韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 729-750.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 729-750.

“부정”을 통한 발전적 수학학습에 관한 연구

한 길 준 (단국대학교)
정 승 진 (우만초등학교)

고대 이후로 수학은 끊임없이 발전되어 왔고, 지금도 발전 지향적인 변화가 이루어지고 있다. 수학을 발전적 관점에서 보는 것은 기존의 수학적 지식을 답습하여 그 기능을 익히는 것보다는 수학을 끊임없이 창조, 발전시키는 대상으로 생각하는 것이다. 수학에서 발전적 학습은 대상을 고정된 것으로 보지 않고, 하나의 결과가 얻어졌더라도 보다 더 나은 방법을 알아본다거나 또는 이를 바탕으로 보다 일반적인, 보다 새로운 것을 발견하려는 것이다. 이러한 발전적 수학학습은 증명과 반박의 과정, What if not, 관점의 변경, 부정에 의한 방법 등을 통해서 이루어 질 수 있다.
본 연구에서는 발전적인 수학학습에 대한 다양한 이론을 고찰하고 특히, 부정을 통한 발전적 학습 전개의 방법 및 과정에 대하여 분석함으로써 발전적 수학학습에 대한 방향을 탐색해 보고자 한다.

I. 서 론

고대 이후로 수학은 끊임없이 발전되어 왔고, 지금도 발전 지향적인 변화가 이루어지고 있다. 역사-발생적 원리에 따르면 수학을 지도함에 있어서 역사적으로 발생, 발달한 순서를 지켜서 지도해야함을 강조하고 있다(강옥기, 2000). 여러 세대에 걸쳐 이룩한 사고 수준과 같은 정도의 사고를 얻으려면 조상들의 경험과 똑같은 경험을 겪어야만 한다. 이러한 역사-발생적 원리의 학습지도의 당위성에 대하여 Poincare는 과학의 기초에서 “동물학자들은 동물의 태아발달은 짧은 기간동안에 모든 지질학적 시대의 자기 조상의 역사를 되풀이하고 있다고 생각한다. 그것은 정신의 발달에서도 똑같이 나타나고 있으므로, 교육자의 임무는 아동들이 조상들의 경험을 겪어보고, 빠짐없이 그 단계를 빠르게 통과하게 하는 것이다. 이러한 목적 때문에 수학의 역사를 반드시 안내해야 한다(Kline, 1973)”라고 말하고 있다.

특히, 가다끼리(이용률 외 역, 1999a)는 수학을 발전적 관점에서 보았을 때, 수학교육에서 길러야할 사고중의 하나로 발전적 생각을 강조하고 있다. 가다끼리는 수학을 발전적 관점에서 보는 것은 기존의 수학적 지식을 답습하여 그 기능을 익히는 것보다는 수학을 끊임없이 창조, 발전시키는 대상으로 생각하는 것으로, 수학에서 발전적 학습은 대상을 고정된 것으로 보지 않고, 하나의 결과가 얻어졌더라도 보다 더 나은 방법을 알아본다거나 또는 이를 바탕으로 보다 일반적인, 보다 새로운 것을 발견하려는 것으로 정의하고 있다. 예를 들면, 정수만으로는 기준량보다 작은 대상의 크기를 표현 할 수 없으므로 이에 대한 해결책으로 소수를 만들었다거나, 정수의 나눗셈이 언제나 가능하게 하기 위해

서 분수를 생각한 것도 바로 발전적 생각의 소산이라고 생각할 수 있다. 이러한 발전적 생각을 함양하기 위하여 가다끼리는 문제의 조건을 변경하는 방법과 문제를 보는 관점을 변경하는 방법을 권장하고 함수적 사고와 What if not?을 강조하였다.

철학적 사조에서 보았을 때, 이러한 발달과 발전의 과정을 역동적으로 설명하고 있는 철학 중에 하나가 바로 변증법이다. 고대 이후로 변증법은 "대화를 통해 진리를 획득하는 대화법"이나, "모순 또는 대립을 통하여 사물의 운동을 설명하려는 논리"의 의미로 사용되었다. 특히, 헤겔은 사물이 변하는 운동과정을 정립(定立:these)→반정립(反定立:antithese)→종합(綜合:synthese) 3단계의 과정이 주기적으로 반복하는 것으로 생각하여, 사물이 발전하는 과정을 역동성 있게 설명하였다. 이러한 일련의 과정은 "선행 과정"에서 발생하는 "모순"을 거부하지 않고, "부정"을 통하여 모순을 극복하려는 과정이기 때문에 더욱 발전적인 과정이다(장상호, 1999). 즉, "A는 A일뿐 ~A는 아니다"식의 형식 논리학적 표현은 모든 것을 대립과 구별을 통해서만 인식하게 되므로 끊임없이 움직이는 현실의 참된 실태는 결코 파악할 수 없지만, 유가 무로 전화(轉化)하고, 무가 유로 전화하는 사물과 사고의 운동과정을 중시하는 변증법에서는 "A는 ~A가 된다."이기 때문에, A는 ~A로 전화될 수 있는 것이다.

헤겔 철학에서 중요한 개념 중에 하나가 바로 '부정'이라는 개념이다. 우리가 더 나은 새로운 지식을 추구한다는 것은 기존의 지식에 대한 유용성을 느끼지 못하고 문제를 좀더 쉽고 편리하게 해결해 줄 수 있는 방법을 찾는 것을 의미한다. 바로 기존의 지식 전체를 부정하거나 그 중에서 일부를 부정하여 좀더 나은 것을 추구하려는 것이다. 따라서 학습에서 새로운 학습 요소를 도입할 때는 기존의 지식보다는 유용하고 편리한 새로운 지식의 필요성을 학생이 깨닫도록 하는 것이 중요하다. 즉, 기존의 지식에 대한 장단점을 파악하고, 현재의 단점을 부정함으로써 새로운 지식획득에 대한 필요성과 그 해결 방법을 좀더 유의미하게 모색할 수 있을 것이다. 그러므로 여기서 부정이라는 것은 폐기를 의미하는 것이 아니라 발전을 위한 전환점을 마련하고 발전의 기틀을 마련하는 것이라고 볼 수 있다.

수학교육에서 '부정'을 이용한 방법은 어떤 명제가 주어졌을 때, 역이나 대우 또는 이를 찾아보는 방법과 What if not에서 찾아 볼 수 있다. 특히 Lakatos의 증명과 반박의 과정에서 반박의 과정은 헤겔의 변증법에서 보면 부정의 과정으로 증명을 발전적으로 완성해 가는 견인차 역할을 한다.

따라서, 본 연구에서는 발전적 수학학습을 수학적 대상을 고정된 것으로 보지 않고, 하나의 결과가 얻어졌더라도 보다 더 나은 방법을 알아본다거나 또는 이를 바탕으로 보다 일반적인, 보다 새로운 것을 발견하려는 것으로 정의하고, 발전적인 수학학습에 대한 다양한 이론을 고찰하고자 한다. 특히, 부정을 통한 발전적 학습 전개의 방법 및 과정에 대하여 분석함으로써 발전적 수학학습에 대한 방향을 탐색해 보고자 한다.

II. 발전적 생각과 발전적 수학학습

A. 수학학습에서 발전적 생각

사상과 사물의 변화에는 긍정적 측면과 부정적 측면이 존재하게 마련이다. 만물이 변화를 시작할 때는 긍정적이고 발전적인 변화를 지향하지만 그 변화에는 부정적인 측면이 존재하기 마련이다. 이러한 부정적 측면은 변화를 완성시키는데 있어서 마이너스 요인으로 작용하지만 한편으로는 이러한 부정적 측면을 보완하기 위해서 또 다른 변화를 불러일으키는 원동력으로 작용한다. 수학도 마찬가지이다. 시대의 필요에 의해서 또는 위대한 수학자에 의해서 새로운 수학이 탄생하지만 완벽한 수학적 지식으로 고정되기보다는 또 다른 수학자에 의해서 오랜 시간 동안 긍정적 측면은 부각되고 부정적 측면은 보완되어 점차 발전적인 형태를 갖추게 된다. 따라서 수학적 지식은 절대적 진리이기보다는 끊임없이 발전 지향적으로 변화하는 역동적 지식이라고 생각할 수 있다. 이러한 생각은 역사-발생적 원리에 따라 수학을 가르쳐야 한다는 주장과 연결될 수 있다.

지금까지 대부분의 수학교육자들은 그것이 어떤 형태이든 역사-발생적 원리를 주장해 왔다. Klein, Poincare, Toeplits, Freudental, Polya, Broussau 등 유명한 학자들은 대부분 역사-발생적 원리를 지지해 왔고, 이들은 수학을 완성된 산품으로써가 아니라 수학화의 과정으로써만 바르게 이해되고 학습될 수 있다는 생각을 공유하고 있다. 역사-발생적 원리는 수학적, 인식론적, 심리학적, 교육학적 관점에서 현대 수학교육이론의 대부분의 주장과 조화되며, 수학적 구조의 발생도 학습자의 인지구조의 발생도 적절히 고려되고 있는 학습지도 원리이므로 수학교육은 역사-발생적 방법에 따라 조직되어야 한다고 주장하기에 이르렀다(우정호, 2000).

