하는 셀 기반의 격자군을 이용함으로써 주파수영역 가중평균 유한차분법의 자유면 경계조건 문제도 해결하였다.

탄성과 모델링은 흔히 주파수영역과 시간영역에서 수행되며,

주파수영역과 시간영역 모델링 기법들은 각기 나름대로의 장단점을 가지고 있다. 주파수영역 모델링의 경우 다중 송신원을 갖는 점탄성 매질을 표현하는데 매우 유용하며, 반면에 시간영역 모델링의 경우 주파수영역 모델링에 비해 비용이 적게 들며 정확한 해를 제시한다는 장점이 있다. 이에 본 연구에서는 Min *et al.*(2002)의 기본개념을 시간영역 유한차분법에 적용함으로써 시간영역 유한차분법을 이용한 탄성과 모델링의 정확성을 높이고자 한다. 이 연구에서는 먼저 시간영역 표준 유한차분법을 이용하여 유한차분식을 구성한 후 자유면 경계에서의 문제점을 분석한다. 그 다음 Min *et al.*(2002)이 제시한 주파수영역 유한차분법에서처럼 셀기반의 격자군을 이용하여 새로운 유한차분근사식을 구성할 것이다. 끝으로 반무한 균질매질에 대하여 표준유한차분법과 새로운 유한차분법으로 구한 수치적인 해들을 해석적인 해와 비교함으로써 새롭게 구성된 유한차분식의 정확성을 검토할 것이다.

## 이 론

### 시간영역 표준유한차분법

비균질 등방성 매질에 대한 탄성파동방정식은 시간영역에서 다음과 같이 표현된다.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (2)$$

여기서  $u(x, z, t)$ 와  $v(x, z, t)$ 는 수평방향과 수직방향 변위를 나타내며,  $\rho(x, z)$ 은 밀도를 나타내고,  $\lambda(x, z)$ 와  $\mu(x, z)$ 는 Lamé 상수를 나타낸다. 표준 2차 근사 유한차분법을 이용하여 위의 방정식을 풀 경우 Fig. 1에서 보여지는 바와 같이 매질의 물성과 변위가 모두 격자점에 정의되는 격자군(격자점 기반의 격자군; node-based grid set)을 이용한다. Fig. 1의 격자군에서

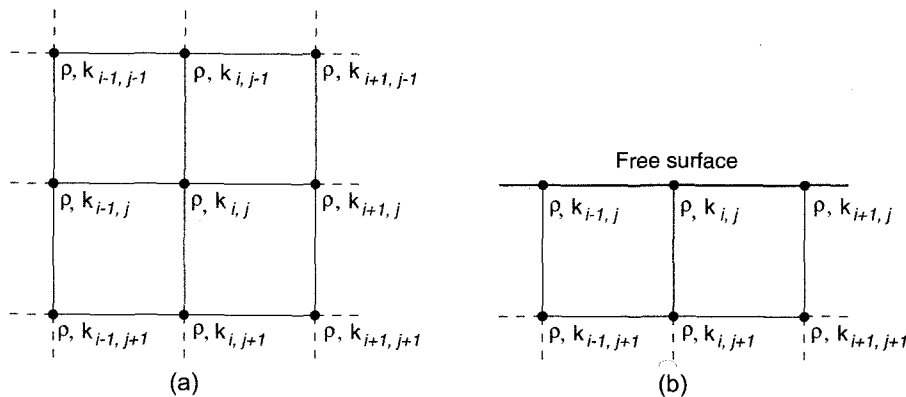


Fig. 1. Grid sets used to obtain the finite difference solutions for the (i,j)th nodal point (a) inside the main body and (b) at the free-surface boundary. Lamé constants (represented as k) and density ( $\rho$ ) are defined at the nodal points.

구성된 유한차분법의 예로는 Kelly *et al.*(1976)이 제안한 heterogeneous formulations을 들 수 있으며, 이는 다음과 같이 요약될 수 있다.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \rho_{i,j} \frac{u'_{i,j}{}^{+1} - 2u'_{i,j} + u'_{i,j}{}^{-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} [k_{i+1/2,j}(u'_{i+1,j} - u'_{i,j}) - k_{i-1/2,j}(u'_{i,j} - u'_{i-1,j})], \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{(\Delta z)^2} [k_{i,j+1/2}(u'_{i,j+1} - u'_{i,j}) - k_{i,j-1/2}(u'_{i,j} - u'_{i,j-1})], \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [k_{i+1,j}(u'_{i+1,j+1} - u'_{i+1,j-1}) - k_{i-1,j}(u'_{i-1,j+1} - u'_{i-1,j-1})], \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [k_{i,j+1}(u'_{i+1,j+1} - u'_{i-1,j+1}) - k_{i,j-1}(u'_{i+1,j-1} - u'_{i-1,j-1})], \quad (7)$$

$$k_{i\pm 1/2,j} = (k_{i\pm 1,j} + k_{i,j})/2, \quad (8)$$

$$k_{i,j\pm 1/2} = (k_{i,j\pm 1} + k_{i,j})/2, \quad (9)$$

여기서  $k$ 는 Lamé 상수  $\lambda$ 와  $\mu$ 를 나타낸다. 식 (6)과 (7)로부터 혼합미분항  $\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  과  $\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  의 근사를 위해 단 네 개의 격자점이 이용됨을 알 수 있다.

