

## 유사 평면변형률 유한요소를 사용한 실린더 문제의 해석

권영두\* · 권현욱\* · 신상목\* · 이찬복\*\*

\*경북대학교 기계공학부

\*\*한국원자력연구소

### Finite Element Analyses of Cylinder Problems Using Pseudo-General Plane Strain Elements(Planar Constraint)

YOUNG-DOO KWON\*, HYUN-WOOK KWON\*, SANG-MOK SHIN\* AND CHAN-BOK LEE\*\*

\* School of Mechanical Engineering, Kyungpook National University, Daegu, Korea

\*\*Korea Atomic Energy Research Institute

**KEY WORDS:** Long Cylinder 긴실린더, Plane Strain 평면변형률, Periodic Structure 주기적 구조, Representative Displacement 대표변위, Axisymmetric Condition 축대칭 상태, Asymmetric Condition 비축대칭 상태, Uniform Strain 일정변형률

**ABSTRACT:** Long cylinder, subjected to internal pressure, is important in the analysis and design of nuclear fuel rod structures. In many cases, long cylinder problems have been considered as a plane strain condition. However, strictly speaking, long cylinder problems are not plane strain problems, but rather a general plane strain (GPS) condition, which is a combination of a plane strain state and a uniform strain state. The magnitude of the uniform axial strain is required, in order to make the summation of the axial force zero. Although there has been the GPS element, this paper proposes a general technique to solve long cylinder problems, using several pseudo-general plane strain (PGPS) elements. The conventional GPS elements and PGPS elements employed are as follows: axisymmetric GPS element (GA3), axisymmetric PGPS element (PGA8/6), 2-D GPS element (G10), 3-D PGPS element (PG20/16), and reduced PGPS elements (RPGA6, RPG20/16). In particular, PGPS elements (PGA8/6, PG20/16) can be applied in periodic structure problems. These finite elements are tested, using several kinds of examples, thereby confirming the validity of the proposed finite element models.

### 1. 서 론

실린더(cylinder)는 공학적으로 중요한 구조물로서 원형 단면, 타원형 단면 또는 사각단면 등의 형태를 가지고 있으며, 그 중 원형 단면의 실린더는 내압성이나 제작상의 편의성 등으로 예로부터 많이 사용되어왔다. 실린더 문제의 해석에 있어서는, 이론 해로서 개방형 실린더(open cylinder)에 대해 평면응력 상태(Timoshenko and Goodier, 1987; Hill, 1950) 또는 평면변형률 상태(Hill, 1950; Reismann and Pawlik, 1980)로 가정하여 얻어진 바 있으며, 폐쇄형 실린더(closed cylinder)(Hill, 1950)의 경우는 개방형 실린더의 결과에 축 방향의 응력을 중첩하여 사용하였다.

유한요소법에 의한 실린더의 해석은 재료의 비선형성, 적층 구조(laminated structures), 열응력 문제 등 다소 복잡한 문제에서도 적용되어 왔으며, 이 때 사용이 된 요소는 이론해석 시와 유사하게 평면응력요소, 평면변형률 요소 및 축대칭 요소가 있으며, 드물게 3차원 요소를 사용하기도 하였다 (Bathe, 1996). 어떤 경우에 있어서도 3차원 요소를 적절히 사용하였다면 최선의 결과를 얻을 수 있음을 부인할 수 없다.

그러나 3차원 요소의 사용은 모델링이나 해석상 2차원 요소에 비해 매우 복잡하며 특히 소요 기억용량이나 계산시간 면에서 상당한 어려움을 종종 초래한 바 있다. 그리고 만약 3차원 요소를 사용하지 않는다고 했을 때 어떠한 요소가 일반적인 긴 실린더 문제에 보편적이고 효과적으로 사용될 수 있을 것인가에 대한 해답은 쉽게 찾을 수 없다.

여기서 일반적인 긴 실린더 문제란 비탄성, 비등방성, 비축대칭성, 불균일온도, 축방향으로 반복적인 구조 등을 모두 포함하는 경우이다. 그러므로 위에서 언급한 2차원 요소로는 보편적인 해석이 불가능하다. 일반적인 긴 실린더문제는 등방성의 경우가 아니거나 불균일 온도상태등에서는 평면응력상태가 아니며, 비록 반경방향을 따라서 축 방향의 균일한 변형률을 가지나 이는 0이 아니므로 평면변형률 상태 또한 아니다. 그리고 축 대칭이 아닌 많은 경우를 찾을 수 있어 축 대칭 요소로도 보편적인 적용이 불가능하다. 다시 말하면, 일반적인 긴 실린더문제는 일반적 평면변형률(GPS; generalized plane strain) 문제로서 '평면변형률+균일변형률' 문제로 정의 될 수 있으며 이 때의 균일 축변형률(uniform axial strain)의 크기는 축 방향의 합력을 0으로 하는 것이 되어야 한다.

이에 따라 GPS 유한요소가 개발되어 사용되나, 저차(축대칭

제1저자 권영두 연락처: 대구광역시 북구 산격동 1370번지  
053-950-5575 ydkwon@knu.ac.kr

요소)(Japan Atomic Energy Research Institute, 1997)이거나 회전자유도가 포함되어 있거나 반복적인 구조를 해석할 수 없는 문제가 있다.

그러므로 본 연구에서는 먼저 GPS요소를 약간 수정한 요소로 GPS문제를 해석한다. 다음은 PGPS(pseudo-general plane strain) 요소를 제안하고 이는 GPS 문제는 물론 GPS 요소로 해석이 불가능한 PGPS문제를 해석할 수 있음을 보인다. 그리고 이 PGPS 요소를 축소하면 reduced PGPS 요소가 되며 이는 GPS 문제에 적용이 가능하며 그 자유도가 GPS 요소와 같음을 보인다.