가다끼리(이용률 외 역, 1999a)는 통합한 것을 보다 넓은 범위에 적용하려 하거나 하나의 결과가 얻어졌다하더라도 다시 보다 나은 방법을 알아본다거나, 또는 이를 바탕으로 보다 일반적인, 보다 새로운 것을 발견하려는 생각을 발전적인 생각으로 정의하고 있다. 즉, 수학을 발전적 관점에서 보는 것은 기존의 수학적 지식을 답습하여 그 기능을 익히는 것보다는 수학을 끊임없이 창조, 발전시키는 대상으로 생각하는 것으로, 수학에서 발전적 학습은 대상을 고정된 것으로 보지 않고, 하나의 결과가 얻어졌더라도 보다 더 나은 방법을 알아본다거나 또는 이를 바탕으로 보다 일반적인, 보다 새로운 것을 발견하려는 것이다. 이러한 발전적 생각을 함양하기 위하여 그는 문제의 조건을 변경하는 방법과 문제를 보는 관점을 변경하는 방법을 권장하고 함수적 사고와 What if not?을 강조하였다.

문제의 조건을 변경하는 것에 대하여 가다끼리는 어떤 사상(事象)에 대해 그것을 이용할 수 있는 경우를 적극적으로 찾아보려는 생각이고, 또한 그 사상을 수정하지 않고는 적용할 수 없는 경우를 적극적으로 찾기 때문에 대상을 발전적으로 보려는 생각이라 하였다. 즉, 주어진 문제의 조건의 일부를 다른 것으로 대체하거나 조건을 완화하든지, 문제의 장면을 바꾸는 것이다. 문제의 조건을 변경하는 것은 Brown과 Walter(1970)의 What if not?과 같은 것으로 조건의 일부를 부정하여 다른 것으로 바꾸어 놓으면 결론이 어떻게 되는가를 생각해보는 것이다. 즉, 문제의 조건과 제한점을 조사하여 "만약 ~라면?"과 "만약 ~가 아니라면?"이라는 과정을 통하여 문제의 조건과 제한점을 자유로이 바꾸는 것으로 그들의 교수법은 주어진 문제의 조건이나 목표를 다양하게 변화시킴으로써 이전의 문제와는 다른 새로운 문제를 생성하는 것에 강조점을 두고 있다. 이것을 가다끼리(이용률 외 역, 1999a)

는 조건의 변화에 결론의 변화가 의존하는가를 생각해 보게 하므로 그것은 조건과 결론 사이의 함수 관계를 살펴보는 것과 같다고 설명하였다. 문제의 조건을 변경하는 것은 문제설정의 한 부분이다. Silver(1995)는 문제 설정은 새로운 문제를 만들거나 주어진 문제를 다르게 변형시키는 것으로 특히, 창의적 수학활동과 탐구 지향적인 교수-학습을 촉진한다고 언급하고 있다. NCTM(1989)에서도 9-12 학년의 학생들은 스스로 문제를 인식하고 만들어 보는 경험, 수학을 행하는 중심적 활동을 해야한다고 주장하고 있다. 이와 같이 학생들이 문제를 만들어 본다는 것은 인식의 단계를 넘어서 수학을 스스로 창조하는 발전시키는 경험을 제공할 수 있을 것이다.

가다끼리는 관점 변경에 의한 발전을 한가지 관점에 고정되지 않고 관점을 달리하여, 여러 가지 방법과 성질을 더 찾아보려는 것으로 정의하였다. 예를 들어, 오른쪽과 같은 도형의 넓이는 다음과 같이 여러 가지 방법으로 구할 수 있다.

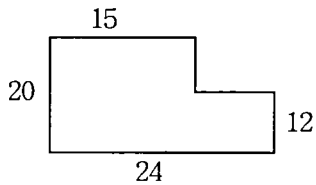
$20\times 15+12\times (24-15)=408$

$(20-12)\times 15+12\times 24=408$

$(20-12)\times 15+12\times 15+12\times (24-15)=408$

$20\times 24-(20-12)\times (24-15)=408$

$20\times 15+12\times 24-12\times 15=408$



그러나 이 중에서 어떤 한 방법으로 구했더라도 이것으로 그치지 않고, 다시 다른 방법, 또는 보다 나은 방법이 없는 지에 대해서 궁리하도록 하는 것이 중요하다. 이와 같이 관점을 달리하여 여러 가지 방법을 생각함으로써 수학 문제는 오직 한가지의 바른 해법만이 존재한다는 고정적인 생각을 하지 않게 되며, 자신의 힘으로 여러 가지 해법, 여러 가지 접근 방법을 생각할 수 있음을 인식하게 된다.

Polya(1957) 또한 문제해결단계에서 반성의 단계를 설명하면서 다음과 같이 풀이의 개선을 통하여 문제에 대한 확신을 얻어야 함을 강조하고 있다.

> 상당히 우수한 학생이라고 할지라도 문제의 해답을 얻고 그 과정을 정연히 쓰고 나면 교재를 덮어 버리고 무언가 딴 것을 찾게 마련이다. 그 결과 중요하고도 교훈적인 사고 단계를 빠뜨리는 것이다. 완성된 풀이를 검토하고 그 결과와 그 결과에 이르게 된 과정을 재고하고 재검사함으로써 획득한 지식을 견고하게 하고 문제를 해결하는 능력을 발달시킬 수 있을 것이다. 훌륭한 교사라면 어떤 문제이든 완전히 해결될 수 없음을 학생들에게 인식시켜 주어야 한다. 즉, 충분한 연구와 통찰을 통해서 어떤 풀이도 개선 될 수 있으며, 어떤 경우든 우리는 그 풀이에 대한 이해도를 보다 개선할 수 있을 것이다(pp.14-15).

Polya는 발견술이란 말을 사용하였는데 발견술을 뜻하는 영어의 heuristic은 고대 그리스어에서 '발견하다'는 의미를 가진 동사 heuriskein에서 나온 말로 오늘날 '발견을 안내하는', 또는 '문제해결을 개선하는'의 의미로 사용되고 있다(정은실, 1995). 개선은 곧 발전을 의미한다. 특히, Polya는 대상이

나 존재의 성질을 확신하기 위해서 두 가지 이상의 감각기관에 의존하듯이 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있어야 만이 그 문제에 대해서 확신할 수 있다고 하였다.

개선이 문제에 대한 확신을 줄 수 있고 그것이 발전적인 것은 발전시키는 과정에서 얻은 것은 같은 것으로 생각된 것이기 때문에 하나로 통합될 수 있고, 통합함으로써 본질적인 조건이 명확해지고, 본질적인 조건이 명확해짐으로써 새로운 문제나 새로운 해법의 발견이 가능해지므로 그러한 과정 자체가 발전적인 것이다. 이와 같이 통합적인 생각과 발전적인 생각은 서로가 자극을 주고받으며, 서로가 보완의 역할을 하여 자기의 힘을 발휘한다고 볼 수 있다(이용률 외 역, 1999a).

다음과 같은 발문을 통하여 이러한 발전적 생각을 기를 수 있다(이용률 외 역, 1999b).

- 보다 나은 방법은 없는가?, 보다 효과적으로 보다 간단하게 할 수는 없는가?
- 정리하여, 세련되게 할 수 없는가?
- 다른 방법은 없는가?
- 새로운 문제를 만들어 낼 수는 없는가?
- 비슷하거나 같은 점은 없는가?
- 이것의 특별한 경우라고 생각되는 것은 없는가?
- 다른 관점에서 볼 수 없는가?
- 조건을 변경하면 어떻게 되는가?

이상으로 수학학습에서 발전적인 생각에 대해서 가다끼리의 견해를 중심으로 살펴보았다. 따라서 본 연구에서는 발전적 수학학습을 수학적 대상을 고정된 것으로 보지 않고, 하나의 결과가 얻어졌더라도 보다 더 나은 방법을 알아본다거나 또는 이를 바탕으로 보다 일반적인, 보다 새로운 것을 발견하려는 것으로 정의하고 이에 따른 수학학습의 전개에 대해서 알아보고자 한다.

B. 발전의 논리로서의 변증법적 방법론

앞절에서는 가다끼리의 견해를 중심으로 발전적 생각을 살펴보았다. 본 절에서는 이러한 발달과 발전의 과정을 역동적으로 설명하고 있는 철학 중의 하나인 변증법을 중심으로 발전적 수학학습에 대해서 살펴보고자 한다. 특히, Hegel의 변증법은 '변화' 를 설명하는 논리로 우리가 발전적인 변화를 지향할 때 거쳐야할 역동적인 과정을 잘 설명해 준다(장상호, 1999).