격자군이 Fig. 1b에서와 같이 자유면에 놓이게 되면 유한차분식은 다음과 같이 약간 변형된다.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{(\Delta z)^2} \left[ \frac{1}{2} (k_{i,j+1} + k_{i,j})(u'_{i,j+1} - u'_{i,j}) - \frac{1}{2} k_{i,j} u'_{i,j} \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [k_{i+1,j} u'_{i+1,j+1} - k_{i-1,j} u'_{i-1,j+1}], \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [k_{i,j+1}(u'_{i+1,j+1} - k_{i-1,j+1})]. \quad (12)$$

질량항과  $x$ 에 대한 2차 미분항은 식 (3)과 (4)와 같다. 식 (10)~(12)에서 보면 자유면 위에 존재하는  $(i-1, j-1)$ ,  $(i, j-1)$  과  $(i+1, j-1)$ 번째 격자점은 사라지며, 반면에 자유면상에 놓여 있는  $(i-1, j)$ ,  $(i, j)$ 와  $(i+1, j)$ 번째 격자점은 그대로 남아있다는 것을 알 수 있다[식 (5)~(7)과 비교]. 그러나 자유면 위에 놓여 있는 격자점들은 내부에 있을 경우와 다른 값을 가져야 한다. 예를 들어, 식 (10)의 마지막항  $u'_{i,j}$ 는 자유면 위에 있는 셀(매질의 물성이 0)에서 구성되었으므로 사라져야 한다. 그러나  $u'_{i,j}$ 는 여전히 존재한다. 이와 같은 항들이 결국 오차를 유발하게 된다. 또한  $\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  과  $\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  는 1차미분도 2차미분

의 형태도 아니다. 이는 표준 유한차분법에 의하여 구성된 차분식이 자유면에서 불완전하다는 것을 나타낸다. 따라서 변위만을 이용하는 유한차분법의 대부분은 자유면 경계조건을 묘사하기 위하여 다음과 같은 응력이 존재하지 않는다는 조건을 추가로 도입한다(Grant and West, 1965; Kelly *et al.*, 1976):

$$\mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

식 (13)과 (14)는 전진(forward), 후진(backward) 또는 중앙(central) 유한차분법에 의하여 차분화된다. 각각의 경우 모두 비대칭적인 차분연산자를 얻게 되며, 이는 결국 reciprocity이론을 만족시키지 못하게 된다. 물리적인 탄성과동방정식이 reciprocity를 만족하므로 수치적인 파동방정식 또한 reciprocity를 만족해야 한다. 따라서, reciprocity는 탄성과동방정식을 정확하게 풀기위한 필요조건 중의 하나이다. 예를 들어 Lamb의 문제에 대하여 비교적 정확한 해를 제시하는 엇격자법이나 유한요소법은 모두 reciprocity를 만족시킨다(Graves and Wald, 2001; Min *et al.*, 2003). Reciprocity는 또한 탄성과 역산이나 구조보정에서 효율성을 증대시키는 데 있어서 매우 중요한 역할을 한다(Graves and Wald, 2001; Shin *et al.*, 2001).

자유면 경계조건과 관련하여 표준유한차분법의 가장 주된 문제점은 주파수 영역에서처럼 격자점에 매질의 물성을 정의하는 격자군을 이용한다는 것과 reciprocity를 깨뜨리는 일차미분의 형태로 표현되는 자유면 경계조건을 추가로 이용한다는 것이다.

### 새로운 유한차분식

자유면에서 응력이 사라진다는 조건을 추가로 적용하지 않고 자유면 경계조건을 정확하게 묘사할 수 있는 새로운 유한차분식을 얻기 위해 Fig. 2에서 보는 바와 같이 매질의 물성 면에 정의하는 셀 기반의 격자군을 이용할 것을 제안한다. 이러한 개념은 유한요소법으로부터 나왔다. 셀 기반의 격자군에서 정의되는 유한차분식은 Kelly *et al.*(1976)의 유한차분식과 유사한 방법으로 구성되며, 다음과 같이 표현된다.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{4} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) \frac{u'_{i,j}{}^{+1} - 2u'_{i,j} + u'_{i,j}{}^{-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{1}{2} (k_3 + k_4)(u'_{i+1,j} - u'_{i,j}) - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)(u'_{i,j} - u'_{i-1,j}) \right], \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{(\Delta z)^2}$$

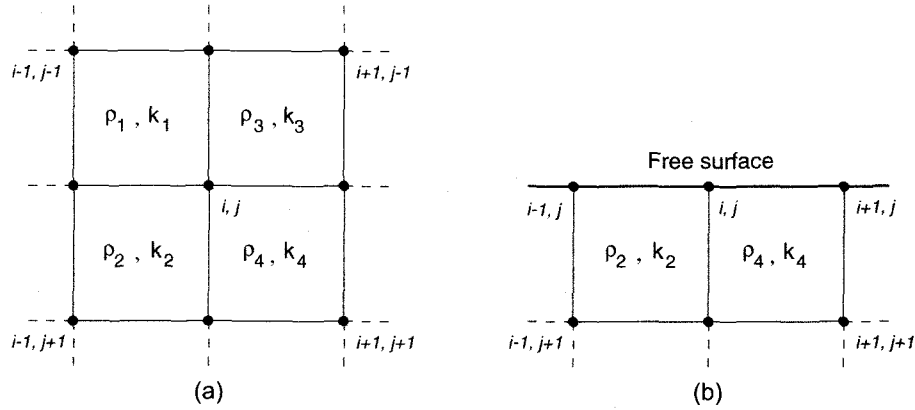


Fig. 2. Grid sets used to obtain the finite difference solutions for the  $(i, j)$ th nodal point (a) inside the main body and (b) at the free-surface boundary. Lamé constants (represented as  $k$ ) and density ( $\rho$ ) are defined within the cells.

$$\left[ \frac{1}{2}(k_2+k_4)(u'_{i,j+1}-u'_{i,j}) - \frac{1}{2}(k_1+k_3)(u'_{i,j}-u'_{i,j-1}) \right], \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{\Delta z} \left[ \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_{i+\frac{1}{2},j} - \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_{i-\frac{1}{2},j} \right], \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{\Delta z} \left[ \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_{i,j+\frac{1}{2}} - \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_{i,j-\frac{1}{2}} \right], \quad (19)$$