이를 위해 먼저 문제를 크게 두 가지 즉, 축대칭 문제와 비축대칭 문제로 나누어 각각에 대해 수정 GPS요소 및 PGPS요소와 reduced PGPS요소들을 제안하고 이를 수치예제 풀이에 적용함으로써 그 유용성을 검증하고자 한다.

축대칭 문제의 경우에는 축대칭 GPS 요소(Japan Atomic Energy Research Institute, 1997)를 고차요소로 수정한 고차축대칭 GPS 요소(GA3)를 사용한다. 축방향으로 반복적인 구조의 실린더 형상의 문제를 효과적으로 해석하기 위해 축대칭 PGPS 요소 (PGA8/6)를 제안하고자 한다. 그리고 이러한 PGA8/6요소의 자유도(dof)를 줄여 수정한 reduced PGPS 요소 (RPGA6)로써 GA3의 요소를 별도로 구성하지 않아도 손쉽게 GA3요소와 같은 기능을 수행할 수 있도록 하였다.

한편, 축대칭 뿐만 아니라 비축대칭을 포함하는 경우에는 GPS 요소(Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. 1996)를 단순화한 2-D GPS 요소 (G10)를 정식화하고 이 요소로 일반적인 긴 실린더문제를 해석한다. 이러한 2-D GPS 요소를 사용한 모델의 전체자유도는 2차원 요소 모델의 전 자유도+1 에 불과함을 알 수 있다. 또한 이러한 2-D GPS 요소는 개방형 긴 실린더는 물론 폐쇄형 긴 실린더 문제에도 바로 적용을 할 수 있다. 제안될 3-D PGPS 요소(PG20/16)를 사용하여 축 방향으로 반복적인 구조를 가진 문제를 해석할 수 있음을 보이고, 이러한 PG20/16의 자유도를 줄여 수정한 reduced 3-D PGPS 요소 (RPG20/16)로써 비축대칭문제에 있어서 G10요소를 별도로 구성하지 않고 G10요소의 기능을 수행하도록 하였다

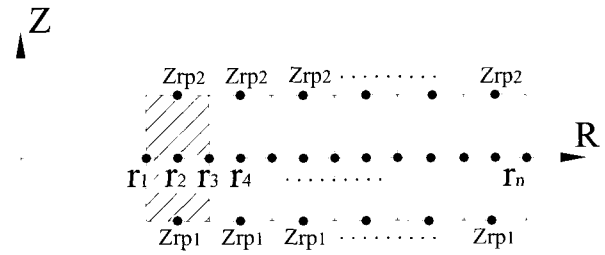
## 2. 긴 실린더 문제를 위한 유한 요소

### 2.1 축대칭 문제

축대칭의 형상을 가진 모델은 다음의 세 가지 요소로써 해석이 가능하다.

#### 2.1.1 고차축대칭 GPS 요소(GA3)

다음의 Fig.1에서와 같이 축대칭 GPS 요소는 각 절점이 한 개의 자유도만을 가지는데, 축 방향의 대표자유도로는  $Z_{rp1}$  과  $Z_{rp2}$  이고  $r_1, r_2, \dots, r_n$  의 자유도는 반경방향의 자유도만을 나타낸다. 여기서 밑면은 고정이며,  $Z_{rp2}$  는 축 방향으로의 동일한 변위를 나타내는 것으로 가정한다.



Zrp1 : fixed

Fig. 1 Axisymmetric GPS element (GA3)

이 요소에 적용되는 요소내의 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{U\} &= \{ U_1 \ U_2 \ U_3 \ W_4 \ W_5 \} \\ U_1, U_2, U_3 &= \text{radial displacements} \\ W_4 &= \text{fixed displacement}(Z_{rp1}) \\ W_5 &= \text{axial displacement}(Z_{rp2}) \end{aligned} \tag{1}$$

요소내 변위와 절점변위 벡터와의 관계는 다음과 같다.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & h_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

그리고 이 요소의 형상함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_1 &= -\xi(1-\xi)/2 & h_2 &= \xi(1+\xi)/2 \\ h_3 &= 1-\xi^2 & h_4 &= (1-\eta)/2 \\ h_5 &= (1+\eta)/2 \end{aligned} \tag{3}$$

$\xi, \eta$  : natural coordinates

Green-Lagrange 변형을 텐서를 행렬식 형태로 나타내면 다음과 같다(김정운과 권영두, 1991; Japan Atomic Energy Research Institute, 1997).

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \{\epsilon_{rr} \ \epsilon_{\theta\theta} \ \epsilon_{zz}\}^T \\ \{\epsilon\} &= [B]_L \{U\} \end{aligned} \tag{4}$$

$$[B]_L = [B]_{L_0} + [B]_{L_2}$$

$[B]_L$  : 변형률-변위 변환 행렬

$[B]_{L_0}$  : 선형 변형률-변위 변환 행렬

$[B]_{L_2}$  : 대변형에 의한 비선형 변형률-변위 변환 행렬

$$([B]_{L_1} = 2[B]_{L_2})$$

또한 이 요소의 요소변형률-변위행렬(strain-displacement matrix)는 다음과 같다.

$$[B]_{L_0} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 & 0 \\ \frac{h_1}{\bar{x}_1} & \frac{h_2}{\bar{x}_1} & \frac{h_3}{\bar{x}_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{25} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[B]_{L_1} = \begin{bmatrix} l_{11}h_{11} & l_{11}h_{12} & l_{11}h_{13} & 0 & 0 \\ \frac{l_{33}h_1}{\bar{x}_1} & \frac{l_{33}h_2}{\bar{x}_1} & \frac{l_{33}h_3}{\bar{x}_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{22}h_{25} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서,  $\bar{x}_1 = \sum_{k=1}^N h_k x_1^k$ ,  $h_{ij} = \partial h_j / \partial x_i$

$$h_{25} = 0.5,$$

$$l_{11} = \sum_{k=1}^N h_{1k} U_1^k, \quad l_{22} = h_{15} W_5$$

$$l_{33} = \frac{\sum_{k=1}^N h_k U_1^k}{\bar{x}_1}$$

(단, N : 절점수,  $x_i$  : 직각좌표계에서의 좌표값( $x_1$ =반경방향의 절점좌표))

