

미국 NCTM의 Principles and Standards for School Mathematics에 나타난 수학과 교수·학습의 이론

최 영 한 (한국과학기술원)

김 미 월 (한국수학교육학회)

미국의 “전국 수학 교사 협의회” (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)는 1989년부터 <학교 수학의 교육과정과 평가 기준> (1989), <수학 가르침(교수)의 전문성 기준> (1991), <학교 수학의 평가(시험) 기준> (NCTM, 1995), <학교 수학의 원리와 기준> (2000)을 출판하여 미국의 수학 교육의 전망(목표, 나아갈 길)과 기준(실행 지침)을 제시하였다.

수학 교사들로 구성된 미국의 NCTM은 학생, 학부모, 학교 행정가 등 많은 사람들과 힘을 합하여 모든 학생들에게 수준 높은 수학 교육을 받을 수 있는 여건(환경, 기회)을 조성하는 데 중심점의 역할을 하였다. 한편 많은 관련 단체들은 여러 배경과 능력을 가진 학생들이 전문성을 지닌 교사(특수 교사를 일컫는 말이 아니다. 수학 교과를 이해하고 수학의 전문성과 특수성을 가르칠 수 있는 일반 교사를 일컫는 말이다.)로부터 미래를 대비해 평등하고, 진취적이며, 지원이 잘 이루어지고, 공학 도구(IT)가 잘 갖춰진 환경에서 중요한 수학적 아이디어를 이해하면서 학습할 수 있는 수학 교실(미국에서는 우리나라처럼 수학 교사가 수학 시간에 학생의 방(교실: Homeroom)에 찾아가지 않고 학생들이 선생의 방(수학 교실: Classroom)을 찾아온다. 전형적인 수학 교실의 사진은 2쪽에 나와 있다.)을 만들기 위해 함께 힘썼다. NCTM에서 출간한 여러 기준들은 우리나라의 제 6 차와 제 7 차 교육과정에도 큰 영향을 미쳤다.

이 글에서는 NCTM (2000)에서 제시한 학습 원리를 간단히 살펴본 다음 이를 중심으로 현재 미국 수학 교육의 교수·학습 이론의 동향을 살펴본다.

0. 들어가면서

<학교 수학의 원리와 기준> (NCTM, 2000)은 학교 수학에 대한 기대(목표), 학교 수학의 원리, Pre K~12 (학령 전부터 고3까지)에 대한 상세한 기준, 기대(목표)를 성취하기 위한 노력 등 네 가지 부분으로 나누어 졌다. 학교 수학의 내용이나 특징에 대하여 교사, 학교 경영자, 다른 교육 전문가가 내리는 결정을 뒷받침하는 전문적인 지침을 제공하기 위한 것이다. “원리”에는 수학 교육이 지닌 수준 높은 특징을 기술하고, “기준”에는 학생들이 배워야 하는 수학의 내용과 과정을 기술하였다.

I. 학교 수학의 전망 (목표)

NCTM (2000)은 학교 수학의 기대(전망)를 의욕적으로 기술하고 있다. 이 기대를 이루려면

- ① 건실한 수학 교육과정,
- ② 수업과 평가를 통합할 수 있는 능력 있고 지식이 풍부한 교사,
- ③ 학습을 뒷받침하고 강화시키는 교육 정책,
- ④ 공학시설이 잘 갖춰진 교실, 그리고
- ⑤ 평등과 수월성을 보장하는 방침

이 필요하다.

이러한 도전은 엄청나지만, 도전에 응할 필요가 있다. 학생들은 끊임없이 변화하는 세계 속에서 학생 각자의 야망과 직업적 기대(목표)를 이룰 수 있게 하는 가능한 최고 수준의 수학 교육을 받을 필요가 있고 그럴 가치가 있다.

II. 학습 원리

NCTM에서 제시한 학습 원리는 다음 여섯 가지이다.

평등: 수학교육에서 수월성은 평등을 요구한다.--또 평등은 모든 학생들에게 높은 기대와 가치 있는 뒷받침(기회)을 요구한다. 평등은 모든 학생들이 똑같은 수업을 받아야 한다는 것을 뜻하는 것이 아니라, 모든 학생들이 적성, 능력 등에 따라 수학을 배울 수 있도록 적절한 조절을 취하고 개인 차를 수용함을 뜻한다.

교육과정: 교육과정은 활동 지침을 모아 놓은 것보다 많은 것을 포함한다.--모든 학년에 걸쳐서 일관성이 있어야 하며, 중요한 수학에 초점을 두고, 명료하게 기술되어야 한다. 교육과정의 일관성은 학급(교실) 수준에서도 중요하다.

가르침(교수): 효과적인 수학 가르침(교수)를 위해서는 수학의 내용도 잘 알고 이해하여야 하며, 학습자로서의 학생들에 대해서도 잘 알고 이해하여야 한다. 또 교육 방법(pedagogical strategy)에 대해서도 잘 알고 이해하여야 한다.--수업을 계획할 때 교사는 기본적인 아이디어들이 잘 통합되도록 계획을 짜야 한다.1) 다양한 상황에 대처할 수 있도록 크다란 아이디어는 그 과정에서 나오는 용어와 정의, 기호, 개념, 기능과 같은 중요한 요소들을 주의 깊게 설정하고 여러 단원과 학년

1) TIMSS (Third International Mathematics and Science Study)의 일환으로 비디오 분석을 통한 8학년 수학교실의 수업을 연구하였던 바 수업 진행에서의 한 가지 중요한 특징이 수학의 내적 일관성과 관련되었다 (Stigler & Hiebert, 1999). 전형적인 일본의 수업은 하나의 중심 아이디어를 바탕으로 계획되었을 뿐만 아니라 매우 조심스럽게 진행되고 전개되었다. 반면에 전형적인 미국의 수업은 밀접하게 관련되지도 않은 몇 가지 아이디어와 주제들이 포함되어 있어 전체의 연결이 매끄럽지 않았다.