연역 논리와 달리 변증법적 논리는 명제들과의 관계를 분석하기 위한 일련의 형식적인 규칙들을 제공하지는 않는다. 형식적인 규칙이 연역 논리학에서 중심적인 중요성을 가지고 있는 이유가 연역은 내용이 아니라 오직 형식적인 관계에만 관심을 갖고 있기 때문이라는 사실을 다시 생각해 볼 필요가 있다. 그러나 변증법적 논리는 형식 논리가 아니라 내용 논리이다. 발견에 대해서 하나의 형식 논리를 구성하려는 노력을 궁극적으로 받아들이기란 아주 어려운 일이다 그리고 이러한 이유로 말미

암아 발견의 논리를 구성하려는 시도는 논리와 형식논리를 동일시하는 사람들에게는 실패로 끝날 수 밖에 없다. 그렇게 될 수밖에 없는 정확한 이유는 역사적인 배경에서 탐구의 구조 내용을 이해하지 않고서는 그것을 이해할 수 없기 때문이다. 변증법적 논리는 역사적 맥락에 의해서 탐구구조를 검토할 수 있는 도구를 우리에게 제공해 준다(Harold, 1987).

구체적으로 헤겔의 변증법에서 가장 중요한 개념인 모순, 부정, 지양의 개념에 대해서 장상호(1999)의 견해를 중심으로 살펴보면 다음과 같다.

1) 모순

형식논리학과 변증법에서 가장 큰 차이를 보이고 있는 것은 "모순"에 대한 견해이다. 형식 논리학에서 모순은 우리의 사고에서 모순을 없애는 무모순의 논리로 다음과 같은 특징이 있다.

①모순은 진리를 찾는데 장애물이다. Aristoteles나 Kant 등 대부분의 철학자는 모순은 진리를 발견할 때, 절대적으로 배제해야할 것으로 보았기 때문에, 모순이 있는 곳에는 진리가 없다.

②모순율의 적용: 모순되거나 반대되는 두 명제가 있다면, 하나는 틀림없이 잘못되었다.

③변하지 않는 존재만이 절대 진리이다.

④영원불변하는 실재에는 모순이 없다.

따라서, 형식 논리학에서는 동일률에 의하여 단지 "A는 A일뿐 ~A는 아니다"식의 표현은 모든 것을 대립과 구별을 통해서만 인식하게 되므로 끊임없이 움직이는 현실의 참된 실태는 결코 파악할 수 없다.

그러나, Hegel의 텍스트에서 '모순'이라는 표현은 매우 독특하게 사용되었다. 즉 대개 Hegel이 실제로 다루고 있는 것은 특수한 종류의 모순이며, 그는 '논리학'에서 특별히 장을 구분하여 말하고 있는 것, 이른바 '모순' 자체에 관해서는 전혀 관심이 없었으며, 있다 하더라도 예외적인 것에 불과하다. 대략 1930년대 또는 1940년대 이후 Hegel 연구 문헌 속에서(그리고 다른 곳에서도) 이러한 종류의 모순에 대해서 '변증법적' 모순이라는 표현이 부여되었다(김종기, 1997). 즉, Hegel의 변증법은 운동하는 사물의 논리학이고, 모순의 논리학이다. Hegel의 변증법에서 모순은 모순을 용인하는 논리학으로 다음과 같은 특징이 있다.

①모순은 발전의 원동력이다. 모순을 해결하기 위해 사물과 사고는 새로운 방향으로 변하고, 그러한 변화를 통해서 사물은 발전한다. 즉, 모순의 충돌과 적대화가 아니라 화해에 의해서 발전이 이루어진다.

②모순율의 적용--모순이란 거기에 머무를 때만 모순이고 계속 앞으로 전진하면 모순이 아니다. 변증법에서는 유가 무로 전화(轉化)하고, 무가 유로 전화하는 사물과 사고의 운동과정을 중시하기 때문에 형식 논리학적인 모순율과 동일률은 효과가 없다. 그러나 "A는 ~A이다."가 아닌 "A는 ~A가 된다." 즉, A는 ~A로 전화됨에 따라 생겨나는 대립은 전통적인 형식논리학에서 말하는 모순이 아니므로 Hegel의 변증법은 형식논리학의 모순율을 부정하는 것이 아니라 그 전통에 속하는 것이다.

③만물은 유전한다. 세계는 영원한 생명 유전의 과정이며, 만물의 생성과 변화는 대립물의 투쟁이라는 변증법적 운동에 의해서 이루어진다. 영원불변하는 것이 있다면, 생성과 소멸의 과정 그 자체뿐이다. 따라서, A가 필연적으로 ~A로 전화하고, 진리는 유동적이고 상대적이다.

④실재 속에는 항상 모순이 살아 있다. 세계 자체는 대립물의 투쟁, 즉 모순을 해결하기 위한 운동을 하면서 끊임없는 생성과정을 밟는다. 그리고 모순은 자연계와 정신계 어디에도 살아 있으므로, 곧 모순이 사물의 진상이고, 사물의 운동성과 충돌성, 표출성은 모순의 정도에 따라 다르다.

이와 같이, Hegel은 진리의 논리로써 변증법을 사용하였다. 사고의 논리로 보았을 때 모순은 부정적이고 더 이상 발전이 없는 중단의 상태이지만, 이성의 부정적이고 긍정적인 단계를 인정한다면, 변증법은 진리의 논리가 되는 것이다. 불변하는 사물이 없듯이 이 세상의 모든 것은 변한다. 또한, 역사의 모든 단계는 질적으로 서로 다르며, 이러한 상이성도 인정되어야 한다.

2) 부정

부정은 긍정과 대립되는 말로 어떤 일이나 그러한 양태를 성립시키지 않게 하려는 의지 또는 어떤 판단이나 명제를 거짓이라 하는 이성적 행위이다. 형식 논리학에서의 부정을 살펴보면, 어떠한 명제 p의 부정(또는 반정립) ~p라 함은 p가 참이면 ~p는 거짓, p가 위이면 ~p가 참임을 의미한다. 따라서 '판단의 부정' 이라는 뜻은 '판단이 오류' 이거나 혹은 "판단의 배제"와 같은 소극적인 의미밖에 갖지 못한다. 또한, 형식논리에서 부정의 부정은 "긍정→부정→부정→긍정", 즉 이전의 동일성으로 다시 돌아오는 것으로, "처음의 긍정"과 "부정을 통한 긍정" 사이에는 성질이나 본질에 있어서 동일한 것이다.

그러나, Hegel의 변증법에서 부정은 형식 논리학에서의 부정과는 달리 어떠한 명제가 진리나 허위의 어느 하나에 속하는 것을 판별하는 것이 아니라, 그 내부에 동시에 가지고 있는 부정과 긍정의 요소 중에서, 부정적 요소를 극복하려는 변화의 과정이다. 따라서 다음과 같은 특징이 있다.

①부정은 실재적이며 발전을 위한 매개체이다. 모순을 확인한 후에 모순율을 거부하지 않고 극복하려는 일련의 과정이 부정이기 때문에 발전을 위한 매개체이다.

②사상의 동력원 역할을 한다. 모든 모순은 절대화 될 수 없고 조만간에 해결되지 않으면 안 된다. 만약 해결되지 않으면, Hegel에게도 이것은 오류의 징표이다. 그것을 부정해서 생기는 모순은 그것을 해소하기 위한 운동을 추진하는 힘이다. 그리고, Hegel의 변증법에 있어서 '최초의 긍정' 과 '부정의 부정을 통해서 얻은 긍정' 은 질적으로 결코 같은 것이 아니다. 부정은 항상 경험의 매개 과정이 포함되어 있기 때문에 새로운 긍정은 보다 발전적으로 변모하는 것이다. 즉, 생산적이고 발전적이다. 이와 같은 변화를 설명하기 위해서 Hegel은 지양이라는 말을 사용하였다.

특히, Adorno는 어떠한 절대적인 것도 인정하지 않고 부정을 통하여 그 모순 점을 발견하고 겸허하게 개선함으로써 더욱 완벽한 단계로 나가자는 부정의 변증법을 주장하였다. Adorno의 부정의 변증법은 유물론적 변증법의 새로운 해석이며 보완작업이라는데 그 의의가 있다. 모든 사물은 정지해

있지 않으며 자체 모순에 의해 다음 단계로 변화되어 간다는 변증법 논리에 따르면, 절대적인 것은 존재할 수 없다. 따라서 Adorno는 자연 해결이 신봉하는 존재라는 절대 개념도 부정하며 형이상학적인 절대성과 영원함도 부정하였다. 예를 들어 모두가 공의 밝은 면만 보고 있으면 그 공의 참 모습은 파악할 수 없다. 부정적 측면, 즉 어두운 면도 보여주어야만 그 공의 정체를 알 수 있는 것과 같은 것이다. Adorno는 부정의 변증법을 통하여 한 사회나 체계가 절대적으로 신봉하는 대상을 부정함으로써 그 정확한 실체를 부각시키려고 했다(이원복, 1995).