다음은 강성행렬 [K]와 변형률-변위 변환행렬 [B]와의 관계식이다(김정운과 권영두, 1991; Japan Atomic Energy Research Institute, 1997).

$$[K] = [K]_L + [K]_{NL} = \int_V ([B]_{L_0} + [B]_{L_1})^T [D] ([B]_{L_0} + [B]_{L_1}) dV + \int_V [B]_{NL}^T [S] [B]_{NL} dV \quad (7)$$

여기서 [S] = 제2 Piola-Kirchhoff 응력 행렬, [D] = 구성물질의 특성행렬(material property matrix),  $[B]_{NL}$  = 변위의 도함수-절점변위 변환 행렬로서 관계식은 아래와 같다.

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix}$$

$$[B]_{NL} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 0 & 0 \\ \frac{h_1}{\bar{x}_1} & \frac{h_2}{\bar{x}_1} & \frac{h_3}{\bar{x}_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{25} \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 2.1.2 축대칭 PGPS 요소 (PGA8/6)

같은 모양의 단위 실린더가 모여 긴 실린더를 구성하는 반복적 구조(Japan Atomic Energy Research Institute, 1997; Radiation Shielding Information Center, 1996)를 가진 실린더의 경우에는 축 방향으로 다른 요소들과 붙여서 다층의 요소로 사용해야 하므로 앞에서 설명한 GA3으로는 해석이 불가능하다. 이에 축 대칭의 긴 실린더를 포함하여 축방향으로 반복적인 구조의 실린더까지도 해석이 가능한 축대칭 PGPS 요소

(PGA8/6, 8절점 혹은 6절점(no mid node))를 제안하고자 한다. 긴 실린더의 축대칭 모델에서 축 방향의 변위를 모두 같은 값의 조건을 주어 문제를 해결할 수도 있지만 균일한 구속조건을 일일이 주는 과정과 실제 사용하지 않는 많은 절점 자유도로 해석에 다소 불편을 겪지 않을 수 없을 뿐만 아니라 다수의 구속조건을 주는 과정에서 강성행렬의 off diagonal term에도 매우 큰 수의 값이 삽입되므로 ill-condition이 발생하기 쉬워진다(Anthoine, 1997; Hu and Pagano, 1997; 윤태혁과 권영두, 1998). 이를 해결하기 위해 다음과 같은 임의의 행렬에 다수의 penalty가 포함되어 있을 때 ill-condition을 조사할 수 있도록 수식  $\det[A] \cdot \det[A^{-1}] = 1$  이 성립되는지 살펴보았다.

$$[A] = \begin{bmatrix} 10^4 + c & -c & 0 & 0 & 0 \\ -c & 10^4 + 2c & -c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 10^4 + 2c & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c & 10^4 + 2c & -c \\ 0 & 0 & 0 & -c & 10^4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서 c는 penalty로서  $10^{20}$ 의 값을 사용 하였다. 이 행렬의 ill-condition의 여부를 조사하면 다음의 표와 같다.

Table 1 Checking for ill-condition (IBM-PC)

	Single precision	Double precision
$\det[A] \cdot \det[A^{-1}]$	0.00000000	1.00000000

Table 1에서 볼 수 있듯이  $\det[A] \cdot \det[A^{-1}]$ 이 1이 아닌 경우가 생길 수 있다는 것은 다수의 penalty를 포함하는 행렬일 경우 ill-condition이 발생하기 쉬워지며 이는 행렬의 차수가 커짐에 따라 발생가능성도 증가하게 됨을 의미하는 것이다. 이를 해결하기 위해서는 penalty의 수를 줄이거나 이배정밀도(double precision)의 변수를 사용하여야 한다.(Nakamura, 1993)

하지만 본 논문에서 소개하고자 하는 PGA8/6 요소는 다음의 Fig. 2와 같이 축 방향으로의 변위를 나타내는 대표 자유도를 지정함으로써 일정한 축 방향의 변위를 보다 효과적으로 나타낼 수 있기 때문에 다중구속 조건으로 인한 강성행렬의 ill-condition의 발생을 미연에 방지할 수 있게 된다.

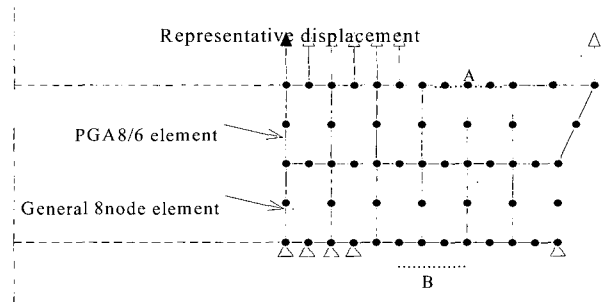


Fig. 2 Axisymmetric PGPS element (PGA8/6)

Fig. 2에서 A와 B의 구속자유도를 구분하기 위한 지수를 각각 -1과 1을 줌으로써 구속이 없는 절점 자유도를 나타내는 지수 0과 구분한다. 여기서 A는 PGA8/6에서 특별히 잡아주는 구속조건이다. 이러한 A구속조건은 계산과정에서 이용되지 않는 축 방향의 자유도를 없애고 방정식의 수를 줄임으로써 보다 간단하고 빠른 계산을 가능케 한다.

이것은 다음의 Fig. 3에서 나타난 것과 같이 강성행렬의 열의 높이를 구하는 과정과 강성행렬을 중첩하는 과정, 그리고 등가절점력을 구하는 과정등에서 자유도 번호에 대표자유도 번호를 부여함으로써 대표변위(representative displacement)가 A부의 고정된 변위(index=-1)에 사용되어 축 방향의 일정한 변위가 대입되는 절차를 거쳐게 된다.