에 걸쳐 일관성 있게 학습 내용을 배열하는 것은 작전(교육 계획)의 기본적인 일이다. 또한 교사들은 수업에서 예기치 않았던 방향의 전환을 잘 조정하고, 기회를 잘 포착하여 이용하여야 한다.

학습: 학생들은 경험과 사전 지식으로부터 새로운 지식을 능동적으로 구성함으로써 이해를 수반하는 수학 학습을 해야 한다.--학습의 원리는 학생들이 경험과 사전 지식으로부터 새로운 지식을 능동적으로 구성함으로써 이해를 수반하는 수학 학습을 해야 한다.

평가: 학생을 대상으로 평가하여서는 안되며 학생을 위하여 평가하여야 한다.--평가는 수학의 학습을 뒷받침해야 하며, 교사와 학생 모두에게 유용한 정보를 제공해야 한다.

공학(Technology): 공학(Electronic Technology)은 수학의 이해에 큰 영향을 미치며 특별히 만들어진 공학은 학생들의 수학에 대한 도전에 큰 촉매가 된다.--공학은 수학 교수·학습의 필수이다. 그러나 공학이 수학의 이해나 직관의 대체로 사용되어서는 안 된다.

NCTM (2000)에서 제시한 학교 수학의 기대(목표)는 학생들이 수학을 이해하면서 배워야 한다는 것에 두고 있다. 불행하게도 그동안 수학을 이해하지 못한 채 학습하는 것이 학교 수학 교육의 공통된 모습이었다.

<표 1> 수학의 내용 영역에서의 기대(목표)

수와 연산	<ol style="list-style-type: none"> ① 수, 수 표현 방법, 수들 사이의 관계, 수 체계를 이해해야 한다. ② 연산의 의미와 연산 사이의 관계를 이해해야 한다. ③ 유창하게 계산할 수 있고 추론적인 어렵셈을 할 수 있어야 한다.
대 수	<ol style="list-style-type: none"> ① 패턴, 관계, 함수를 이해해야 한다. ② 대수적 기호를 이용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석해야 한다. ③ 수학적 모델을 이용하여 양의 관계를 표현하고 이해해야 한다. ④ 다양한 상황에서의 변화를 분석해야 한다.
기 하	<ol style="list-style-type: none"> ① 2차원, 3차원 기하적 도형의 특징과 성질을 분석하고, 기하적인 관계들에 관하여 수학적인 토론을 전개하여야 한다. ② 좌표기하와 다른 표현 체계를 이용하여 위치를 지정하고 공간 관계를 설명하여야 한다. ③ 변형을 응용하고 대칭을 이용하여 수학적인 상황을 분석하여야 한다. ④ 시각화, 공간 추론, 기하 모델을 이용하여 문제를 해결하여야 한다.
측 정	<ol style="list-style-type: none"> ① 도형의 측정 가능한 속성, 단위, 체계, 과정을 이해해야 한다. ② 적절한 기술공학, 도구, 공식을 적용하여 측량하여야 한다.
자료 분석과 확률	<ol style="list-style-type: none"> ① 자료로 나타내어질 수 있는 문제를 만들고, 이 문제를 해결하기 위하여 관련 자료를 수집, 구성, 나타내어야 한다. ② 적절한 통계적 방법을 선택하고 사용하여 자료를 분석하여야 한다. ③ 자료에 근거하여 추론과 예측을 하고 평가하여야 한다. ④ 확률의 기본 개념들을 이해하고 적용하여야 한다.

<표 2> 수학의 활동 과정에서의 기대(목표)

문제 해결	<ul style="list-style-type: none"> ① 문제 해결을 통하여 새로운 수학 지식을 획득하여야 한다. ② 수학 또는 다른 상황에서 일어난 문제를 해결하여야 한다. ③ 다양하고 적절한 전략을 적용하고 응용하여 문제를 해결하여야 한다. ④ 수학적 문제 해결 과정을 모니터하고 반성하여야 한다.
추론과 증명	<ul style="list-style-type: none"> ① 추론과 증명이 수학의 기본적인 측면임을 인식하여야 한다. ② 수학적 추측을 하고 탐구하여야 한다. ③ 수학적 토론과 증명을 진행하고 평가하여야 한다. ④ 다양한 추론의 형태와 증명 방법을 선택하고 사용하여야 한다.
의사 소통	<ul style="list-style-type: none"> ① 학생들은 의사소통을 통하여 자신의 수학적 사고를 조직하고 통합하여야 한다. ② 학생들은 자신의 수학적 사고를 동료, 교사 그리고 다른 사람들에 일관성 있게 그리고 명확하게 전달하여야 한다. ③ 수학적 사고와 다른 학생들의 전략을 분석하고 평가하여야 한다. ④ 수학 언어를 사용하여 수학적인 생각을 정확하게 표현하여야 한다.
연결성	<ul style="list-style-type: none"> ① 수학 개념들 사이의 연결성을 인식하고 사용하여야 한다. ② 수학 개념들 사이의 내적 연결성과 상호 의존성을 이해하여 하나의 밀착된 체계를 구성하여야 한다. ③ 수학 밖 상황에서 수학을 인식하고 적용하여야 한다.
표현	<ul style="list-style-type: none"> ① 표현들을 창조하고 이용하여 수학적 아이디어를 조직하고, 기록하고, 의사소통 하여야 한다. ② 수학적 표현들을 선택하고, 적용하고, 상호 변형시켜 문제를 해결하여야 한다. ③ 표현을 이용하여 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델링하고 해석하여야 한다.