3) 지양

지양은 일반적으로 사물에 관한 모순이나 대립을 부정을 매개로 하여 고차적인 단계에서 통일하는 것을 가리킨다. 원어로는 "부정하다, 보존하다, 고양하다"의 세 가지 의미가 있다. Hegel은 이러한 세 가지를 복합적으로 관련지어 사용하였다.

①본래의 부정으로 "폐기" 혹은 "극복"의 의미이다. 형식 논리학의 오성적인 부정과 유사하지만, 완전히 그 뜻과 일치하는 것은 아니고, 다음의 ②,③번 요소의 결합을 통하여 변증법적 부정의 중요한 측면이 된다.

②"보존"의 의미이다. 부정은 부정의 대상을 완전히 폐기하는 것이 아니라, 부정의 대상에 남아있는 중요하고 가치 있는 것은 보존하는 것이다. 즉 부정된 것이 보존을 통하여 타자로 넘어가게 된다.

③"고양"의 의미이다. 이것은 더 높은 단계로의 발전을 의미하며, 더 낮은 단계로 변화하거나 똑같은 수준에 머무는 것은 지양이 아니다.

지양의 의미를 가진, 부정의 부정인 종합은 통일의 단계로 사물의 운동이 한순간 정지하는 것으로, 종합이 극복해야할 또 다른 부정을 야기하고 그러한 과정은 끊임없이 전개된다. 선행하는 부분은 끊임없이 후속 부분에 의해 지양되기 때문에, 모든 개별적인 판단들 보다 우위성을 가진 '구체적인 전체' 로 발전하게 된다. 따라서 변증법적인 발전은 직선형의 발전이 아니라 나선형의 발전이고, 이전의 원환(圓環)과 이후의 원환(圓環)은 한 단계의 수준 차이가 있다.

한길준과 정승진(2001)은 변증법적인 수학 학습 원리에 대해 다음과 같이 여섯 가지를 제시하고 있다.

첫째, 모순을 발견하고 해결하는 과정을 통하여 수학을 스스로 구성하는 기쁨을 느끼게 한다.

둘째, 세련되고 완성된 형태의 수학적 내용을 제시하기보다는 모순을 포함하고 있는 학습 내용을 많이 제공한다.

셋째, 모든 만물에는 모순이 존재하므로 수학적 지식이 영원 불변하는 절대적인 지식이라고 생각하기보다는 변증법적 운동에 의해 변할 수 있는 유동적, 상대적인 지식이라는 생각을 갖게 한다.

넷째, 모순을 확인한 후에 모순율을 거부하지 않고 극복하려는 일련의 과정이 부정이기 때문에, 모순을 발견한 후에 부정의 과정을 해결할 수 있는 충분한 시간과 이를 극복할 수 있는 자신감을 가질 수 있도록 한다.

다섯째, 부정은 부정의 대상을 완전히 폐기하는 것이 아니라, 부정의 대상에 남아있는 중요하고 가치 있는 것을 토대로 발전할 수 있으므로, 항상 부정된 대상을 신중하게 분석하여 문제 해결의 실마리를 얻도록 한다.

여섯째, 변증법적인 발전은 직선형의 발전이 아니라 나선형의 발전이므로 선행부분은 후속 부분에 의해 끊임없이 지양될 수 있으므로, 항상 탐구하는 태도를 갖도록 한다.

C. 부정을 통한 발전적 수학학습

Brousseau는 구체적으로 변증법적 방법론을 교수학적 상황에 적용하였다. 그는 '20으로의 경주' 라는 게임을 통하여 학생들이 이론을 정립하여 나가는 단계를 설명하고 있다. 구체적으로 살펴보면 다음과 같다(Cooper, Sutherland & Warfield, 1999).

(1) 도입 단계 : 교사가 아동들에게 "20으로의 경주"라는 게임을 설명하여 아동스스로 게임의 규칙을 내면화하는 단계이다.

(2) 행동 상황 - 행동의 변증법 단계 : 개인 대항 게임. '행동의 변증법' 이라는 말을 사용한 것은 학생들이 스스로의 선택에 대한 결과를 예측할 수 있고, 그러한 전략이 제안(명제)으로 확인되거나 상황과의 대화 속에서 실험 결과에 의해 타당화 되기 때문이다.

(3) 형식화 상황 - 형식화의 변증법 : 팀 대항 게임. '형식화의 변증법' 은 점차적으로 모든 사람이 이해할 수 있는 언어가 확립되고, 이 언어로 해당 상황의 요소와 적절한 관련 사항들을 적합하게 고려할 수 있게 되는 것, 달리 말하면, 유용한 추론과 행동을 가능하게 하는 것이다.

(4) 타당화 상황 - 타당화의 변증법 : 팀 대항 정리 만들기 대회. 팀 별로 정리를 만들기 위해 형식화한 제안(추측)을 하고 거기에 대한 타당성을 상대팀이 검증하는 단계이다. '타당화 상황' 전략의 타당성에 관하여 논의하는 것으로, 거짓이라고 판단한 근거를 거부하거나 의의를 제기할 수 있으며, 자신의 차례가 되면 증명할 수 있다.

"타당화의 변증법"은 학생들 나름대로 가지고 있는 의견을 수정하게 하고 거짓된 이론을 참으로 바꾸게 하는 과정으로 변증법적인 특성을 가지고 있다. 또한, 학생들로 하여금 상황을 논의하고 노하우를 타당화시키도록 하지만, 학생들의 추론은 종종 불충분하고 부정확하고 엉성하다. 따라서, 이러한 부정적인 측면을 인식하고 부정을 통하여 끊임없이 발전적으로 학습을 전개하도록 해야한다. 결과적으로 학생들이 이끌어낸 정리는 '2, 5, 8, 11, 14, 17' 을 먼저 말하면 이긴다는 사실이다. 이와 같이 학생들은 검증의 대상을 확대해가면서 점점 수학적 이론을 완성해 나가게 된다.

Lakatos는 증명과 논박이라는 과정을 통하여 수학적 발견의 논리를 설명하였는데 그의 이론 또한 부정을 통한 발전적 수학학습의 전개로 볼 수 있다. Lakatos(우정호 역, 1991)는 비형식적 수학 이론의 성장을 보다 강조하면서, 수학적 발견이 다음 단계들을 거치면서 이루어진다고 주장하였다.

(1) 원시적 추측

(2) 증명 : 원시적 추측을 그것의 하위 추측 또는 보조정리로 분해하는 개략적인 사고 실험

(3) 전면적 반례, 즉 원시적 추측에 대한 반례의 출현

(4) 증명의 재검토 : 전면적 반례가 국소적 반례가 되는 '혐의 있는 보조 정리(guilty lemma)'가 확인된다. 혐의 있는 보조 정리가 명백해지고 원시적 추측에 조건으로 부가된다. 개선된 추측으로서의 정리는 원시적 추측을 대신한다. 증명의 재검토, 즉 증명 분석은 전면적 반례가 나타나거나 확실하다고 생각하였던 증명에 대하여 의심이 생길 때 시작되며, 그러한 의심은 반례를 발견하는 계기가 된다. 그런 점에서 반례는 증명과 지식의 성장에서 매우 중요한 역할을 한다. 또한 증명 분석을 통해 발견된 증명-생성 개념과 새롭게 드러난 보조 정리들은 새로운 이론을 형성하게 된다.

Lakatos에게서 증명은 어떤 정리를 정당화하는 수단이 아니라, 증명 분석을 통하여 추측을 개선해 나가고 증명 자체를 반박함으로써 새로운 개념을 발견해 내는 발견의 수단이다. 다시 말해서 증명은 비판을 용이하게 하기 위해 추측을 가능한 한 작은 부분으로 분해하여 분석하는 사고 실험을 의미하며, 증명에 의한 비판으로부터 추측의 잘못된 부분들을 찾고 그것을 수정해 나가는 계속적인 발견의 과정이다(나귀수, 1998). 따라서, 증명의 과정에서 생기는 잘못된 부분 즉, 부정적인 부분은 반박이라는 부정적인 방법에 의해서 부정됨으로써 개선되는 것이다. 그러므로 반박의 과정은 증명 자체를 부정하려는 과정이 아니라 발전을 위한 모티브를 제공하는 부정으로 변증법적인 부정과 그 의미가 통한다고 볼 수 있다.