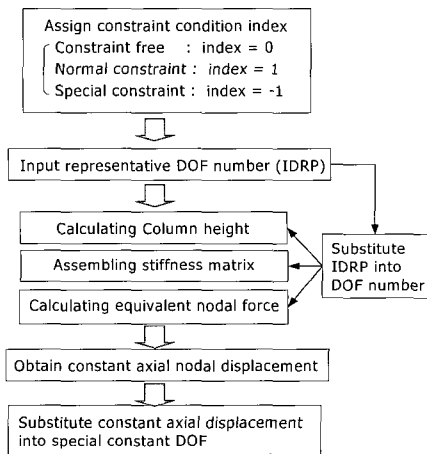


Fig. 3 Diagram of PGA8/6 solution procedure

이러한 요소는 반복적 구조의 실린더를 구성하는 하나의 단위 모델만을 평면요소로 해석함으로써 GA3을 이용하여 해석할 수 없는 반복적 구조를 가진 실린더의 해석을 가능케 한다.

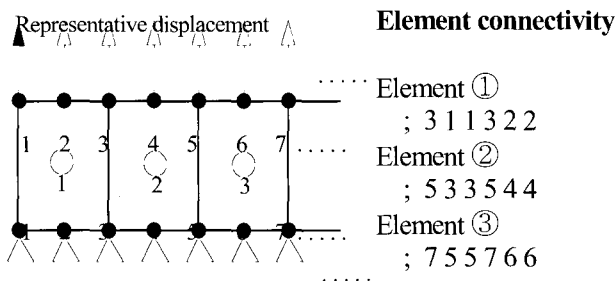


Fig. 4 Reduced PGA6 element ( RPGA6 )

또한, 위에서 설명한 PGA8/6에서 보다 간편한 해석을 위해 절점을 줄이고 요소결합도(element connectivity)의 절점부여방식을 조절하면 위의 Fig. 4에서 보는 바와 같이 reduced PGA6

(RPGA6)가 된다. 이것은 GA3과 같은 기능을 하는 요소로서 반복적인 구조가 아닌 경우 균일 변형률의 해석을 할 때 PGA8/6에서 쉽게 단순화 시켜 적용할 수 있다(김진환, 1999).

2.2 비축대칭 문제

긴 실린더가 축대칭이 아닌 경우, 기존의 방법은 평면변형률 혹은 평면응력상태의 가정으로 실린더를 모델링하였다. 그러나 이에 대해서 다음의 세 가지 요소를 제안함으로써 그러한 비축대칭 모델의 보다 정확한 해석이 가능함을 보이고자 한다.

2.2.1 2-D(x-y plane) GPS 요소( G10 )

이 요소는 다음의 그림 Fig. 5와 같이 평면요소이나 각 요소 당 상하에 추가적인 절점 9와 10이 있다. 1~8번 절점까지는 기존의 2차원 8절점 사변형요소와 동일한 자유도를 갖고 있지만 9번 절점은 모든 자유도가 구속되어 있고 10번 절점은 축 방향의 자유도만을 가지며, 이 10번 절점이 기존의 다른 절점들의 축 방향 자유도를 대표하는 것이 된다. 결국 각 요소 당 모두 20개의 자유도이어야 하지만, 실제적으로는 17개의 자유도를 가지고 10번 절점의 자유도(W<sub>10</sub>)는 모든 요소들에 공통적으로 적용된다. 따라서 평면응력요소나 평면 변형률 요소의 두께가 단위 두께로 고정되는 반면 이 요소는 두께가 2가 된다. 이 요소에 적용되는 변위 벡터는 다음과 같다.

$$\{U\} = \{ U_1 \ V_1 \ U_2 \ V_2 \ \dots \ U_8 \ V_8 \ | \ W_9 \ W_{10} \}^T \quad (10)$$

$$W_9 = 0$$

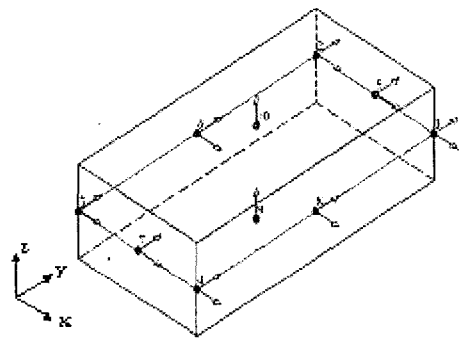


Fig. 5 2-D GPS element (G10)

또한 2차원 8절점 요소에서의 형상함수 이외에 다음과 같은 두개의 형상함수가 추가되었다.

$$h_9 = (1 - \xi)/2 \quad (11)$$

$$h_{10} = (1 + \xi)/2 \quad (12)$$

$\xi, \eta, \zeta$ : natural coordinates

형상함수의 미분은 다음과 같다.



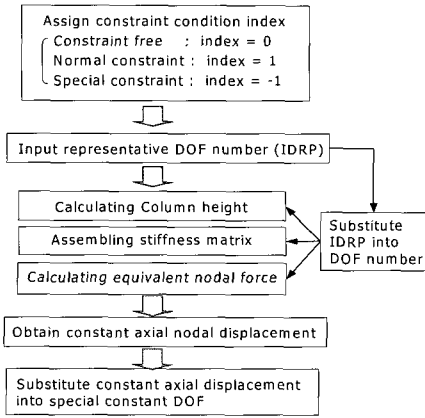


Fig. 7 Diagram of PG20/16 solution procedure

이것은 G10요소와 같은 기능을 하는 요소로서 비축대칭이면서 반복적 구조가 아닌 경우 균일변형률의 해석을 할 때 PG20/16에서 쉽게 단순화 시켜 적용을 할 수 있다.