여기서,

$$\left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{1}{2} \left[ k_3 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_3 + k_4 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_4 \right], \quad (20)$$

$$\left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_{i-\frac{1}{2},j} \approx \frac{1}{2} \left[ k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_1 + k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_2 \right], \quad (21)$$

$$\left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} \left[ k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_2 + k_4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_4 \right], \quad (22)$$

$$\left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_{i,j-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} \left[ k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_1 + k_3 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_3 \right], \quad (23)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_1 \approx \frac{1}{\Delta z} \left[ \frac{1}{2}(u'_{i-1,j}+u'_{i,j}) - \frac{1}{2}(u'_{i-1,j-1}+u'_{i,j-1}) \right], \quad (24)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_2 \approx \frac{1}{\Delta z} \left[ \frac{1}{2}(u'_{i-1,j+1}+u'_{i,j+1}) - \frac{1}{2}(u'_{i-1,j}+u'_{i,j}) \right], \quad (25)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_3 \approx \frac{1}{\Delta z} \left[ \frac{1}{2}(u'_{i+1,j+1}+u'_{i,j+1}) - \frac{1}{2}(u'_{i+1,j}+u'_{i,j}) \right], \quad (26)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_4 \approx \frac{1}{\Delta z} \left[ \frac{1}{2}(u'_{i+1,j+1}+u'_{i,j+1}) - \frac{1}{2}(u'_{i+1,j}+u'_{i,j}) \right], \quad (27)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_1 \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{1}{2}(u'_{i,j-1}+u'_{i,j}) - \frac{1}{2}(u'_{i-1,j-1}+u'_{i-1,j}) \right], \quad (28)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_2 \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{1}{2}(u'_{i,j+1}+u'_{i,j}) - \frac{1}{2}(u'_{i-1,j+1}+u'_{i-1,j}) \right], \quad (29)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_3 \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{1}{2}(u'_{i+1,j-1}+u'_{i+1,j}) - \frac{1}{2}(u'_{i,j-1}+u'_{i,j}) \right], \quad (30)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)'_4 \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{1}{2}(u'_{i+1,j+1}+u'_{i+1,j}) - \frac{1}{2}(u'_{i,j+1}+u'_{i,j}) \right]. \quad (31)$$

질량항의 경우 밀도가  $(i, j)$ 번째 격자점에 정의되지 않으므로 식 (15)에서 보는 바와 같이 네 개의 이웃한 셀의 밀도의 평균값을 이용한다.  $k_{i\pm\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2}}$ 에 대응하는 Lamé 상수에 대해서는 두 개의 인접한 셀에서의 Lamé 상수의 평균값을 이용한다[식 (16)과 (17) 참조].

셀 기반의 격자군과 격자점 기반의 격자군에서 구성된 유한차분식들의 가장 큰 차이점은 혼합 미분항의 근사식에 있다[식 (18), (19)과 (6), (7)을 비교]. 셀 기반의 격자군에서

$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ 에 대한 유한차분식은 Min et al.(2002)의 주파수영역 유한차분법에서처럼  $\left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_{i+\frac{1}{2},j}$ 와  $\left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_{i-\frac{1}{2},j}$ 을 계산함

으로써 구성된다[식 (18) 참조].  $\left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_{i+\frac{1}{2},j}$ 에 대한 유한차분식은

Fig. 3a의 3과 4로 표시된 점에서의 수직선을 따라서 구성되는

$k_3 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_3$ 과  $k_4 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_4$ 의 평균값을 취함으로써 얻어진다. 같은

방법으로  $\left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_{i-\frac{1}{2},j}$ 에 대한 유한차분식은  $k_1 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_1$ 과  $k_2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)'_2$

을 평균함으로써 얻어진다. 유사한 방법으로  $\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ 에 대

한 유한차분식을 구성할 수 있다(Fig. 3b). 식 (20)~(31)을 식 (18)과 (19)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx & \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [k_1 u'_{i-1,j-1} + (k_1 - k_3) u'_{i,j-1} - k_3 u'_{i+1,j-1}] \\ & + \frac{1}{4\Delta x \Delta z} [(k_2 - k_1) u'_{i-1,j} + (k_3 - k_1 + k_2 - k_4) u'_{i,j} \end{aligned}$$

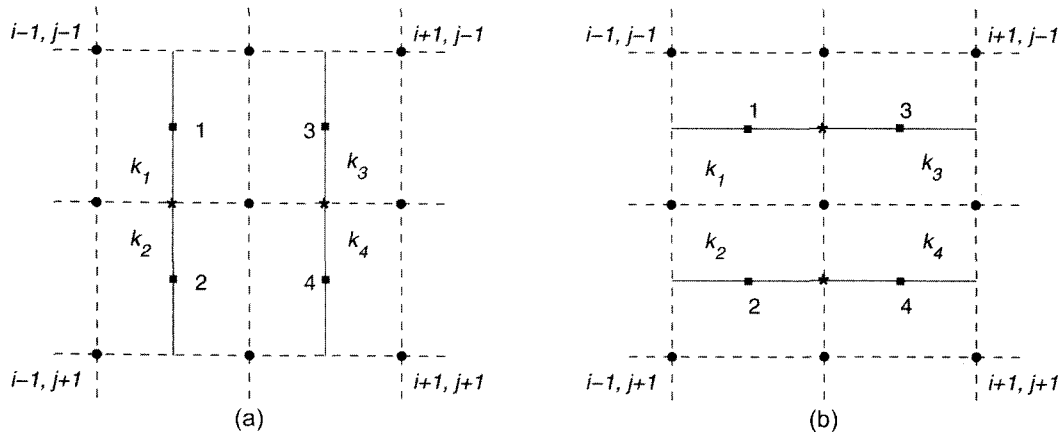


Fig. 3. Grid sets used for discretizing (a)  $\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  and (b)  $\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ .

$$\begin{aligned}
 &+(k_3 - k_4)u'_{i+1,j}] \\
 &+\frac{1}{4\Delta x\Delta z}[-k_2u'_{i-1,j+1} + (k_4 - k_2)u'_{i,j+1} - k_4u'_{i+1,j+1}], \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{4\Delta x\Delta z} [k_1u'_{i-1,j-1} + (k_3 - k_1)u'_{i,j-1} - k_3u'_{i+1,j-1}]$$

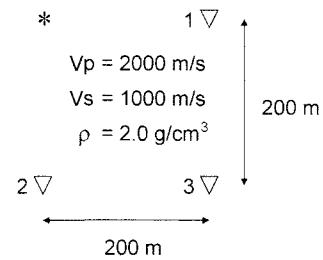


Fig. 4. The geometry of the infinite homogeneous model.