그러나 Lakatos가 말하는 증명과 반박의 과정에서 반박의 근거를 형식 논리학적 모순에만 한정시키기보다는 형식논리학적으로는 모순이 없지만 증명의 전개과정에서 좀더 정교하고 쉽게 전개할 필요가 있는 부분들도 포함하는 것이 바람직하다고 생각한다. 수학의 발전에서 중요한 것 중에 하나가 바로 발전적으로 정교화시키고 단순화하는 과정이다. 예를 들어보면, 이집트의 분수연산은 그 자체로 아무런 모순이 없었고, 피라미드같은 위대한 건축물을 만드는데도 큰 역할을 했다. 그러나 결정적으로 중요한 것은 그러한 과정을 이해하고 수행하는데 너무나 많은 어려움이 있었기에 수학을 직업으로 하는 관리를 필요로 했고, 오늘날에는 그 방법을 전혀 사용하고 있지 않다. 분수의 계산과정이 좀더 쉽고 정교하게 세련되었더라면 일반 사람들도 쉽게 계산을 할 수 있었을 뿐만 아니라 오늘날에도 이집트 분수를 사용했을 지도 모른다. 즉, 수학의 발전과정에서 중요한 것은 모순을 해결하기 의한 반박의 과정뿐만 아니라 방법과 절차를 좀더 쉽게 일반화, 정교화시키는 과정이 있다는 것이다. 형식논리학적 측면에서 본다면, 모순을 발견하고 해결하는 절차만 인정될 수 있으나 변증법적 논리에서 보면 방법과 절차를 좀더 쉽게 일반화 정교화시키기 위해서 기존의 방법을 부정하고 좀더 새로운 방법을 찾아보게 하는 것이 발전적 수학학습을 조장 할 수 있다.

기존의 방법에 대한 부정은 바로 기존의 지식의 재창조라는 발전적 과정을 의미한다. Freudenthal은 심리발생적 원리의 입장에서, 아동이 수학을 재창조할 수 있도록 지도하여야 하며, 이를 실현하기 위한 수단으로써 교사는 사고 실험을 할 것을 제안하고 있다. Freudenthal은 가장 자연스러운 지도방법이란 수학자가 하듯이 해보는 과정을 경험시키는 것, 즉, 학습자 스스로의 수학화 활동을 통해서

지도하는 것이며, 이것이야말로 진정한 의미의 수학 학습-지도 방법이라고 생각하였다. 아동이 수학을 재창조한다는 것은 잘 조직된 교사의 지도에 따라 학생들이 수학적 개념을 스스로 이해하고 발견하게 한다는 뜻이다(정영옥, 1997).

이러한 Freudenthal의 수학교육에 기초한 RME(Realistic Mathematics Education)에서는 다음과 같은 문제를 통하여 학생들의 수학화 과정을 설명하고 있다(Verschaffel & Corte, 1996).

"324개의 성냥 스티커를 4명의 어린이에게 똑같이 나누어주려고 한다. 각각의 학생들은 몇 개의 성냥 스티커를 가질 수 있는가?" 학생들은 "나누어준다는 것"을 처음에는 각각의 어린이에게 성냥 스티커를 한번에 하나씩 주는 것으로 알지만, 한 두 번 해본 다음에는 몫이 일정하게 점점 커짐에 따라 나눗셈을 적용할 수 있다는 것을 알게 된다. 그 과정을 표로 살펴보면 다음과 같다.

<표 II-1 > RME에 따른 나눗셈 2단계

	Sjoerd	Bauke	Bart	Jan
324 - 40	10	10	10	10
284 -40	10	10	10	10
244 -40	10	10	10	10
……				

<표 II-2 > 3단계

	Sjoerd
324 - 200	50
124 -120	30
4 -4	1
0	81

<표 II-3 > 4단계

	Sjoerd
4) 324 -320	80
4 -4	1
0	81

마지막 단계 <표 II-3 >에서는 피젯수보다 작은 근사값 중에서 큰 수를 찾아서 나누거나 최소한 그렇게 하려고 노력한다. 동시에, 표기법 또한 표준적인 형태와 비슷해진다. RME의 진행과정을 보면 나눗셈의 가장 기본적인 단계에서 시작하여 점차 정교화되고 세련되어 가는 즉, 점점 수학화되어 가는 과정을 알 수 있다. 2단계의 방법으로 문제를 해결했다고 해서 문제가 될 것은 전혀 없다. 그러나 여기서 주목해야 할 점은 2단계의 과정이 전혀 모순을 가지고 있지 않지만, 누구나 3, 4단계의 사고 과정으로 해결하는 것을 좀더 수학적이라고 생각할 것이다. 학생들 스스로 이렇게 수학적 생각을 세련화시키고 정교화시키는 것은 아주 중요하다. 문제를 해결하는 과정에서 학생들은 좀더 수학적인 방법을 생각하게 되는 데, 이러한 수학화를 이끌어 내는 기본적인 생각은 학생 스스로 이전의 해결 방법을 부정하고 새로운 방법을 찾으려는 노력을 할 때 의미가 있다. 만약 교사가 수학화의 과정으로써 위의 단계를 인위적으로 제시한다면 학생들은 각각의 단계가 가지는 의미를 구별하거나 각각의 단계를 연결시키지 못한 채 무의미하게 암기해야하므로 오히려 학습 부담만 더 느끼게 된다. 그러나 나눗셈의 의미는 그대로 살리고 각각의 단계가 가지는 부정적인 측면 즉, 문제 해결과정에서의 복잡함을 개선해야될 필요성을 느낀다면 좀더 단순하고, 정교한 발전된 형태의 나눗셈을 충분히 전개할 수 있을 것이다.

배종수(1999)는 다음과 같은 수학적 일화를 소개하면서 학생 스스로 발견하게 하기 위해서는 스스로 그 해결 방법에 대해서 회의를 느끼고 부정하게 하는 방법의 중요성을 강조하고 있다.

> 약수를 배우기 위하여 6을 이용하여 약수의 정의를 다음과 같이 하였다.
>
> 6÷1=6, 6÷2=3, 6÷3=2, 6÷4=1…2, 6÷5=1…1, 6÷6=1, 6은 1,2,3,6으로 나누어 떨어진다. 이때, 1,2,3,6을 6의 약수라고 한다. 이 학습이 끝난 후 선생님은 학생들에게 500의 약수를 배운 대로 해오라는 숙제를 내주었다. 이 숙제에 대해서 학부모들이 항의를 해왔는데 이것은 담임 교사가 이상한 사람이어서 이러한 숙제를 내 준 것이 아니다. 숙제를 하는 과정에서 학생들은 수학에 대한 혐오감을 느끼고 그 숙제를 싫어하게 되는데, 그 결과 지루하고 힘들기 때문에 아이들 중에서 왜 이렇게 복잡한 방법을 사용해야 하는지에 대한 항의가 자연스럽게 일어나면서 약수를 쉽게 구하는 방법에 대해서 스스로 발견하게 된다는 것을 선생님이 확신하기 때문이다(pp.114-116).

이와 같이 기존의 방법을 부정해야할 필요성을 충분히 깨닫고 스스로 그 개선 방법을 찾아낸 학생과 교사의 안내에 따라 배운 학생 사이에는 큰 차이점이 존재하게 된다. 아이들 스스로 왜 새로운 방법이 좋은가에 대한 확신과 스스로 발견했다는 자부심을 느낄 수 있고, 더 오랫동안 유의미하게 기억할 수 있을 것이다. 그러므로 부정을 통하여 세련화시키고 정교화시키는 과정 자체도 하나의 모순을 해결해 나가는 과정이라고 볼 수 있다. 단지, 형식 논리학적으로 모순이 있어서가 아니라 종합의 단계로 지양하는 과정 자체로 볼 수 있기 때문이다.

한길준 · 정승진(2000)은 변증법적인 방법을 이용한 분수지도에서 학생들이 분수의 나눗셈에서 가장 쉽게 사용할 수 있는 연산 방법으로 분수의 곱셈에서의 연산 방법인 $\frac{분자\times분자}{분모\times분모}$와 같은 알고리즘인 $\frac{분자\div분자}{분모\div분모}$와 같은 방법을 충분히 지도한 후, $\blacktriangle\div\frac{\blacksquare}{\bullet}=\blacktriangle\times\frac{\bullet}{\blacksquare}$, $\frac{\blacktriangle}{\bigstar}\div\frac{\blacksquare}{\bullet}=\frac{\blacktriangle}{\bigstar}\times\frac{\bullet}{\blacksquare}$와 같이 형식화 시켜야 한다고 주장하였다. 그리고 나눗셈의 원리를 학생들이 알고 있기 때문에 동수누감을 이용한 지도도 가능하다. 그 지도 순서로, 먼저 동수누감을 통하여 분수의 나눗셈의 원리를 깨닫고 이와 같은 방법으로 해결할 경우 발생하는 부정적인 측면을 발견한 후 이를 부정하고 지양함으로써 $\frac{분자\div분자}{분모\div분모}$의 방법을 적용하여 문제를 해결한다. 그러나 이 방법에서도 역시 부정적인 부분을 발견하여 이를 지양하는 과정에서 역시 젯수를 역수로 고쳐서 곱하는 방법을 발견할 수 있도록 지도해야 하다고 제시하고 있다.

또한, 한길준 · 정승진(2001)은 역사 발생적 원리에 따른 변증법적인 학습지도 방법에서 수학이 역사적으로 발생, 발달되어온 역동적인 과정을 학생들이 재경험해 보게 하는 일련의 과정을 효과적으로 설명할 수 있는 교수-학습 방법으로 변증법적인 방법을 제시하고 있다. 한길준 · 정승진은 수학의 역사적 발생과정을 그 과정 하나 하나에 초점을 맞추어 설명하기 보다는 변증법적인 방법에 의해서 부정하고 지양하는 과정을 통하여 가장 편리하고 일반화된 방법으로 발전해온 과정을 학생들이 탐구하고 발견하게 할 수 있도록 이끌어 내고 있다.