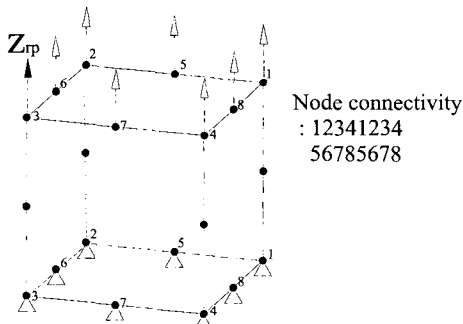


Fig. 8 Reduced PG20/16 element (RPG20/16)

### 3. 수치 예제

이상에서 제안한 요소들에 대하여 몇 가지의 긴 실린더모델의 예제로써 기존의 알려진 또는 3차원으로 해석한 결과와 비교하여 그 타당성을 검증하고자 한다. 여기에서의 해석결과는 실린더의 내측벽면에서부터 외측벽면까지의 응력의 분포로써 비교하였다. 제안한 요소들을 열거하면 다음과 같다.

- GA3 : Axisymmetric GPS element
- PGA8/6 : Axisymmetric PGPS element
- RPGA6 : Reduced PGA6
- G10 : 2-D GPS element
- PG20/16 : 3-D PGPS element
- RPG20/16 : Reduced PG20/16

### 3.1 내압을 받는 두꺼운 벽면의 축대칭 실린더

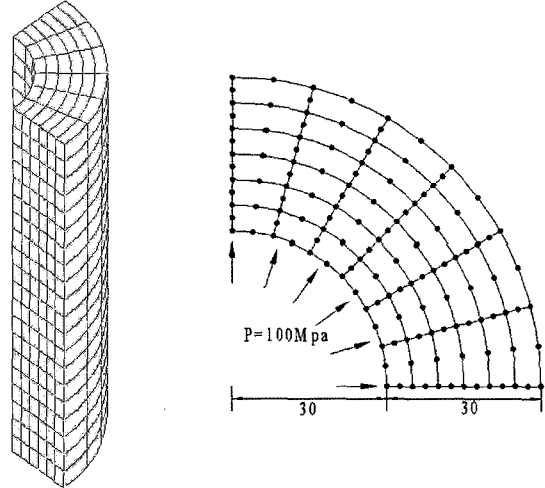


Fig. 9 Axisymmetric thick-walled cylinder under internal pressure (plane strain element)

축대칭의 두꺼운 벽면을 가진 실린더에 대한 해석은 유한요소의 정확성을 가지는 대표적인 모델이다. 앞의 Fig.9에서는 등방성 탄성실린더에 100MPa의 내부 압력이 가해지는 모델을 나타내었다. 탄성계수(Young's modulus E)는 210 GPa이고, 프아송비(Poisson's ratio ν)는 0.3이며 이를 앞에서 소개한 PGA8/6, GA3, RPGA6 및 해석해(Reissmann and Pawlik, 1980)를 서로 비교하였다.

여기에서 해석하는 평면변형률 상태를 가정한 것으로 다음과 같은 식으로 계산된다(Reissmann and Pawlik, 1980).

$$\sigma_r = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (18)$$

$$\sigma_\theta = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (19)$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu a^2 P}{b^2 - a^2} = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (20)$$

a : inner radius of cylinder

b : outer radius of cylinder

P : internal pressure

해석결과를 각 요소들의 응력 값으로 나타낸 그래프는 다음의 Fig. 10과 같으며 해석해와는 축 방향의 응력에서 비교적 큰 값의 차이를 나타낸다. 이는 해석해가 축 방향의 변형률을 고려하지 않은 평면변형률상태를 가정한 것에 기인한 것이므로 정확한 해석과는 차이가 있다는 것을 이러한 예로써 알 수 있다.

### 3.2 내압을 받는 반복적 구조의 축대칭 실린더

여기에서는 Fig. 11에서 보여지는 바와 같이 축 방향으로 형상이 다른, 그러나 일정한 반복으로 반복되는 축대칭 모델의 해석이다. 이러한 반복적 구조의 긴 실린더(Japan Atomic

Energy Research Institute, 1997; Radiation Shielding Information Center, 1996)는 축 방향으로 변형을 뿐만 아니라 형상도 변하는 특성을 가지므로 이에 대하여 축 방향으로 평면을 유지하는 PGA8/6요소와 일반적인 요소를 병행하여 사용하여야 한다. 이러한 형상의 실린더 해석을 위해 간단하게 Fig. 12와 같은 반복적 구조의 긴 실린더의 단위형상과 유사한 요소를 PGA8/6으로 만든 것과 NISA II(NISA II User's Manual Version 7.0 For Windows NT/95, 1988-1997)를 이용하여 만든 2차원요소에 다중 구속조건(multi-point constraint)을 일일이 준 것과 비교하였다.

이는 Fig. 13에 보여지듯이 거의 유사한 결과가 나오을 알 수 있는데, 이는PGA8/6요소를 사용하여 보다 간편한 절차로써 반복적 구조의 축대칭 실린더를 해석할 수 있음을 보인 것이다.