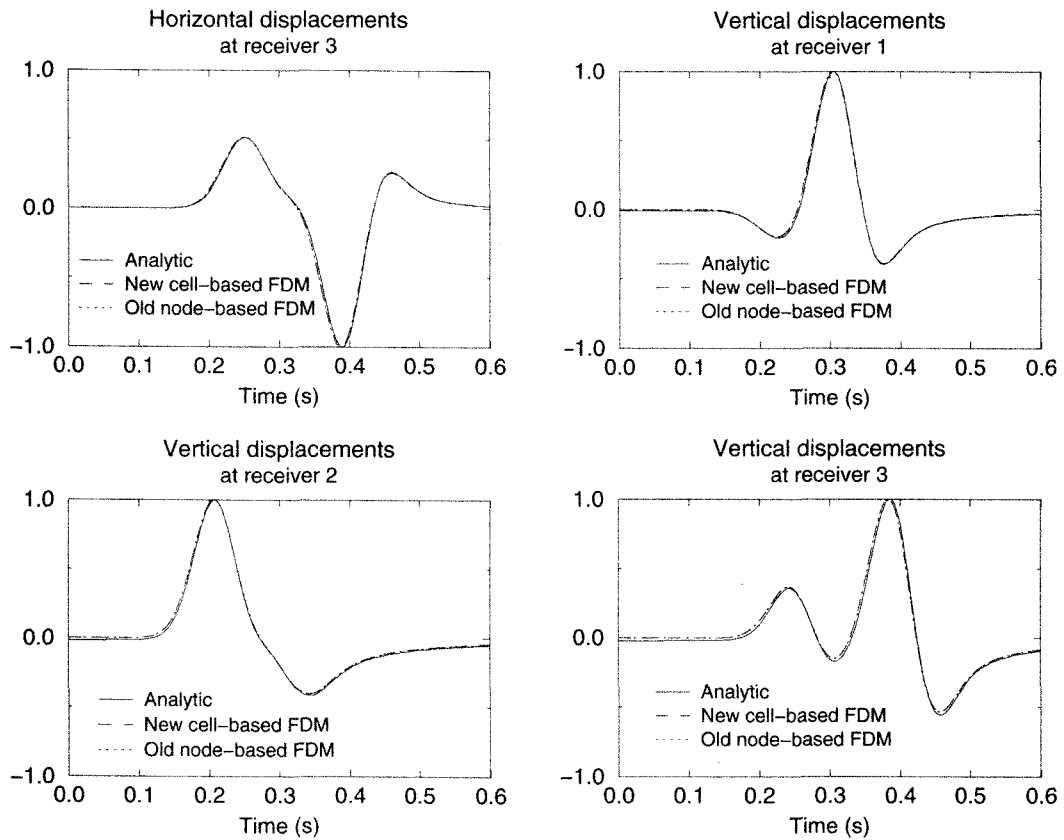


Fig. 5. Analytic solutions (solid line) and numerical solutions by the old, node-based (dotted line) and the new, cell-based (dashed line) time-domain finite-difference method for horizontal and vertical displacements at receivers 1, 2 and 3 of Fig. 4. There are no horizontal displacements at receivers 1 and 2.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\Delta x\Delta z} [(k_1 - k_2)u'_{i-1,j} + (k_3 - k_1 + k_2 - k_4)u'_{i,j} \\
& + (k_4 - k_3)u'_{i+1,j}] \\
& + \frac{1}{4\Delta x\Delta z} [-k_2u'_{i-1,j+1} + (k_2 - k_4)u'_{i,j+1} + k_4u'_{i+1,j+1}], \quad (33)
\end{aligned}$$

셀 기반의 격자군에서 구성된 유한차분식이 자유면을 만나면 다음과 같이 변형된다.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{4} (\rho_2 + \rho_4) \frac{u_{i,j}^{l+1} - 2u_{i,j}^l + u_{i,j}^{l-1}}{(\Delta t)^2}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{1}{2} k_4 (u'_{i+1,j} - u'_{i,j}) - \frac{1}{2} k_2 (u'_{i,j} - u'_{i-1,j}) \right], \quad (35)$$

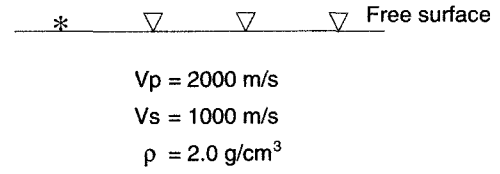


Fig. 6. The geometry of the semi-infinite homogeneous model (for Lamb's problem).

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{(\Delta z)^2} \left[ \frac{1}{2} (k_2 + k_4) (u'_{i,j+1} - u'_{i,j}) \right], \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \approx \frac{1}{4\Delta x\Delta z} k_4 (u'_{i+1,j+1} + u'_{i,j+1} - u'_{i+1,j} - u'_{i,j}) \\
& - \frac{1}{4\Delta x\Delta z} k_2 (u'_{i-1,j+1} + u'_{i,j+1} - u'_{i-1,j} - u'_{i,j}), \quad (37)
\end{aligned}$$