미국의 수학 교육에서 이해가 결여된 학습은 적어도 1930년대 이래로 계속된 문제였는데, 이것은 많은 심리학자와 교육학자들이 오랫동안 연구하고 토론하던 주제였다 (Brownell, 1947; Skemp, 1976; Hiebert & Carpenter, 1992). 이제 모든 학생들이 그들이 배운 수학을 이해하고 적용할 수 있어야 한다.

IV. 기준

NCTM (2000)은 수와 연산, 대수, 기하, 측정, 자료 분석과 확률의 다섯 가지의 수학의 내용 영역에서의 기대(목표)를 제시(표 1 참조)하였고, 이와 함께 문제 해결, 추론과 증명, 의사 소통, 연결성, 표현의 다섯 가지의 수학의 활동 과정(영역)에 대한 기대(목표)를 제시하였다(표 2 참조).

아래에 중등학교 단계를 위한 구체적인 기준을 살펴보자.

1. 중학교(6-8 단계)를 위한 기준

가. 수와 연산

- (1) 분수, 소수, 백분율을 문제 해결에 유연하게 다루어라. 분수, 소수, 백분율을 능률적으로 비교, 배열하고 수직선 위에서 이들의 근사 위치를 찾아라. 100보다 더 큰 그리고 1보다 더 작은 백분율의 의미를 획득시킨다. 양의 관계를 표현하기 위해 비와 비율을 이해하고 사용하라. 큰 수의 이해를 발전시키고 지수, 유효숫자, 계산기 표기법을 인지하고 적절하게 사용하라. 인수, 배수, 소인수분해, 서로소인 수를 문제 해결에 사용하라. 정수의 의미를 획득하고, 정수를 이용하여 양을 표현하고 비교하라.
- (2) 분수, 소수, 정수의 산술 연산의 의미와 효율성을 이해해라. 정수, 분수, 소수를 간단하게 계산하기 위해 덧셈과 곱셈 결합, 교환법칙과 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 사용하라. 문제를 간단하게 해결하고 계산하기 위해 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈, 제곱근 찾기와 제곱근 사이의 역관계를 이해하고 사용하라.
- (3) 분수와 소수 계산을 위해 암산, 어림셈, 계산기 또는 컴퓨터, 지필 중에서 상황에 적절한 방법과 도구를 선택하고, 적용하라. 분수, 소수, 정수를 계산하는 알고리즘들을 발전시키고 분석하고 이들을 능숙하게 사용하라. 유리수 계산의 결과를 추정하기 위한 전략들을 발전시키고 사용하고 그 결과의 합리성을 판단하라. 비율과 관련된 문제들을 해결하기 위해 비율의 축소와 등적 비를 찾는 방법들을 발견하고, 이를 분석하고 설명하라.

나. 대수

- (1) 표, 그래프, 말, 그리고 가능하면 기호의 규칙을 이용하여 패턴을 표현, 분석, 일반화하라. 한 관계에 대한 다양한 표현의 형태를 관련시키고 비교하라. 선형 또는 비선형 함수를 확인하고, 표, 그래프, 또는 방정식으로부터 그들의 특성을 대조하라.
- (2) 다양한 변수 사용에 관한 초기의 개념적 이해를 발달시키어라. 기호 표현과 직선 그래프사이 관계를 탐구하고, 절편과 기울기 의미에 특별히 주목하라. 상황을 표현하고 문제를 해결하기 위하여 기호적 대수 방법, 특히 선형 관계와 관련된 방법을 사용하라. 간단한 대수적 표현을 위한 등치 형태를 인식하고 만들기 그리고 선형방정식을 풀어라.
- (3) 그래프, 표, 방정식과 같은 다양한 표현들을 이용하여 현실 문제들을 모델링하고 해결하라.
- (4) 선형 관계에 나타난 양의 변화 특징을 그래프를 이용하여 분석하라.

다. 기하

- (1) 2차원, 3차원 물체들 사이의 관계를 이들에 대한 정의된 성질을 이용하여 정확하게 기술하고, 분

류하고, 이해하라. 비슷한 물체의 각, 변의 길이, 둘레의 길이, 면적, 부피 사이의 관계를 이해하라. 합동, 닮음, 피타고라스 관계와 같은 기하 개념과 관계에 대해 연역적이고 귀납적인 토론을 진행하고 비평하라.