이상으로 살펴본 바와 같이 부정과 지양의 변증법적인 수학 학습 지도 방법은 형식논리학적으로는 모순이 아니지만, 모든 사물에 존재하는 부정적인 측면을 인식하고 부정과 지양을 통해서 이를 극복하여 사물을 한 단계 더 발전된 단계로 올려놓을 수 있는 인식의 바탕을 제공해 줄 수 있다

Ⅲ. 부정을 통한 발전적 수학 학습 지도 방안

A. 부정을 통한 발전적 수학학습지도 방법

부정을 통한 발전적 수학학습 방법은 크게 두 가지 관점에서 살펴볼 수 있다. 첫 번째는 앞에서 살펴보았던 Brousseau 와 Lakatos의 견해로 문제해결과정 자체 내에 포함되어 있는 형식논리학적 모순을 부정을 통하여 점차 수학적으로 정교하고 완전한 상태로 발전시키는 것이고, 두 번째는 배종수와 RME의 견해로 형식논리학적으로 모순은 없지만 그 해결과정을 좀더 쉽고 간단한 형태로 발전시키는 것이다.

위와 같은 내용을 종합하여 부정을 통한 발전적인 수학 교수-학습 방법을 본 연구자가 다음과 같이 3단계로 구안하였다.

①긍정의 단계

새로운 문제상황을 해결하는데 기존의 알고리즘과 수학적 지식을 이용하는 단계로 이 단계에서 학생들은 주로 유추적 사고를 이용하여 문제를 해결하거나 교사의 안내에 의해서 새로운 문제 상황을 해결한다.

여기서 유추적 사고란, 어떤 대상이나 집합의 원소 사이에서 성립하는 사실이 이와 유사한 대상 또는 집합에 대해서도 성립할 것이라고 추론하는 것이다. 이 추론은 논리적으로 불완전하지만 가능성을 탐색하는데 중요한 역할을 한다(이용률 외 역, 1999a). 그리고, 인간이란 전혀 경험하지 않은 생소한 것에서 모티브를 얻어 문제를 해결하기보다는 유사한 경험을 바탕으로 문제를 해결하려는 경향이 있으므로, 이러한 유추적 사고에 의해서 동화가 쉽게 일어난다.

②부정의 단계

새로운 문제 상황을 기존의 알고리즘이나 수학적 지식으로는 해결하기에는 문제 해결과정이 너무 복잡하거나 난해하여 문제를 해결하는데 어려움을 겪는 단계로 알고리즘이 갖고 있는 부정적인 측면을 인식하는 단계이다. 부정의 단계는 기존의 알고리즘이 가지고 있는 변증법적인 모순을 발견하고 해결하려는 절차로 기존의 알고리즘을 좀더 쉽게 일반화 정교화시키는 역동적인 발전의 과정이다. 그러나 변증법적인 모순은 형식 논리학의 모순과는 다른 사물에 존재하는 부정적인 측면이기 때문에 사람마다 인식하는 부정적 요소가 약간씩은 다를 수 있다. 따라서, 교사는 학생들이 이러한 부정적인 부분을 잘 인식할 수 있도록 기존의 알고리즘의 장단점을 확실하게 학생들이 인식할 수 있도록 부정의 단계를 구성하는 것이 좋다. 특히, 부정의 단계에서 중요한 것은 보다 발전적인 알고리즘이 필요하다는 것을 학생들이 기존의 알고리즘이 가지고 있는 부정적 측면을 통하여 확실하게 인식해야 한다는 점이다. 이러한 확실한 인식이 이루어져야 만이 학생들은 새로운 알고리즘을 발견해야할 필요성을 느끼고, 적극적으로 발전적인 알고리즘을 찾으려고 노력할 것이다.

또한, 부정의 단계에서는 통합한 것을 보다 넓은 범위에 적용하려 하거나, 하나의 결과가 얻어졌다

하더라도 더욱 나은 방법을 알아본다거나 또는 이를 바탕으로 더욱 일반적인 보다 새로운 것을 발견하려는 발전적 사고가 중요하다(이용률 외 역, 1999a).

③지양의 단계

부정의 단계에서 발견한 부정의 대상을 부정하여 기존의 알고리즘을 대체 할 수 있는 보다 발전적인 알고리즘을 지양하는 단계이다. 발견한 모순을 해결하기 위해서 앞에서 풀었던 문제들을 세밀하게 검토해 보거나 아니면 유추적인 사고를 통하여 그 해결책을 찾아볼 수도 있으며 몇 몇의 사례를 통하여 귀납적으로 발견할 수 도 있다.

B. 부정을 통한 학습지도 방안

부정을 통한 발전적 수학학습지도 방법으로 곱셈과 사각형의 개념지도와 추상화 과정에 대하여 구체적으로 살펴보고자 한다.

1. 곱셈의 개념에 대한 발전적 수학학습

7차 수학과 교육과정(교육부, 1997)을 살펴보면, 곱셈은 2-가 단계에서 도입되며 실생활 장면에서 같은 수 더하기와 배의 개념을 통하여 이해하도록 되어 있다. 이에 따라 2-가 단계의 교과용 도서(교육부, 2000)에서는 묶어 세기를 통하여 곱셈의 개념과 곱셈식을 도입하고 있다. 현장에서 수업을 하다 보면 의외로 학생들이 곱셈구구는 잘 외우고 있지만 곱셈의 개념에 대해서는 잘 모르고 있다는 것을 많이 발견할 수 있다. 이것은 곱셈에 대한 개념을 도입할 때 학생들이 왜 곱셈을 배우는가에 대해서 스스로 절실하게 생각해 보고 발견해 보는 경험이 부족했기 때문이라고 생각한다.

부정을 통한 발전적 수학학습에 따라 곱셈의 개념을 다음과 같이 지도해 볼 수 있다.

①긍정의 단계

다음과 같이 같은 수를 더하게 한다.

2+2+2+2+2+2+2= 5+5+5+5+5+5+5= 10+10+10+10+10+10+10+10=

위의 문제는 덧셈을 할 줄 아는 학생은 모두 계산할 수 있는 문제로 학생들은 아주 쉽게 기존의 지식을 이용하여 문제를 해결할 수 있을 것이다. 이 정도의 문제이면 학생들은 크게 곱셈의 필요성을 느끼기보다는 덧셈을 이용하여 문제를 해결하려고 할 것이다.

②부정의 단계

다음과 같이 아주 지루하고 복잡한 계산을 통해서 같은 수의 덧셈을 쉽게 할 수 있는 방법과 그 표현 방법에 대한 필요성을 깨닫게 한다.

· 2를 35번 더하는 과정을 덧셈식으로 나타내고 계산하시오.
· 4를 53번 더하는 과정을 덧셈식으로 나타내고 계산하시오.
· 7을 67번 더하는 과정을 덧셈식으로 나타내고 계산하시오.

위의 문제에 대해서 학생들은 문제 자체가 어렵다고 인식하기보다는 너무나 지루하고 많은 시간이 걸리며 식으로 나타내는 것이 너무 복잡하다는 것을 인식하게 될 것이다.

③지양의 단계

학생들이 새로운 계산 방법이나 계산식에 대한 필요성을 충분히 인식하였을 때 교사는 계산식을 편하게 쓰기 위해서 새로운 기호를 도입하는 것이 좋을 것이라는 의견을 제시하고 학생들에게 어떻게 덧셈식을 수학적으로 표현해야 될지 학생들에게 생각해 보게 한다. 이렇게 곱셈식을 도입한다면 학생들은 곱셈 기호가 길고 복잡한 덧셈식을 얼마만큼 편리하게 만들어 주는지 알게 될 것이다.

식에 대한 도입이 끝난 후, 2와 5의 묶어 세기와 뛰어 세기를 통하여 규칙을 발견하게 함으로써 같은 수를 더하기 위해서는 곱셈을 이용하는 것이 편리하다는 것을 발견하게 하거나 깨닫게 한다.

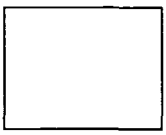
2. 사각형의 개념에 대한 발전적 수학학습

7차 수학과 교육과정(교육부, 1997)을 살펴보면, 3-가 단계에서 직사각형, 정사각형의 개념을 학습하고, 4-나 단계에서 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형 등의 개념을 이해하고, 사각형의 성질을 알도록 하고 있다. 정승진(1998)은 개념도를 이용하여 사각형의 개념에 대한 구조적인 지식을 조사하였는데, 학생들은 각 도형의 정의를 알고 있어도 각 도형들간의 위계와 구조에 대해서 잘 연결시키지 못함을 지적하였다. 이는 학생들이 도형을 학습할 때 각각의 도형을 서로 다른 별개의 도형으로 학습하였기 때문이다. 다음과 같이 학생들에게 부정을 통하여 발전적으로 평면 도형의 개념을 학습시킨다면 학생들은 도형을 개념을 좀더 쉽게 구조화시키고 그 위계를 쉽게 파악할 수 있을 것이다.