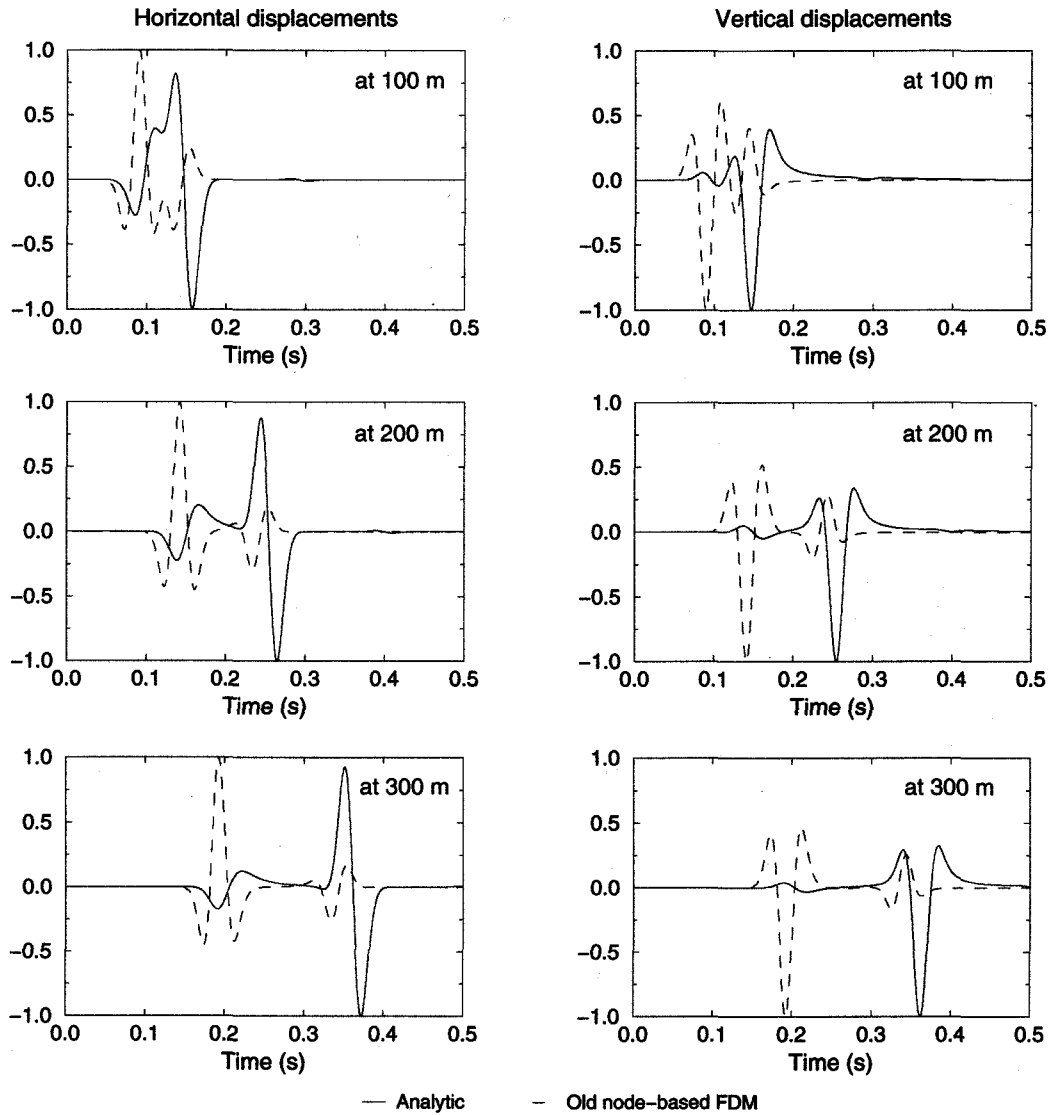


Fig. 7. Analytic solutions (solid line) and numerical solutions (dashed line) obtained by the old node-based time-domain finite-difference method for horizontal (left column) and vertical displacements (right column) at the distance of 100 m, 200 m and 300 m from source.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{4\Delta x \Delta z} k_2 (u'_{i,j+1} + u'_{i,j} - u'_{i-1,j+1} - u'_{i-1,j}) - \frac{1}{4\Delta x \Delta z} k_4 (u'_{i+1,j+1} + u'_{i+1,j} - u'_{i,j+1} - u'_{i,j}), \quad (38)$$

결 과

식 (34)~(38)을 보면, 격자점 기반의 격자군에서 구성된 유한차분식과는 달리 자유면 위에 놓인 셀과 관련된 유한차분식이 완전히 사라진다는 것을 알 수 있다. 또한 식 (35)~(38)은 완전한 1차 또는 2차 근사 유한차분식의 형태를 갖는다. 이러한 사실들로부터 셀에 근간을 둔 격자군에서 자유면 경계조건은 매질의 물성의 변화만으로 묘사될 수 있을 것으로 기대된다. 이러한 경우에 추가적인 자유면 경계조건을 이용하지 않으므로 reciprocity 또한 유지될 수 있다.

격자점 기반의 격자군과 셀 기반의 격자군에서 구성된 유한차분식의 알고리즘이 제대로 작성되었는가를 검증하기 위하여 Fig. 4에서 보는 바와 같은 무한균질매질에 대하여 계산된 수치적인 해를 해석적인 해와 비교해 보았다. 송신원으로는 최대 주파수가 20 Hz인 1차미분 가우스 함수를 이용하였다. 표준 2차근사 유한차분법의 경우 분산해석에 의하여 군속도의 오차를 5% 이내로 유지하기 위하여 파장당 20개의 격자수를 필요로 하므로 수치적인 해를 구하기 위하여 S파의 파장당 20개의 격자수를 이용하였다. 이 경우, x축과 z축의 격자간격  $\Delta x = \Delta z = 2.5\text{m}$ 가 된다. 모형의 크기를 (1500 m × 1500 m)로 설정하였으므로 필요한 격자수는 x축과 z축 각각 601개씩이