- (2) 좌표기하를 사용하여 기하적 모양의 성질을 표현하고 검토하라. 좌표기하를 사용하여 정다각형, 두 변이 평행 또는 수직인 다각형과 같은 특수한 기하적 도형을 조사하라.
- (3) 뒤집기(반전), 회전, 이동, 축소와 같은 비선형 변형에서 도형의 크기, 위치, 방향을 설명하라. 변형을 사용하여 도형의 합동, 닮음, 선대칭 또는 점대칭을 조사하라.
- (4) 변의 길이나 각도와 같은 기술된 성질을 가진 기하적 도형을 그리어라. 3차원 도형의 2차원적인 표현을 사용하여 표면적과 부피와 관련된 문제를 시각화하고 풀어라. 네트워크와 같은 시각적 도구를 사용하여 문제를 표현하고 풀어라. 도형 모델을 사용하여 수치적, 대수적 관계를 표현하고 해석하라. 예술, 과학, 일상 생활과 같은 수학 교실 밖 영역에서 기하적인 사고와 관계를 인지하고 적용하라.

라. 측정

- (1) 미터법과 습관적인 측정체계 모두를 이해하라. 측정 단위들 사이의 관계를 이해하고 똑같은 측정 체계 내에서 한 단위를 다른 단위로 바꾸어라. 각도, 둘레 길이, 면적, 표면적, 부피를 측정하기 위해 적절한 크기와 형태의 측정 단위를 이해, 선택, 사용하라.
- (2) 공통 기준을 사용하여 어렵셈에 적합한 방법을 선택하라. 기술공학과 도구를 선택 적용하여 길이, 면적, 부피, 각도를 정확하게 찾아내어라. 공식을 개발하고 사용하여 원주의 길이, 삼각형의 면적, 평행사변형의 면적, 사다리꼴의 면적, 원의 면적을 구하라. 그리고 보다 복잡한 도형의 면적을 구하기 위한 전략을 개발하라. 각기둥, 각뿔, 원기둥의 표면적과 부피를 구하기 위한 전략을 개발하라. 비와 비율을 이용하여 비례상수와 관련된 문제를 해결하라. 비례와 관련된 간단한 문제를 해결하고, 속도 그리고 농도와 같은 속성을 위한 측정을 끌어내어라.

마. 자료 분석과 확률

- (1) 두 개의 모집단이 지닌 한 특징 또는 한 개의 모집단이 지닌 특징에 관한 문제를 만들고, 연구를 설계하고, 자료를 수집하라. 히스토그램, Box그림, 산포도를 포함하는 자료에 대한 적절한 그래프 표현을 선별, 작성, 사용하라.
- (2) 평균과 사분위수 범위를 포함하는 중심과 분포의 측정을 찾고, 사용하고 해석하라. 그래프 표현, 특히 히스토그램, 줄기-잎 그림, Box그림, 산포도 등과 자료들 사이의 대응관계를 이해하고 토론하라.
- (3) 모집단으로부터 선택한 두 개 또는 세 개의 표본들 사이의 차이점에 대한 관찰 결과를 이용하여 모집단을 추측하라. 자료의 산포도와 근사 직선에 기초하여 한 표본의 두 가지 특성 사이의 가능

한 관계를 추측하라. 추측을 이용하여 새로운 문제를 만들고, 그 문제를 해결하기 위한 새로운 연구 방법을 설계하라.

- (4) 적절한 용어를 이해하고 사용하여 여사건과 배반사건을 설명하라. 비례와 확률의 기본 개념을 사용하여 실험과 시뮬레이션의 결과를 추측하고 테스트하라. 체계화된 목록, 나무 다이어그램(Tree Diagram), 면적 모형(Area Model)과 같은 방법을 사용하여, 단순 복합 사건의 확률을 계산하라.

바. 문제 해결

6-8 학년에서 문제 해결은 수학 학습을 촉진시킨다. 다른 상황에 수학을 응용할 수 있는 문제를 해결함으로써 학생들은 수학적 개념을 배울 수 있을 뿐만 아니라, 이해도 깊게 할 수 있다. 그리고 유리수, 기하, 통계, 확률 등 주제들을 통합한 좀 더 복잡한 문제들을 해결함으로써 학생들은 수학적 능력을 향상할 수 있다. 교사는 주요한 수학적 개념에 대한 학생들의 깊은 이해를 돕는 문제들을 선택해야 한다. 그리고 학생들이 이러한 문제에 대해 능히 답할 수 있으며 흥미를 가져야 한다.

사. 추론과 증명

중학교에서 학생들은 종종 규칙성을 발견하기 위해 패턴을 조사하고, 구성하는 것, 관찰된 규칙성을 일반화하고 추측하는 것, 추측 결과를 평가하는 것, 수학적 토론을 진행하고 평가하는 등 활동을 통하여 추론과 증명을 경험하게 된다.

추론과 증명을 개발하기 위한 교사의 역할은 무엇인가? 중학교에서 교사들은 학생들로 하여 사고와 추론 활동에 적극적으로 참여하게 함으로써 학생들이 수학적 추론의 힘을 인식하고 이용하게 할 수 있게 한다. 학생들의 수학적 추론 능력을 개발하기 위하여 교사는 풍부한 수학적 사고를 조성하는 환경을 만들어 주어야 한다. 그리고 교사는 수학적 추론을 이용하여 수학적 관계를 연구할 수 있는 동시에 중학생들에게 흥미 있는 적당한 과제를 선택하고 만들어 주는 중요한 역할을 수행해야 한다. 교사는 또한 학생들의 추론 능력을 개발하는 조력자이다. 많은 초등학교 및 중학교의 과제는 귀납적 추론에 의지하고 있기 때문에 교사는 학생들로 하여금 귀납적 추론의 가능성은 물론 한계성도 있음을 알게 해야 한다.