①긍정의 단계

3-가 단계에서 정사각형과 직사각형의 개념을 학습하였으므로 정사각형의 개념을 이용하여 점차 포괄적인 개념으로 학습을 진행한다.

· 다음과 같은 사각형은 무슨 사각형인지 알아보자.

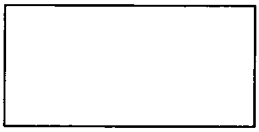


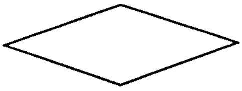
네 변의 길이가 모두 같고, 네 각이 직각인 사각형

②부정의 단계

다음과 같이 정사각형의 조건 중에서 한가지를 부정하여 정사각형이 아닌 새로운 도형이 만들어짐을 학생들이 깨닫게 한다.

· 다음과 같이 사각형은 무슨 사각형인지 알아보자


네 각이 직각인 사각형


네 변의 길이가 모두 같은 사각형

위의 문제에 대해서 학생들은 정사각형의 조건 중에서 한 가지 조건을 부정함으로써 정사각형이 아닌 새로운 도형이 만들어진다는 것을 인식하게 될 것이다.

③지양의 단계

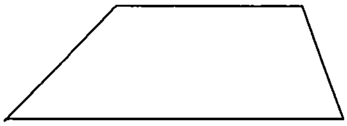
학생들이 새로운 도형에 대하여 충분히 인식하였을 때 교사는 새로운 도형에 이름을 붙여주기 위하여 새로운 기호를 도입하는 것이 좋을 것이라는 의견을 제시하고 학생들에게 이 도형의 특징을 가장 잘 나타낼 수 있는 이름을 짓도록 해보고 나서 그 도형의 이름을 제시한다. 그리고 나서, 새로운 도형과 정사각형과의 같은 점과 다른 점을 찾아보게 하여 각각의 도형에 대한 성질을 발견하게 한다.

이와 같은 단계의 반복에 의해서 평행사변형과 사다리꼴도 도입하면 된다. 현재 4-나 단계의 교과용 도서에서는 사다리꼴에서부터 시작하여 평면 도형의 개념을 도입하고 있는데 부정을 통한 발전적 수학학습의 전개에 따라 다음과 같이 평면 도형의 개념을 도입할 수 있다.

①긍정의 단계

사다리꼴에 대한 학습이 이루어진 다음에 교사는 다음과 같이 학습을 시작할 수 있다.

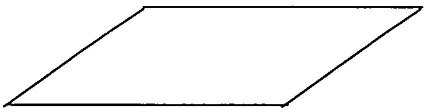
· 다음과 같은 사각형은 무슨 사각형인지 알아보자.


마주 보는 한 쌍의 변이 평행인 사각형

②부정의 단계

다음과 같이 사다리꼴의 조건을 부정하여 사다리꼴이 아닌 새로운 도형이 만들어짐을 학생들이 깨닫게 한다.

· 다음과 같이 사각형은 무슨 사각형인지 알아보자


마주 보는 두 쌍의 변이 평행인 사각형

위의 문제에 대해서 학생들은 사다리꼴의 조건에 대해서 부정하였으나 이 도형 역시 사다리꼴임

을 인식할 수 있을 것이다. 그러나 이 도형과 기존의 사다리꼴을 비교했을 때 다른 점이 분명히 존재하기 때문에 이를 차별화하기 위해서 새로운 도형으로 인식할 필요성을 깨달아야 한다.

③지양의 단계

학생들이 새로운 도형에 대하여 충분히 인식하였을 때 교사는 새로운 도형에 이름을 붙여주기 위하여 새로운 기호를 도입하는 것이 좋을 것이라는 의견을 제시하고 학생들에게 이 도형의 특징을 가장 잘 나타낼 수 있는 이름을 짓도록 해보고 나서 그 도형의 이름을 제시한다.

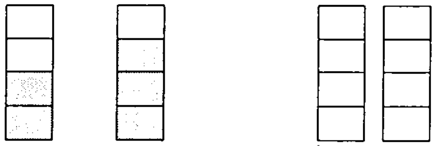
3. 추상화 과정에서 부정을 통한 발전적 수학수업

일반적으로 수학수업은 구체물→반구체물→추상화의 과정을 통하여 이루어진다. 특히 저학년의 경우에는 구체물을 이용한 활동이 강조되고 있고, 고학년으로 갈수록 점점 반구체물을 이용한 수업이 많아진다. Bruner는 아동의 지적 발달을 활동적 표현(enactive representation), 영상적 표현(iconic representation), 상징적 표현(symbolic representation)의 순서로 표현수단의 증대와 그 사이의 조정능력의 증대로 보고 있다. 학문의 기본 원리나 구조를 아동의 능력에 맞추어 구체적인 활동적 양식으로 제시할 수도 있고, 시각적 표현이나 추상적인 기호적 표현을 하여 제시할 수도 있다는 것이다. 이때 학문의 기본원리나 구조 자체는 마찬가지이고 그 표현양식만이 바뀌었다고 생각할 수 있다(김응태 외, 1988).

이러한 EIS이론의 전개에서 중요한 것은 활동적 표현→영상적 표현→상징적 표현 활동을 단계대로 진행하는데 있어서 각각의 단계를 어떻게 연결시키는 가이다. 교과서에 보면 실생활 장면을 통해서 구체적 활동을 하고, 그림이나 수직선을 통해서 반구체적으로 활동한 후 추상화시키는데 학생들이 각각의 연결 고리를 찾지 못할 경우에는 각각의 단계를 독립적인 요소로 생각할 수 도 있다. 이러한 경우에는 각각의 활동 자체가 학생들에게는 또 다른 학습 부담으로 작용하게 되어 오히려 역효과를 가져 올 수 있다. 요즘 학생들이 학원 선생님이 더 잘 가르친다고 생각하는 이유 중에 하나가 이런 요인 때문이라고 본 연구자는 생각한다. 즉, 학교 선생님은 교과서에서 제시하는 순서대로 각각의 단계에 따라 교수학습을 진행하지만 학생들이 그 각각의 단계의 연결에 대해서 그 필요성과 중요성을 인식하지 못하기 때문에 수학이 어렵게만 여겨지는 것이다. 그러나 학원에서는 이러한 각각의 단계를 거두절미하고 문제를 푸는 방법만 간단하게 설명하기 때문에 학생들은 오히려 학원 선생님의 설명을 선호하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 왜 다음 단계로 진행하는 것이 좋은지 그 이유에 대해서 학생들이 절실하게 깨닫게 만드는 것이 중요하다. 즉 이전 단계를 부정하고 새로운 방법을 찾으려는 경험이 필요하다.

4-나 단계의 교과용도서(교육부, 2001)에서는 분모가 같은 분수의 덧셈을 생활 속의 장면으로 "동생은 사과의 2/4을 먹었고, 형은 3/4를 먹었다. 동생과 형이 먹은 사과는 얼마인지 알아보아라"와 같은 문제를 제시한 후, 다음과 같은 활동을 소개하고 있다.

활동1 $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$을 어떻게 계산하는지 알아보아라.



오른쪽 그림에 $\frac{2}{4}$만큼 색칠하여라. 이어서 $\frac{3}{4}$만큼 색칠하여라.

$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$은 얼마라고 생각하는가?

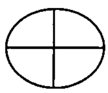
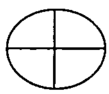
$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{\square}{\square}$ $\quad$ $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\square\frac{\square}{\square}$

왜 그렇게 생각하였는가?

여기서 생각해볼 문제는 반구체물을 어떤 의미로 사용했는가이다. 단지 덧셈을 위한 보조 수단으로 반구체물을 사용하였을 뿐, 영상적 활동이라고 보기는 어렵다. 그리고, 사과를 반구체물로 나타낸다면 원으로 표현하는 것이 더 바람직할 것이다. 여기서 중요한 것은 분수의 계산 결과가 가분수가 되고 이것을 대분수로 고쳐야 됨을 학생들이 인식해야 하는데 "이어서"라는 표현에 의해서 학생들이 생각할 거리를 차단해 버렸다. 부정을 통한 발전적 수학학습으로는 다음과 같이 전개해 볼 수 있다.

①긍정의 단계

동생과 형이 먹은 사과를 다음 그림에 색칠하여, 동생과 형이 먹은 사과는 얼마인지 알아보아라.