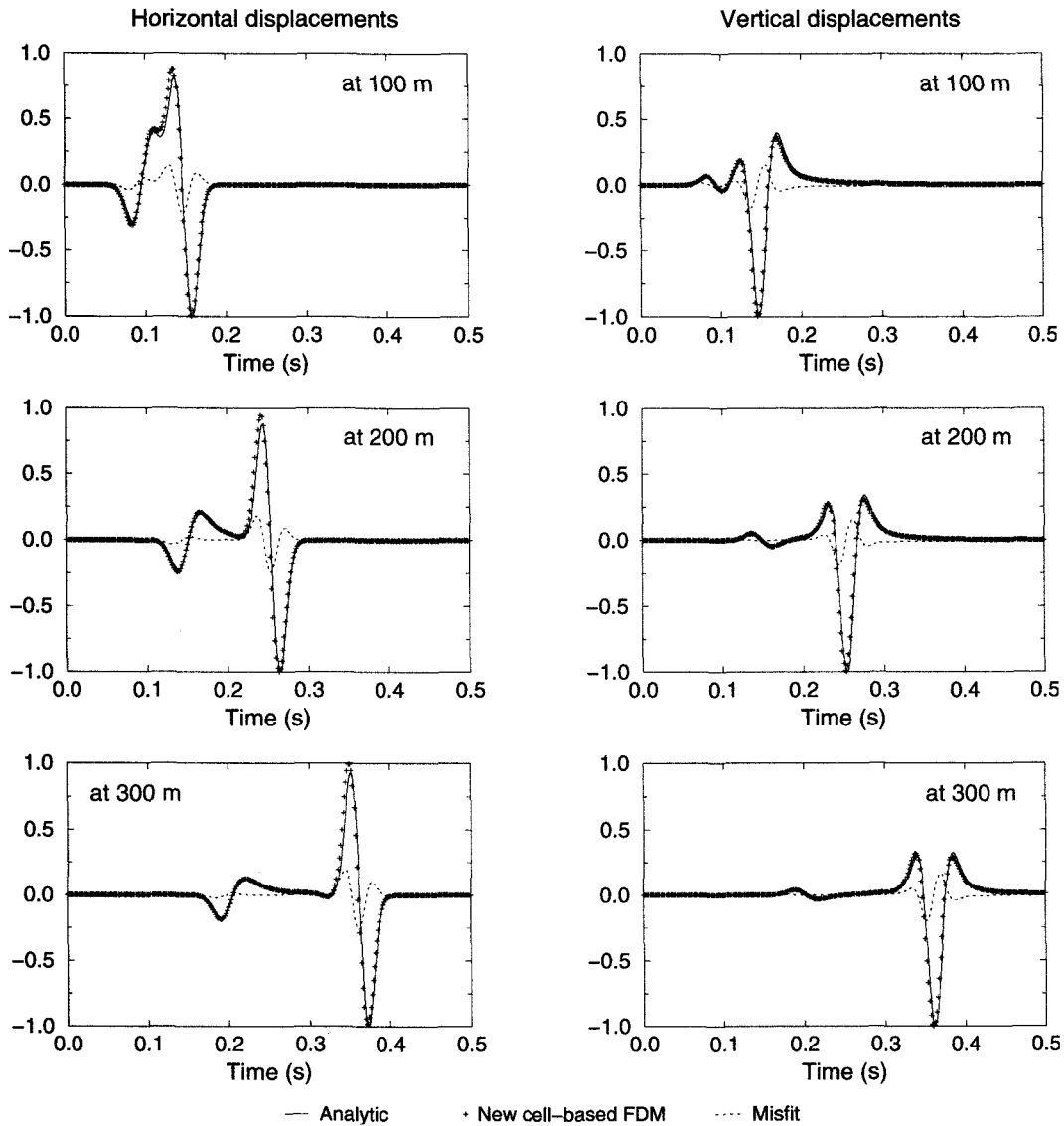


Fig. 8. Analytic solutions (solid line) and numerical solutions (plus symbols) obtained by the new cell-based time-domain finite-difference method for horizontal (left column) and vertical displacements (right column) at the distance of 100 m, 200 m and 300 m from source. Dotted lines indicate the misfit between the analytic and numerical solutions.

다. 총 0.6초에 대하여 해를 계산하였으며, 이용된 시간적분간격은 0.000625초이다. Fig. 4의 세 수진기에서 기존의 유한차분식과 새로운 유한차분식으로 계산된 수치적인 해와 해석적인 해를 Fig. 5에 나타내었다. 수진기 1과 2에서는 수평방향 변위가 존재하지 않으므로 표시하지 않았다. Fig. 5에서 보면, 격자점 기반의 격자군에서 구성된 기존의 유한차분식과 셀 기반의 격자군에서 구성된 새로운 유한차분식으로 구한 수치적인 해들은 모두 해석적인 해와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Lamb's problem에 대한 새로운 유한차분식의 정확성을 검증하기 위하여 Fig. 6에서 보는 바와 같이 P파의 속도와 S파의 속도가 각각 2000 m/s와 1000 m/s인 반무한 균질매질에 대하여 수치적인 해와 해석적인 해를 비교하여 보았다. 최대 주파수가 60 Hz인 1차미분 가우스 함수를 수직방향 송신원으로 이용하였으며, S파의 최소 파장당 20개의 격자수가 들어가도록 격자간격을 결정하였다. 이렇게 정한  $x$ 축과  $z$ 축의 격자간격이다. 모형의 크기를 (2000 m × 1000 m)로 설정하였으므로 필요한 격자수는  $x$ 축과  $z$ 축 각각 2401과 1201개이다. 총 0.6초에 대하여 해를 계산하였으며, 이용된 시간 적분 간격은 0.000208333초이다.

Fig. 7는 격자점 기반의 격자군에서 구성된 표준 2차근사 유한차분법에 의하여 구한 수치적인 해와 해석적인 해를 보여주고 있다. 해석적인 해는 Ewing *et al.*(1957)이 주파수-공간파수 영역에서 제시한 해를 이용하여 구하였다. Fig. 7에서 보면 수치적인 해와 해석적인 해 사이에 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 해석적인 해의 경우 작은 진폭의 P파와 함께 진폭이 큰 레일레이파를 보여주고 있으나 표준유한차분법으로 구한 수치적인 해의 경우 레일레이파가 P파에 비해 매우 적은 에너지를 가지고 있음을 알 수 있다. 표준유한차분법으로 모델링을 수행