아. 의사소통

의사소통을 활발하게 하기 위하여 교사는 수학 교실에서 학생들이 자유롭게 자신의 생각을 발표할 수 있는 교실 문화를 생성해 주어야 한다. 그리고 기능과 좋은 판단은 요구하는 수업 중의 토의를 통하여 학생들의 수학 학습을 촉진시킨다. 6-8 학년에서도 그룹 학습은 의사소통을 활발히 할 수 있는 효과적인 방법이 될 수 있다.

자. 연결성

연결성이 없으면 학생들은 독립적인 개념들과 기능들을 배우고, 기억할 수밖에 없다. 학생들이 이러한 연결성을 갖도록 하기 위하여 교사는 교육과정 내에 있는 주제와 수학적 개념들을 연결짓게 하는 문제들을 선택하여야 한다.

차. 표현

6-8 학년 학생들은 상대적으로 범위가 크고, 자극적이며, 모델링을 포함하는 의미 있는 문제들을 해결할 수 있는 기회가 있어야 한다.

2. 고등학교(9-12 단계)를 위한 기준

이 단계의 학생들을 위한 기준은 아래와 같다.

가. 수와 연산

- (1) 아주 큰 수와 아주 작은 수 그리고 이 수들의 다양한 표현에 대한 깊은 이해를 개발하라. 유리수와 실수를 포함한 수의 성질과 수 체계를 비교하고 대조하고, 실수 해를 갖지 않는 이차 방정식의 해인 복소수를 이해하라. 벡터와 행렬을 실수 체계의 몇 가지 성질을 가지는 체계로 이해하라. 수론(數論)의 논증을 이용하여 자연수와 관련된 관계를 정당화하라.
- (2) 곱셈, 나눗셈과 같은 계산 효과를 판단하고, 양에 대한 멱과 근을 계산하라. 벡터와 행렬의 덧셈과 곱셈의 성질, 표현에 대한 이해를 발달시키어라. 세기(카운팅) 기술로서 순열과 조합에 대한 이해를 발달시키어라.
- (3) 실수, 벡터, 행렬 계산을 유창하게 하고, 암산 또는 지필 계산을 이용하여 간단한 문제를 해결하고, 보다 복잡한 문제는 기술 공학을 이용하라. 수치 계산과 그 결과의 합리성을 판단하라.

나. 대수

- (1) 명확하게 정의된 함수와 재귀적으로 정의된 함수를 사용하여 패턴을 일반화하라. 관계와 함수를 이해하고, 이들 사이를 융통성 있게 선택하고 변환하고, 다양한 표현을 사용하라. 변화율, 절편, 영값(x 절편), 접근선, 국소적 그리고 전면적인 움직임을 탐구하여 일 변수 함수를 분석하라. 일상적으로 사용되는 함수에 대한 산술적인 조합, 합성, 전환과 같은 변환을 이해하고 실행하라. 기술 공학을 사용하여 좀더 복잡한 기호 식에서 이러한 연산을 수행하라. 지수 함수, 다항 함수, 유리

함수, 로그 함수, 주기 함수를 포함한 여러 함수들의 성질을 이해하고 분석하라. 이번 함수의 표현을 해석하라.

- (2) 식, 방정식, 부등식, 관계 등의 동일한 형태의 의미를 이해하라. 식, 방정식, 부등식, 연립방정식의 동일한 형태를 쓰고, 간단한 문제는 암산이나 지필(紙筆)을 사용하고, 모든 문제는 공학을 이용하여 깔끔하게 해결하라. 기호적 대수를 사용하여 수학적 관계를 표현하고 설명하라. 함수와 관계에 대하여 재귀적, 매개 방정식을 포함하는 다양한 상징적 표현을 사용하라. 공학의 사용을 포함하여 조작의 결과에 대한 의미, 유용성, 적합성을 판단하라.
- (3) 한 상황에서 기본적인 양적 관계를 인식하고, 이러한 관계를 모델링할 수 있는 함수 또는 함수류를 결정하라. 반복적이고 재귀적인 형태를 포함하는 상징적 표현을 이용하여 다양한 상황에서 일어난 관계들을 표현하라. 모델링된 상황에 대한 적합한 결론을 찾아라.
- (4) 그래프, 수치적 자료로부터 변화율을 해석하고 어렵하라.