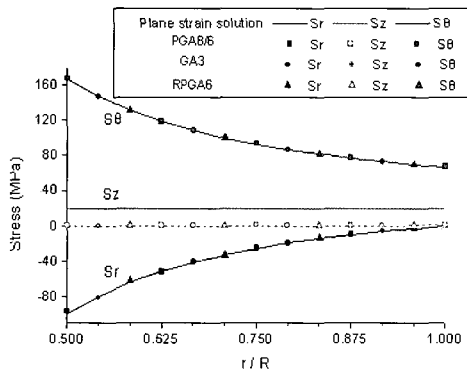


Fig. 10 Axisymmetric thick-walled cylinder under internal pressure

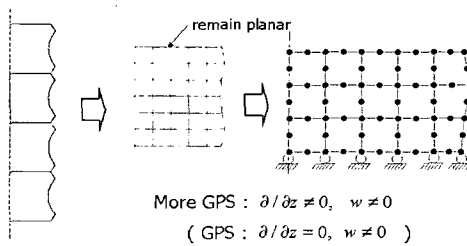


Fig. 11 Shape of periodic cylinder

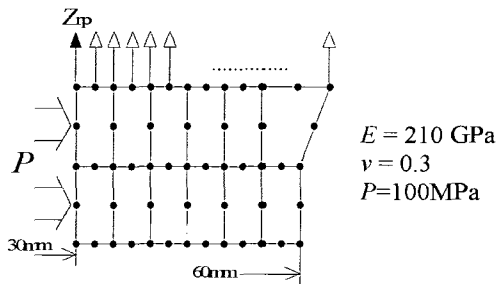


Fig. 12 Periodic axisymmetric cylinder subjected to internal pressure

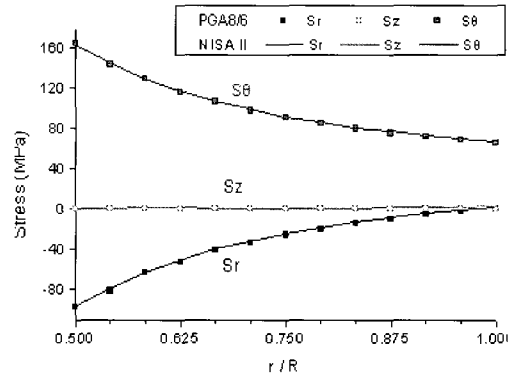


Fig. 13 Periodic axisymmetric cylinder subjected to internal pressure

### 3.3 내압을 받는 비축대칭 실린더

다음의 Fig. 14은 비축대칭 실린더의 모양을 보여주고 있다. 여기서 보여지는 실린더는 대칭성을 고려해서 1/8만을 분할한 모습이다.

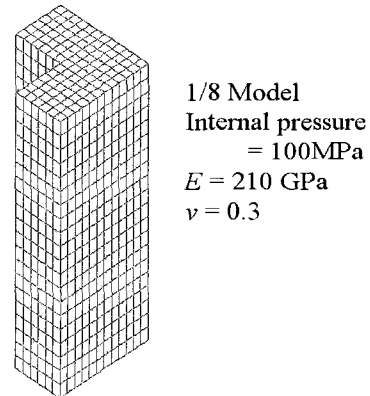


Fig. 14 3-D Asymmetric cylinder model (3-D element using penalty method)

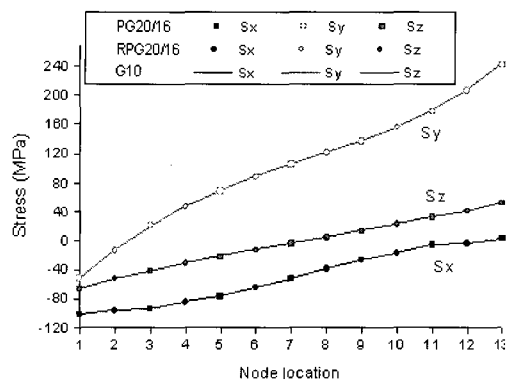


Fig. 15 Asymmetric cylinder subjected to internal pressure

이러한 실린더 (탄성계수 E = 210 GPa, 프아송비 ν = 0.3)가 100MPa의 내압을 받을 경우의 해석 결과를 PG20/16, G10, RPG20/16의 요소로써 서로 비교하여 Fig. 15의 그래프와 같이 나타내었다.

여기에서도 PG20/16, G10 및 RPG20/16 요소의 사용에 있어 거의 같은 결과로 정확한 해석이 수행됨을 알 수 있다.

**3.4 내압을 받는 비축대칭의 반복적 구조를 가진 실린더**

Fig. 16과 같이 비축대칭이면서 반복적인 구조를 가지는 형상의 실린더가 내압을 받는 문제의 해석을 수행하였다. 이것은 PG20/16으로 비축대칭문제와 반복적구조를 가진 모델의 해석이 가능함을 보여주는 것으로 NISA II의 3차원 모델링을 한 것과 비교하여 실린더의 내벽에서 외벽까지의 응력들을 Fig. 17에 나타내었다. 여기서 NISA II에서는 번거로운 절차지만 비교를 위해 축방향의 변위에 다중구속조건을 주어 축방향의 일정한 변위를 나타낼 수 있도록 하였다.

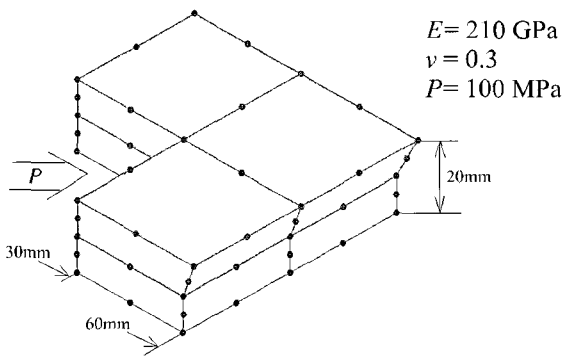


Fig. 16 Periodic asymmetric cylinder subjected to internal pressure

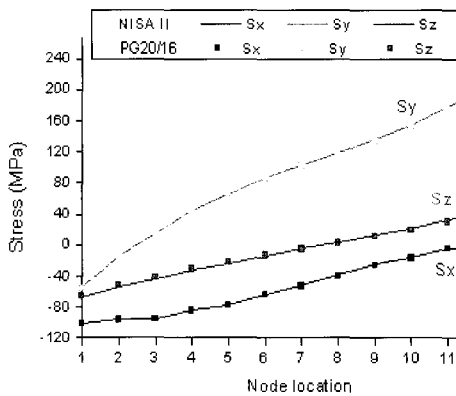


Fig. 17 Periodic asymmetric cylinder subjected to internal pressure

Fig. 17의 그래프에서 보는 바와 같이 실린더에 100MPa의 내압이 작용할 때 3차원 모델의 요소와 PG20/16 요소의 해석결과, 거의 정확한 수치로 해석이 됨을 알 수 있다.