할 때 식 (13)과 (14)으로 표현되는 자유면 경계조건을 적용하지 못하였다. 주파수영역에서와는 달리 시간영역에서는 자유면 경계조건을 적용하기가 쉽지 않다. 자유면 경계조건을 적용할 경우 자유면 근처에서 해의 안정성이 떨어져 작은 시간적분 간격을 이용할 경우에도 시간이 지남에 따라 해가 발산하였다. Fig. 8은 셀 기반의 격자군에서 형성된 새로운 2차근사 유한차분법에 의하여 구한 수치적인 해와 해석적인 해를 보여주고 있다. Fig. 7의 결과와는 다르게 수치적인 해와 해석적인 해가 상당히 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다. 이 경우 자유면 근처에서도 해의 안정성이 떨어지지 않았다. Figs. 9과 10은 격자점 기반의 격자군과 셀 기반의 격자군에서 구성된 유한차분식으로 계산된 합성탄성과 단면도를 보여주고 있다. 격자점 기반의 격자군에서 형성된 합성 탄성과 단면도에서는 옅게 따라 진폭이 감소하는 레일레이파를 관찰할 수 있으나, 셀 기반의 격자군에서 형성된 합성 탄성과 단면도에서는 옅게 따라 크고 일정한 진폭을 갖는 레일레이파를 관찰할 수 있다.

## 결론

송신원과 수진기가 지표면에 놓여 있는 Lamb의 문제에 대하여 정확한 해를 제시할 수 있는 2차근사 시간영역 유한차분법을 제시하였다. 이는 매질의 물성을 격자점에 정의하는 격자점 기반의 격자군을 이용하는 기존의 유한차분법과는 달리 매질의 물성을 셀 내부에 정의하는 셀 기반의 격자군을 이용함으로써 가능해진다. 격자점 기반의 격자군에서 구성된 유한차분식은 자유면에서 1차미분 또는 2차미분의 형태도 띠지 않는 불완전한 형태를 보이므로 보통 자유면에서 응력이 존재하지

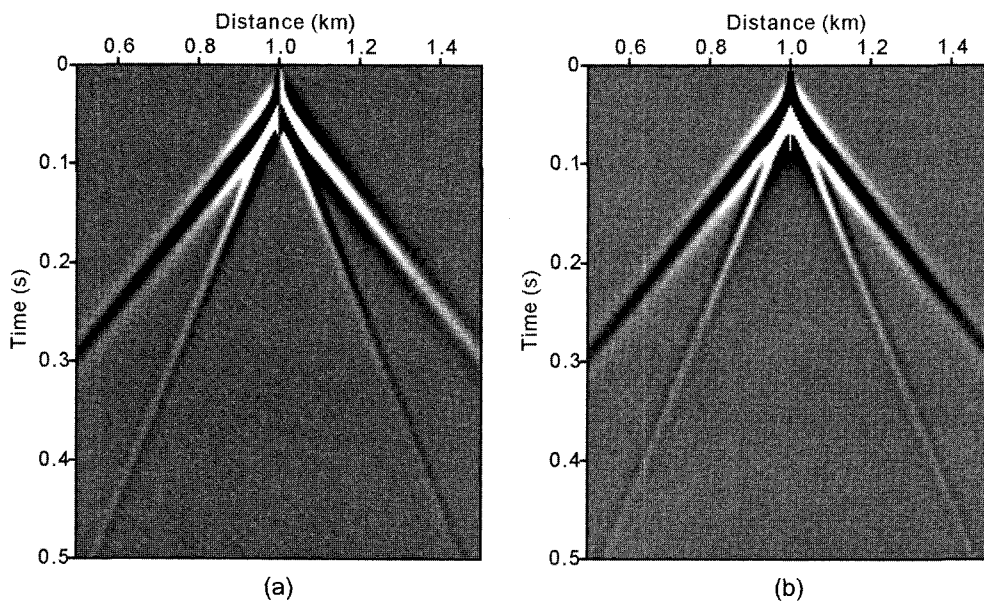


Fig. 9. Synthetic seismograms obtained by the old node-based time-domain finite-difference method for the semi-infinite homogeneous model.



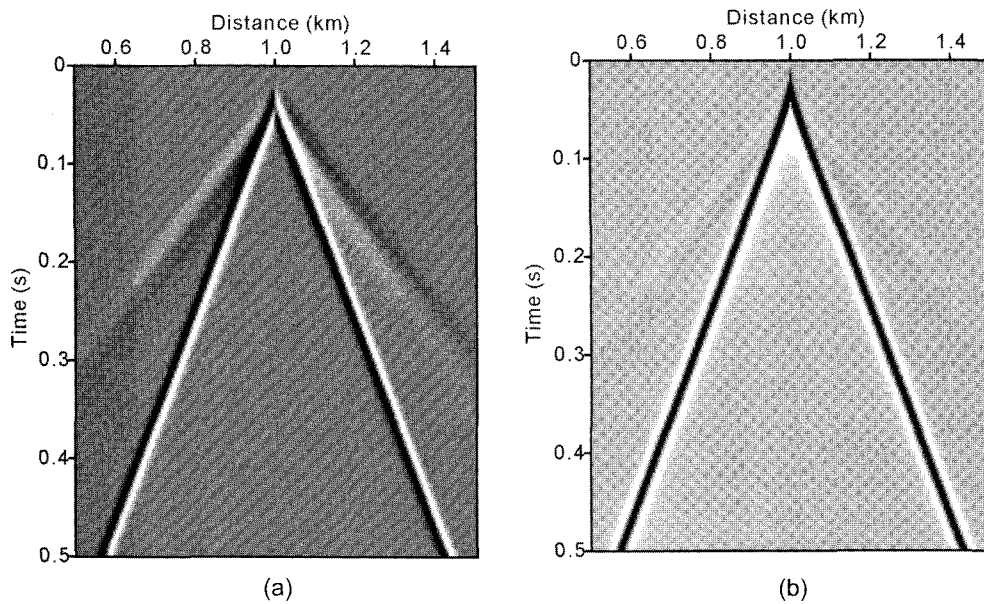


Fig. 10. Synthetic seismograms obtained by the new cell-based time-domain finite-difference method for the semi-infinite homogeneous model.