다. 기하

- (1) 2차원, 3차원 도형의 성질을 분석하고, 특징을 결정하라. 2차원, 3차원 도형 중에서 관계(합동과 닮음을 포함)를 탐구하고, 이 관계들에 대하여 추측을 하고 검증하라. 이 관계들을 이용하여 문제를 해결하라. 연역법을 사용하여 도형 추측의 타당성을 설정하고, 이론을 증명하고, 다른 사람들의 과정과 결론을 평가하라. 삼각 관계를 이용하여 길이와 각을 측정하라.
- (2) 직교 좌표, 항해 좌표, 극 좌표, 또는 구면 좌표와 같은 좌표계를 사용하여 기하적인 상황을 분석하라. 직교 좌표에서 나타난 2차원, 3차원 도형을 추측하고, 이와 관련된 문제를 해결하라.
- (3) 스케치, 좌표, 벡터, 함수 용어, 행렬을 사용하여 도형의 평행이동, 반사, 회전, 팽창을 이해하고 나타내어라. 다양한 표현들을 이용하여 간단한 변환과 합성의 결과에 대한 이해를 도와라.
- (4) 다양한 도구를 이용하여 2차원, 3차원 도형의 표현을 그리고 만들어라. 다양한 관점에서 3차원 도형을 시각화하고, 교차 부분들을 분석하라. 꼭지점-변 그래프를 이용하여 문제를 모델링하고 해결하라. 기하 모델을 이용하여 수학의 다른 영역에 대한 통찰을 얻고, 그 영역의 문제를 해결하라. 기하 개념을 이용하여 예술, 건축과 같은 다른 영역과 학문의 문제를 해결하고, 이 영역과 학문에 대한 통찰을 얻어라.

라. 측정

- (1) 측정을 포함한 문제 상황에 적절한 측정 단위와 범위를 결정하라.
- (2) 측정 상황에서 정밀도, 정확도, 근사 값에 일어난 오차를 결정하라. 원추, 구, 원기둥을 포함한 기하적 도형의 면적, 표면적, 부피의 공식을 이해하고 사용하라. 측정 상황에서 측차 근사법, 상계와

하계, 극한 등에 관한 비형식적 개념을 적용하라. 단위 분석을 이용하여 측정 계산을 점검하라.

마. 자료 분석과 확률

- (1) 각종 연구들 사이의 차이점을 이해하고, 어떤 형식의 추론이 각 형태를 유도하는데 적합한지를 이해하라. 조사의 랜덤성과 실험 연구를 포함하는 잘 조직된 연구의 특징들을 알아라. 측정 자료와 범주 자료, 한 변수와 두 변수 자료, 가변 항 등의 의미를 이해하라. 히스토그램, 상자 그림, 산포도를 이해하고, 이것들을 사용하여 자료를 나타내어라. 기본적인 통계량을 계산하고, 통계량과 모수(母數)의 차이를 이해하라.
- (2) 한 변수 측정 자료에 관한 분포를 나타내고, 이 분포 형태를 설명하고, 총괄 통계량을 선정하고 계산하라. 두 변수 측도 자료에 관한 산포도를 나타내고, 기술공학을 이용하여 이 산포도의 형태를 설명하고, 회귀 계수, 회귀 방정식, 상관 계수를 결정하라. 적어도 한 변수는 범주 변수인 두 변수 자료를 제시하고 토론하라. 한 변수 자료의 선형 변환이 그 자료의 형태, 중심, 분산에 미치는 영향을 인식하라. 두 변수 자료의 성향을 확인하고, 그 자료를 모델링하는 함수를 찾던지 그 자료를 모델화할 수 있도록 변환하라.
- (3) 시뮬레이션을 이용하여 잘 알려진 모집단으로부터 표본 통계량의 가변성을 탐구하고, 표본 분포를 구성하라. 표본 통계량이 모집단의 모수 값을 어떻게 반영하는지를 이해하고, 비형식적 추론의 기초로 표본 분포를 사용하라. 연구 설계, 자료 분석의 적합성, 결론의 타당성을 검토함으로써 자료에 근거를 둔 출간된 보고서들을 평가하라. 기본적인 통계 기술이 현장(Workplace)의 과정(특징)을 모니터링하는 데 어떻게 사용되는지를 이해하라.
- (4) 표본 공간과 확률 분포 개념을 이해하고, 간단한 경우의 표본 공간과 분포를 구성하라. 시뮬레이션을 사용하여 실험적 확률 분포를 구성하라. 간단한 경우에서 랜덤 변수들의 기대값을 계산하고 해석하라. 조건부 확률과 독립 사건의 개념을 이해하라. 복합 사건의 확률을 계산하는 방법을 이해하라.

바. 문제 해결

학교, 사회, 인생에서 새로운 모험에 직면할 때, 학생들은 자신이 알고 있는 수학 지식을 적절하게 융통성 있게 사용할 수 있는 것이 문제 해결의 핵심이다. 고등학교 학생들은 복잡한 방법을 사용할 수 있는 능력을 가지고 있을 뿐만 아니라, 자신들의 지식을 반성할 수 있는 능력도 가지고 있다. 따라서, 새로운 모험을 다루는 지식, 전략, 경험은 고등학교 때부터 갖게 된다. 고등학교 교육과정에서 문제 해결은 두 가지 역할을 하게 된다. 한 편으로, 전략적으로 선택되고 자세하게 계열화된 문제 해결은 수학 내용을 학습하기 위한 기본적인 도구이다. 대부분의 수학적 아이디어 또는 일반화는 문제 상황에서 효과적으로 소개될 수 있으며, 그러한 문제 상황은 학생들을 도와 아이디어의 중요한 측면을 일반화시킬 수 있다. 다른 한 편으로, 다른 한편으로는 고등학교 수학의 주요 기대(목표)는 학생들이 학습했던 것에 바

탕을 두어, 문제를 형식화하고 접근하고 해결하는 지식과 도구들을 갖추는 것이다. 고등학교 학생들은 문제 해결 전략 또는 찾는 방법을 개발할 수 있는 기회를 가져야 한다. 그리고 실제 상황 속의 문제들은 잘 정돈된 형태로 나타내어 문제들을 형식화하고 정렬할 수 있는 기회도 가져야 한다.