**3.5 내압을 받는 축대칭의 탄소성 실린더**

이번에는 Fig. 18과 같은 축대칭문제에 있어서 항복응력이

140MPa의 값을 가지는 재료의 탄소성 해석을 수행한 결과를 다음의 Fig. 19과 같이 나타내었다.

Fig. 19의 그래프에서 보는 바와 같이 실린더의 중간 지점을 경계로 탄성영역과 소성 영역이 뚜렷이 구분되고 3차원 요소로 해석한 결과와 2차원의 PGA8/6 요소로 해석한 결과 거의 같은 값을 나타냄으로써 이러한 요소의 탄소성 해석도 마찬가지로 정확한 값으로 해석이 가능함을 알 수 있다.

**3.6 내압을 받는 비축대칭의 적층구조를 가진 실린더**

비축대칭의 적층구조를 가진 실린더의 해석을 위해 Fig. 20과 같이 1/4모델의 중간 두 요소에 다음과 같이 물성치가 다른

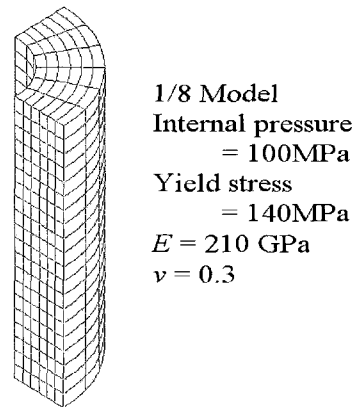


Fig. 18 Axisymmetric elasto-plastic cylinder subjected to internal pressure (3-D element using penalty method)

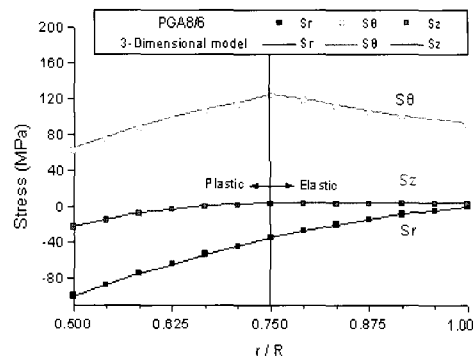


Fig. 19 Axisymmetric elasto-plastic cylinder subjected to internal pressure

재료를 삽입한 모델을 사용하여 해석하였다. 각 층의 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E_A &= 210 \text{ GPa} & \nu_A &= 0.3 \\
 E_B &= 100 \text{ GPa} & \nu_B &= 0.2 \\
 E_C &= 210 \text{ GPa} & \nu_C &= 0.3
 \end{aligned}$$



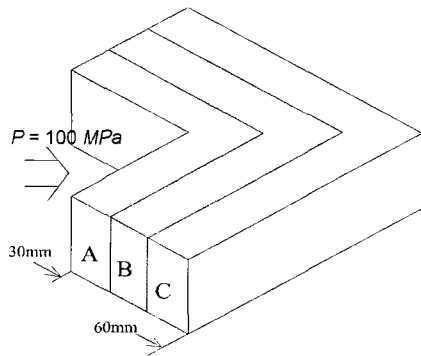


Fig. 20 Laminated asymmetric cylinder subjected to internal pressure

이러한 해석의 결과를 NISA II를 이용한 3차원요소와 G10, PG20/16 및 RPG20/16요소와 비교하여 실린더의 내벽에서부터 외벽까지의 응력들을 나타낸 그림은 아래의 Fig. 21과 같으며 이는 3차원요소로써 해석한 것과 거의 같은 결과를 나타내고 있음을 보여준다.

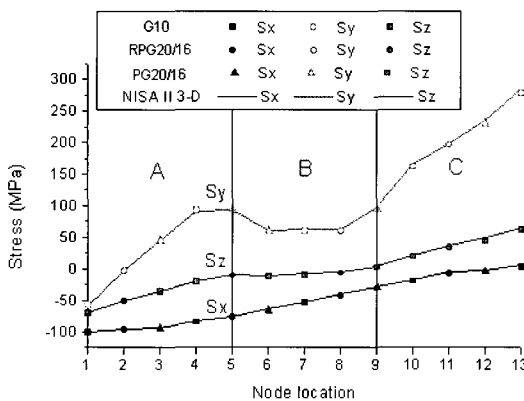


Fig. 21 Laminated asymmetric cylinder subjected to internal pressure

### 4. 결 론

지금까지의 보편적인 긴 실린더의 해석방법은 주로 평면응력 요소나 평면변형률 요소로써 간단히 해석해 왔으나 사실은 긴 실린더의 해석은 엄밀히 말해 평면응력 문제도 평면변형률 문제도 아니다. 등방성의 탄성, 축대칭 문제의 경우에는 평면응력의 방법으로도 해석한 결과가 정확한 해와 일치하기도 하지만 이것은 단지 제한된 경우일 뿐이다. 다시 말해서 일반적인 긴 실린더문제는 축 방향의 변형률이 일정한, 균일변형률 상태인 것이다.

이 논문에서는 이러한 균일변형률 상태의 실린더 문제를 보다 정확하고 간단히 해결하기 위해 Fig. 22과 같이 다양한 긴 실린더문제를 위한 몇 가지 방법을 제시했다. 즉, 축대칭 문제를 위한 incompatible axis-symmetric uniform strain element (GA3) method와 axisymmetric PGPS element (PGA8/6)

method 및 reduced axisymmetric PGPS element (RPGA6) method, 비축대칭 문제를 위한 2-D GPS element (G10) method와 3-D PGPS element (PG20/16) method 그리고 reduced 3-D PGPS element (RPG20/16) method가 그것이며 이 방법들에 대한 몇 가지 예를 보이고 해석의 결과를 논의하여 정당성을 확인하였다.