않는다는 일차미분 형태의 자유면 경계조건을 추가로 이용하게 된다. 그러나 이러한 일차미분 형태의 자유면 경계조건을 이용할 경우 reciprocity를 깨뜨리게 되는 문제점을 갖게 되며, 더욱이 시간영역에서는 안정조건 때문에 그러한 자유면 경계조건을 적용하기가 쉽지 않다.

이 연구에서 제시하는 셀 기반의 격자군에서 구성되는 유한차분식의 경우 자유면에 대하여도 완벽한 일차미분 또는 이차미분의 형태를 갖게 되므로 일차미분형태로 표현되는 자유면 경계조건을 추가로 적용하지 않고도 매질의 물성의 변화만으로 자유면 경계조건을 정확히 묘사할 수 있다. Lamb의 문제에 대하여 셀 기반의 격자군에서 구성한 유한차분식으로 구한 수치적인 해를 해석적인 해와 비교한 결과 수치적인 해가 해석적인 해에 매우 근사하다는 것을 알 수 있었으며, 기존의 유한차분법으로 구한 수치적인 해와는 달리 파의 진행 거리에 상관없이 일정한 진폭을 나타내는 레일레이파를 비교적 정확하게 묘사하고 있음을 알 수 있었다.

### 사 사

이 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R03-2000-000-00003-0)와 한국해양연구원 PM20300의 재정적 지원으로 수행된 것으로 관계기관에 감사드립니다.

### 참고문헌

민동주, 유해수, 2002, 시간영역 가중평균 유한요소법을 이용한 탄성파 모델링: 한국자원공학회지, **39**, 360-373.  
 박권규, 서정희, 신창수, 2000, 탄성파 파동방정식 모델링에서 중

간접 차분기법을 이용한 지표 경계조건 처리: 물리탐사, **3**, 61-69.  
 Alterman, Z. S., and Kara, F. C. Jr., 1968, Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 367-398.  
 Bayliss, A., Jordan, K. E., LeMeusurier, B. J., and Turkel, E., 1986, A fourth-order accurate finite-difference scheme for the computation of elastic waves: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **76**, 115-1132.  
 Ewing, W. M., Jardetzky, W. S., and Press, F., 1957, *Elastic waves in layered media*: McGraw-Hill Book Co.  
 Fornberg, B., 1989, Pseudospectral approximation of the elastic wave equation on a staggered grid: *59th Ann. internat. mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, 1047-1049.  
 Geller, R. J., and Ohminato, T., 1994, Computation of synthetic seismograms and their partial derivatives for heterogeneous media with arbitrary natural boundary conditions using the Direct Solution Method: *Geophys. J. Int.*, **116**, 421-446.  
 Gottschammer, E., and Olsen, K. B., 2001, Accuracy of the explicit planar free-surface boundary condition implemented in a fourth-order staggered-grid velocity-stress finite-difference scheme: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **91**, 617-623.  
 Grant, F. S., and West, G. F., 1965, *Interpretation theory in applied geophysics*: McGraw-Hill Book Co., Inc.  
 Graves, R. W., 1996, Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **86**, 1091-1106.  
 Graves, R. W., and Wald, D. J., 2001, Resolution analysis of finite fault source inversion using one- and three-dimensional Green's functions: 1. Strong motions: *J. Geophys. Res.*, **106**, 8745-8766.  
 Hestholm, S., and Ruud, B. O., 1994, 2-D finite-difference elastic wave modeling including surface topography:

- Geophys. Prosp.*, **42**, 371-390.
- Jih, R. S., McLaughlin, K. L., and Der, Z. A., 1988, Free-boundary conditions of arbitrary topography in a two-dimensional explicit elastic finite-difference scheme: *Geophysics*, **53**, 1045-1055.
- Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S., and Alford, R. M., 1976, Synthetic seismograms: A finite-difference approach: *Geophysics*, **41**, 2-27.
- Levander, A. R., 1988, Fourth-order finite-difference P-SV seismograms: *Geophysics*, **53**, 1425-1436.
- Min, D. -J., Shin, C., Kwon, B. -D., and Chung, S., 2000, Improved frequency-domain elastic wave modeling using weighted-averaging difference operators: *Geophysics*, **65**, 884-895.
- Min, D. -J., Shin, C., Pratt, R. G., and Yoo, H. S., 2003, Weighted-averaging finite-element method for 2-D elastic wave equations in the frequency domain: *will be published in BSSA*.
- Min, D. -J., Shin, C., Yoo, H. S., Hong, J. -K., and Park, M., 2002, Free surface boundary condition in finite-difference elastic wave modeling, *64th EAGE Conference and Exhibition, Expanded Abstract*, P264.
- Ohminator, T. and Chouet, B. A., 1997, A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite-difference method: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **87**, 494-515.
- Robertsson, J. O. A., 1996, A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topography: *Geophysics*, **61**, 1921-1934.
- Shin, C., Yoon, K., Marfurt, K. J, Park, K., Yang, D., Lim, H. Y., Chung, S., and Shin, S., 2001, Efficient calculation of partial-derivative wavefield using reciprocity for seismic imaging and inversion: *Geophysics*, **66**, 1856-1863.
- Stekl, I. and Pratt, R. G., 1998, Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite differences using rotated operators: *Geophysics*, **63**, 1779-1794.
- Strang, G. and Fix, G. J., 1973, An analysis of the finite element method: *Prentice-Hall, Inc.*
- Tessmer, E., Kosloff, D., and Behle, A., 1992, Elastic wave propagation simulation in the presence of surface topography: *Geophys. J. Int.*, **108**, 621-632.
- Tessmer, E. and Kosloff, D., 1994, 3-D elastic modeling with surface topography by a Chebichev spectral method: *Geophysics*, **59**, 464-473.
- Vidale, J. E. and Clayton, R. W., 1986, A stable free-surface boundary condition for two-dimensional elastic finite-difference wave simulation: *Geophysics*, **51**, 2247-2249.
- Virieux, J., 1986, P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method: *Geophysics*, **51**, 889-901.