문제 해결 능력을 개발하는데 있어서 교사의 역할은 무엇인가? 문제 해결은 수학의 핵심이다. 성공적인 문제 해결을 위해서는 수학적 내용에 관한 지식, 문제 해결 전략들에 관한 지식, 효율적인 자기 조절, 그리고 문제를 설정하고 해결하고자 하는 성향이 필요하다. 학생들에게 이런 지식과 태도를 강화시키기 위해서는 교사들이 훨씬 더 많은 것이 필요하다. 교사는 학생들이 중요한 수학 내용은 물론, 태도도 함께 습득할 수 있는, 그리고 문제 해결 능력도 개발할 수 있는 문제들을 계획적으로 제공하여야 한다. 학생들이 새로운 아이디어를 생성할 때, 교사는 그 중에서 어떤 것을 추구해야하는지를 결정하는 연습을 해야 하며, 학생들의 생산적인 학습과 진보된 태도의 잠재성을 인식해야만 한다. 그러나, 모든 반응들이 풍요로운 토의를 이끌어 내는 것은 아니며, 시간의 제약으로 인해 모든 학생들이 흥미로운 아이디어들을 추구해 보도록 허락할 수 없음도 알아야만 한다. 학생들이 문제 해결에 몰두하면서 자신들의 아이디어를 반성할 수 있는 교실 환경을 창조하기 위해서 교사들이 반성적이어야 한다. 효과적인 문제 해결 교사는 효과적인 문제 해결자로서의 지식과 성향을 반드시 가지고 있어야 한다.

사. 추론과 증명

교육과정에서 추론과 증명은 특별한 시간에 또는 특별한 주제를 다루는 특별한 활동이 아니라, 학습 주제가 무엇이든 상관없이 자연스럽게 지속적인 교실 토의의 일부분이다. 수학적으로 생산적인 교실 환경에서 학생들은 자신들의 결론을 설명하고 정당화할 수 있을 것이다. 수학 교실에서 “너는 지금 무엇을 하고 있니?” 또는 “왜 그렇게 생각하니?”와 같은 질문이 하나의 규범으로 생성된다면, 학생들은 자신들의 생각을 명료화할 수 있으며, 상황을 탐구하고 생각하는 새로운 방법을 학습할 수 있을 것이며, 질 높은 수학적 추론을 위한 기준들을 발달시킬 수 있다.

고등학생들의 추론과 증명 능력을 발달시키는데 교사의 작용은 무엇인가? 학생들의 생산적으로 사고하고 추론하는 습관을 발달시키기 위해, 교사 자신들은 수학을 잘 이해해야 한다. 수학 교사들은 자신들이 창조한 교실 문화를 통해 학생들에게 수학적 패턴과 사실에 대한 추론의 중요함을 전달하게 된다. 제시된 해석의 타당성을 평가하기 위해 교사는 학생들에게 자기 자신뿐만 아니라 다른 학생들의 수학적 토론에 대해 의문을 제기할 수 있는 추론 능력을 갖추고 있음을 확신시켜야 한다. 따라서 학생들은 수학적 토론의 건전성을 결정하기 위해서는 외부의 권위에 보다 논리에 더 의존하게 된다.

고등학교의 수학 교사들은 학생들이 서로 토론하고, 질문하고, 경청하는 교실 분위기를 만들도록 노력해야 한다. 교사는 학생들이 서로의 해석을 탐구하고, 구성하고, 비판할 수 있는 있음을 받아들여 탐구적인 학습 공동체를 구성해야 한다. 그리고 교사는 학생들이 그들의 생각을 논리적으로 나타낼 수 있도록 도와주어야 하며, 제안한 아이디어가 문제가 있을 때 아이디어 자체가 문제 있는 것이지 그 아이디어를 제안한 학생에게 문제가 있는 것이 아님을 명백히 해야 한다. 교사는 학생들은 자신의 논의를

발달시키고 방어하는 권리와 책임감을 동시에 가져야 함을 알게 해야 한다. 따라서 교사는 추론과 증명을 이끌 수 있는 교실의 규범과 문화를 이끌어 내야 한다.

아. 의사 소통

미래를 준비하기 위해 고등학교 학생들은 다른 사람들과 수학적 아이디어를 효과적으로 교환할 수 있어야 한다. 학교 수학에서 수학적 의사 소통을 강조함으로써 학생들 서로간에 아이디어를 교환하고 반성할 수 있는 기회를 제공하게 된다. 의사소통은 수학 학습의 기본적인 요소이다. 고등학교 학생들의 의사소통은 저학년에서 진행되는 말하기와 쓰기와 같은 의사소통 성향보다 훨씬 높은 차원에서 이루어지게 된다. 고등학교 학생들은 교사, 동료 그리고 수학자들이 논리적으로 옳다고 생각할 수 있는 설명을 생성하고, 질문을 던지고, 논제를 쓸 수 있다. 그리고 고등학교 학생들은 기하 도형, 자연 언어, 또는 대수적 기호를 이용하여 자신의 요점을 정리할 때, 수학적 언어와 기호들을 정확하게 그리고 적절하게 사용 가능하다.