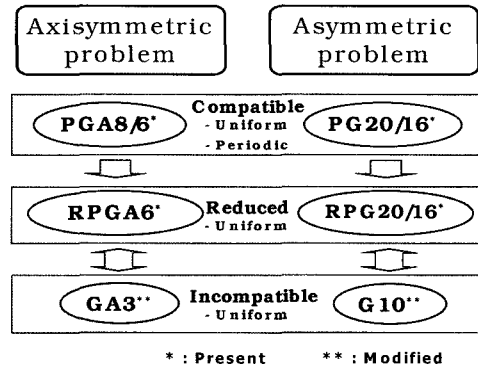


Fig. 22 Special elements for long cylinder problems

본 연구의 내용을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 축대칭 문제의 경우 축대칭 constant 요소(Japan Atomic Energy Research Institute, 1997)를 고차요소(GA3)로 바꾸어 소개하였는데 이것은 각 절점마다 하나( $r$  혹은  $z$ 방향)의 자유도를 가진 것으로서 축 방향의 자유도를 가진 대표절점이 모든 축 방향의 변형을 대표한다. 그러나 이 요소는 간단한 해석이 가능하지만 반복적구조의 실린더 해석에는 적합하지 않다.
- 2) 이를 보완한 축대칭 PGPS 요소(PGA8/6) method는 축 방향의 자유도에 구속조건을 주어 간결해진 강성행렬을 구한다음 대표변위를 각 소거되었던 축 방향의 변위에 대입하는 방식으로, 축 방향으로의 같은 형상의 실린더 뿐만 아니라 단위 실린더 ( $\partial/\partial z \neq 0$ ) 가 여러 개 모여 이루어진 반복적 구조를 가진 실린더의 경우에도 적용 가능한 요소임을 보였다.
- 3) 비축대칭 문제에 있어 2-D(x-y plane) GPS 요소(G10)는 기존의 GPS 요소(Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1996)의 회전자유도를 소거한 것으로 긴 실린더문제에 보다 효율적으로 사용될 수 있다. 이 요소는 탄소성, 적층 구조, 축 방향의 하중이 있는 경우, 열응력 해석, 비축대칭 문제 모두 해석이 가능하지만 반복적 구조를 가진 실린더의 문제에는 적합하지 않다.
- 4) 또한 3-D PGPS 요소(PG20/16)는 3차원 요소의 축 방향 자유도에 구속조건과 대표변위를 줌으로써 2차원의 G10의 해석 범위를 포함하여 비축대칭의 반복적인 구조를 가진 실린더에도 적용 가능하도록 하였다.
- 5) 끝으로 축대칭 및 비축대칭 문제에 있어서 compatible element (PGA8/6, PG20/16)의 자유도를 줄여 수정할 수 있는 reduced D.O.F element (RPGA6, RPG20/16)를 제안함으로써 반복적인 구조에 적용하지 않을 경우에 최소의 자유도를 갖아 간단한 요소로써 긴 실린더를 해석할 수 있게 하였다.

이상의 연구에서 길이 방향으로 같은 평면을 가진 긴 실린더뿐만 아니라 단위 실린더가 모여 형성된 비축대칭 반복적 구조의 실린더의 경우에도 적용이 가능한 요소들을 제안하고 몇 가지의 예로써 이 요소들의 타당성을 확인하였다.

## 후 기

본 연구는 BK21사업의 과학기술분야 대학원 육성사업과 한국원자력연구소의 위탁과제사업에 의하여 지원되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

## 참 고 문 헌

- 김정운, 권영두 (1991). "특이경계조건을 갖는 보의 동적 비선형 해석", 대한기계학회논문집, 제15권, 제3호, pp 799-808.
- 김진환 (1999). "고차 요소의 선택적 사용에 대한 연구", 한국해양공학회지, 제13권, 제4호, pp 1-9.
- 윤태혁, 권영두 (1998). "3차원 8절점 비적합 고체요소에 의한 복합재판의 순수굽힘문제의 정적-동적해석", 한국해양공학회지, 제12권, 제2호, pp 1-21.
- Anthoine, A. (1997). "Homogenization of Periodic Masonry: Plane Stress, Generalized Plane Strain or 3D Modeling" COMMON NUMER. METH. EN. 13, pp 319-326
- Bathe, K.J. (1996). Finite Element Procedures, Prentice-Hall Inc.
- Chandrupatla, T.R. and Belegundu, A.D. (1997). Introduction to Finite elements in Engineering, 2nd, Prantice-Hall inc..
- Cheung, Y.K., Zhang, Y.X., and Chen, W.J. (2000). "A Refined Nonconforming Plane Quadrilateral Element", Computers and Structures, Vol 78, pp 699-709.
- Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. (1996). ABAQUS/Standard User's Manual Vol. II, Version 5.6
- Hill, R. (1950). The Mechanical Theory of Plasticity, Oxford University Press.
- Hu, S.F. and Pagano, N.J. (1997). "On the Use of a Plane-Strain Model to Solve Generalized Plane-Strain Problems" J. Appl. Mech., ASME Transaction, Vol 64, No 1, pp 236-237.
- Japan Atomic Energy Research Institute (1997). Light Water Reactor Fuel Analysis Code FEMAXI-IV.
- Nakamura, S. (1993). Applied Numerical Methods in C, International edition, Prentice-Hall Inc.
- NISA II User's Manual Version 7.0 For Windows NT/95 (1988-1997). Engineering Mechanics Research Corporation.
- Radiation Shielding Information Center (1996). RSIC Peripheral Shielding Routine Collection-FRANCO (Finite Element Fuel Rod Analysis Code System).
- Reismann, H. and Pawlik, P.S. (1980). Elasticity Theory and Applications, John Wiley & Sons, Inc.
- Sherief, H.H. and Anwar, M.N. (1994). "Two-Dimensional Generalized Thermoelasticity Problem for an Infinitely Long Cylinder", Journal of Thermal Stresses, Vol 17, Issue 2, pp 213.
- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (1987). Theory of Elasticity, 3rd, McGraw-Hill Co.

---

2003년 6월 9일 원고 접수

2003년 9월 25일 수정본 채택