학생들의 의사소통 능력을 발달하는데 교사는 어떤 작용을 해야 하는가? 고등학교 교사들은 학생들을 도와 구두 의사 소통을 통하여 수학을 학습하고 공유하게 해야 한다. 이렇게 하기 위해 교사는 학생들이 안정된 분위기 속에서 과감히 논의하고, 추측하고, 설명 할 수 있는 교실 분위기를 조성해 주어야 한다. 이러한 분위기를 유지하기 위해서 교사는 수학을 잘 알아야 한다. 그리고 학생들이 더 정확하게 수학적으로 쓰고, 보다 전문적인 책을 읽도록 도와줘야 한다. 쓰기와 말하기 의사 소통 모두에서 교사는 학생들에게 주목을 해야 하며, 쓰고 말하기를 통하여 학생들이 지금 무엇을 알고 있는지를 상세하게 인지해야 한다.

자. 연결

9-12학년의 학생들은 수학적 개념들을 연결할 수 있는 향상된 능력을 개발해야 하며, 동일한 문제에 대한 한 가지 이상의 접근 방법들이 비록 서로 굉장히 달라 보일지라도 어떻게 해서 똑같은 결론으로 이어지는 지에 대한 더 깊은 이해도 있어야 한다. 고등학교 학생들은 모든 내용 영역을 잇는 연결성을 볼 수 있을 때 수학을 통합적인 총체로 볼 수 있다.

고등학교 학생들이 연결성을 발달할 수 있기 위해, 교사는 풍부한 문제, 수학적 사고를 지지하는 교실 환경, 학생들이 연결성을 볼 수 있는 수학적 도구들을 제공해야 한다. 연결성을 볼 수 있게 하는 문제 제공이 중요하다. 학생들이 연결성을 나타낼 수 있는 잠재적인 상황과 문제를 접하지 못한다면, 연결성을 찾기는 힘들다. 따라서 교사는 수학적 연결성을 짓게 하고, 학생들이 연결성을 볼 수 있는 능력을 갖추도록 도울 수 있는 전문가적인 능력이 필요하다. 학생들의 다양한 접근 방법과 풀이 방법을 허용할 수 있는 문제를 가지고 수업을 진행하는 것이 좋다.

차. 표현

수학이 패턴의 공학이라면, 표현은 이러한 패턴을 기록하고 분석하는 수단이다. 그래프는 특별한 종류의 정보를 시각적으로 전달하는 반면, 기호로 나타내어진 식은 문제를 쉽게 다룰 수 있고, 분석하고 해석 가능하다. 고등학교 학생들의 지식과 표현의 사용은 그 범위와 복합성에 있어서 확장되었다.

초등학교에서 학생들은 종종 표현을 사용하여 직접적으로 감지할 수 있는 대상과 운동을 추론한다. 중학교에서는 학생들은 직접적으로 감지할 수 없는 대상(예, 유리수와 비)을 위하여 수학적 표현을 점점 더 많이 만들고 사용한다. 고등학교에 와서는 학생들은 함수, 거리, 방정식과 같은 추상적인 실재를 점점 많이 다루게 된다. 고등학교 학생들은 이러한 대상에 대한 다양한 표현을 사용하여, 서로 다른 내용들 사이를 일괄하는 일반적인 수학적 구조를 인식하게 된다. 예를 들면, 정사각형 모양의 정원의 넓이, 정지해 있다가 등가속도로 운동하는 수레의 이동거리는 모두 $f(x) = ax^2$ 형태의 함수로 표현될 수 있다.

고등학교에서 표현을 발전하는데 교사의 역할을 무엇인가? 수학 학습의 주요한 부분은 수학적 언어, 수학적 관례, 수학적 표현들을 이용하는 방법을 학습하는 것이다. 따라서, 교사는 학생들에게 관계적인 수학적 표현들을 소개해 주어야 하며, 필요할 때 학생들 자신들이 즐겨 쓰는 표현들의 개발을 통하여 학생들을 도와 이러한 표현들을 효율적으로 사용하도록 해야 한다. 그리고 학생들이 동일한 대상에 대한 다양한 표현은 다양한 정보를 전달할 수 있으며, 수학적 문제에 적절한 표현의 선택 중요성을 일도록 해야 한다.

V. 맺는 말

앞에서 제시한 원리와 규준은 이상(理想)적인 면도 있다. NCTM (2000)에서 기술된 수학 교수·학습 상황은 대다수의 교실, 학교, 학군(學群)의 현실과 거리가 멀다. 따라서 많은 현장 교사, 행정가, 교사 지도자, 교육과정 개발자, 교사 교육자, 수학자, 정책을 결정하는 사람, 수학 교육자, 지역 공동체를 포함하여 많은 사람들의 재능, 활동력, 관심이 필요하다. 그러나 중요한 것은 수학 교육에서 아직 많은 지속적인 개선이 필요하지만, 수학 교육은 모든 아이들의 미래를 개선시키는데 초점을 두어야 하며, 모든 학생들이 희망 있는 그리고 변화하는 미래를 대비할 수 있는 수학교육을 받아야 한다는 것이다.

참 고 문 헌

- Brownell, W.A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *Elementary School Journal* 47, pp.256-265.
- Hiebert, J. & Thomas P.C. (1992). Learning and teaching with understanding. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp.

- 65-97, New York: Macmillan Publishing Co.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM
- _____ (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- _____ (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- _____ (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Skemp, R.R. (1976). *Relational understanding and instrumental understanding*. *Mathematics Teaching* 77, pp.20-26.