 동생이 먹은 사과  형이 먹은 사과

4-가 단계에서 분수의 덧셈을 제대로 배운 학생이라면 동생과 형이 먹은 사과의 양은 5/4라는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 형과 동생이 먹은 사과를 또 다른 그림으로 표현하지 않고도 이미 그려놓은 그림을 보고 그 답을 알 수 있다. 교과서에서처럼 "이어서"라는 표현은 다분히 대분수의 값을 의도적으로 구하게 하기 위해서 그렇게 한 것이다. 그러나 모든 분수의 계산을 대분수로 나타낼 필요는 없다고 생각한다. 대분수로 나타내면 그 크기를 쉽게 알 수 있다는 장점이 있지만 문제 상황에 따라 오히려 가분수만으로도 충분히 의미가 있을 수 있다. 따라서, 답을 대분수로 나타내기 위해서는 그것의 필요성을 학생들이 인식하게 해야 한다.

②부정의 단계

다음 활동을 통해서 학생들은 그림과 같은 반구체물을 이용한 문제해결의 불편함을 느끼고 그러한 과정 중에서 분수의 덧셈의 알고리즘을 자연스럽게 깨닫게 될 것이다.

· 그림을 그려서 $\frac{5}{8}$와 $\frac{7}{8}$의 합을 구하여라.

· 그림을 그려서 $\frac{9}{14}$와 $\frac{7}{14}$의 합을 구하여라.

· 그림을 그려서 $\frac{11}{20}$과 $\frac{17}{20}$의 합을 구하여라.

③지양의 단계

다음과 같은 문제해결을 통해서 분수의 덧셈에 대하여 상징적 표현이 이루어지게 한다.

$\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=$ $\frac{9}{14}+\frac{7}{14}=$ $\frac{11}{20}+\frac{17}{20}=$

이상으로 부정을 통한 발전적 수학학습 방안에 대하여 살펴보았다. 부정을 통한 발전적 수학학습에서 무엇보다 중요한 것은 수학적 지식의 연결성을 강조하고 그 연결을 발전적 형태로 전개해야 하며 특별히 발전의 필요성을 학생들 스스로 강하게 깨닫고 발전을 위하여 그 이전의 지식을 부정하여 좀더 정교하고, 쉽고, 간결한 형태의 발전을 지향하게 하는 것이다.

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 발전적 수학학습을 수학적 대상을 고정된 것으로 보지 않고, 하나의 결과가 얻어졌더라도 보다 더 나은 방법을 알아본다거나 또는 이를 바탕으로 보다 일반적인, 보다 새로운 것을 발견하려는 것으로 정의하고, 발전적인 수학학습에 대한 다양한 이론을 고찰하였고 특히, 부정을 통한 발전적 학습 전개의 방법 및 과정에 대하여 분석함으로써 발전적 수학학습에 대한 방향을 탐색하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 수학학습에서 발전적 생각은 보다 더 나은 방법을 찾으려는 것으로 가다끼리는 수학을 발전적 관점에서 보았을 때, 수학교육에서 길러야할 사고중의 하나로 발전적 생각을 강조하고 있다. 수학을 발전적 관점에서 보는 것은 기존의 수학적 지식을 답습하여 그 기능을 익히는 것보다는 수학을 고정된 것으로 보지 않고 끊임없이 창조, 발전시키는 대상으로 생각하는 것이다.

둘째, 발전적 생각을 함양하기 위한 방법으로 가다끼리는 문제의 조건을 변경하는 방법과 문제를 보는 관점을 변경하는 방법을 권장하고 함수적 사고와 What if not?을 강조하였다. 문제의 조건을 변경하는 것은 어떤 사상(事象)에 대해 그것을 이용할 수 있는 경우를 적극적으로 찾아보려는 생각이고, 또한 그 사상을 수정하지 않고는 적용할 수 없는 경우를 적극적으로 찾기 때문에 대상을 발전적으로 보려는 생각이다. 즉, 주어진 문제의 조건의 일부를 다른 것으로 대체하거나 조건을 완화하든지, 문제의 장면을 바꾸는 것으로 문제설정과 같은 것으로 해석할 수 있다. 관점 변경에 의한 발전은 한가지 관점에 고정되지 않고 관점을 달리하여, 여러 가지 방법과 성질을 더 찾아보려는 것으로 어떤 한 방법으로 답을 구했더라도 이것으로 그치지 않고, 다시 다른 방법, 또는 보다 나은 방법이 없는 지에 대해서 궁리하도록 하는 것이다. 이와 같이 관점을 달리하여 여러 가지 방법을 생각함으로써 수학 문제는 오직 한가지의 바른 해법만이 존재한다는 고정적인 생각을 하지 않게 되며, 자신의

힘으로 여러 가지 해법, 여러 가지 접근 방법을 생각할 수 있음을 인식하게 된다. Polya 또한 문제해결단계에서 반성의 단계를 설명하면서 여러 가지 방법으로 문제를 풀어 볼 것을 권고하고 있다.

셋째, Hegel의 변증법은 "변화"를 설명하는 논리로 우리가 발전적인 변화를 지향할 때 거쳐야할 역동적인 과정을 잘 설명해 주기 때문에 발전의 논리로써 이용할 수 있고, 특히 부정의 개념은 사물에 존재하는 부정적인 측면을 부정하여 새로운 발전을 기하는 역동적인 역할을 한다.

넷째, 변증법적인 부정을 통한 발전적 수학학습은 형식논리학적인 모순을 해결하는 방법과 변증법적인 모순을 해결하는 두 가지 관점에서 살펴볼 수 있었다. 첫 번째는 Brousseau 와 Lakatos의 견해로 문제해결과정 자체 내에 포함되어 있는 형식논리학적 모순을 부정을 통하여 점차 수학적으로 정교하고 완전한 상태로 발전시키는 것이다. Brousseau는 행동의 변증법, 형식화의 변증법, 타당화의 변증법을 거치면서 기존의 단계에 존재하는 형식논리학적으로 모순을 부정을 통하여 해결해나가는 과정을 설명하였다. Lakatos 역시 증명과 반박이라는 과정을 통해서 증명을 개선해 나가는 과정을 설명하였는데 바로 반박의 과정이 바로 기존의 증명에서 모순된 부분을 부정하고 새로운 발전적인 모델을 완성해 나가는 과정을 설명하고 있다. 두 번째는 배종수와 RME의 견해로 형식논리학적으로 모순은 없지만 그 해결과정을 좀더 쉽고 간단한 형태로 발전시키는 것이다. 즉, 수학적으로는 아무런 모순이 없지만 그 방법이 가지고 있는 불편함이나 복잡함과 같은 부정적 측면을 깨닫고 그것을 부정하여 좀더 쉽고, 간편하고, 간결한 방법을 찾는 것이다.

다섯째, 부정을 통한 발전적인 수학학습 단계로 긍정의 단계, 부정의 단계, 지양의 단계를 설정하였다. 긍정의 단계는 새로운 문제상황을 해결하는데 기존의 알고리즘과 수학적 지식을 이용하는 단계로 이 단계에서 학생들은 주로 유추적 사고를 이용하여 문제를 해결하거나 교사의 안내에 의해서 새로운 문제 상황을 해결한다. 부정의 단계는 새로운 문제 상황을 기존의 알고리즘이나 수학적 지식으로는 해결하기에는 문제 해결과정이 너무 복잡하거나 난해하여 문제를 해결하는데 어려움을 겪는 단계로 알고리즘이 갖고 있는 부정적인 측면을 인식하는 단계이다. 지양의 단계는 부정의 단계에서 발견한 부정의 대상을 부정하여 기존의 알고리즘을 대체 할 수 있는 보다 발전적인 알고리즘을 지양하는 단계이다.

여섯째, 부정을 통한 발전적 수학학습에 따른 교수-학습 방안을 살펴보았는데 중요한 것은 수학적 지식의 연결성을 강조하고 그 연결을 발전적 형태로 전개해야 하며 특별히 발전의 필요성을 학생들 스스로 강하게 깨닫고 발전을 위하여 그 이전의 지식을 부정하여 좀더 정교하고, 쉽고, 간결한 형태의 발전을 지향하게 하는 것이다.

참 고 문 헌

강옥기 (2000). 수학과 학습지도와 평가론, 서울: 경문사.
교육부 (1997). 초등학교 7차 교육과정. 대한교과서주식회사.

_____ (2000). 수학 2-가. 대한교과서주식회사.

_____ (2001). 수학 4-나. 대한교과서주식회사.

김응태 · 박한식 · 우정호 (1988). 수학교육학개론. 서울: 서울대학교 출판부.

김종기 역, M. 볼프 (1997). 모순이란 무엇인가?. 서울: 동녘.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석. 서울대학교 대학원 박사학위 논문, 서울: 서울대학교.

배종수 (1999). 초등수학교육 내용지도법, 서울: 경문사.

우정호 (2000). 수학학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 역, I. Lakatos. (1991). 수학적 발견의 논리. 서울: 민음사.

이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배 공역, 가다끼리 (1999a). 수학적인 생각의 구체화. 서울: 경문사.

_____ (1999b). 문제해결과정과 발문분석. 서울: 경문사.

이원복 (1995). 현대문명진단 2. 서울: 조선일보사.

장상호 (1999). 학문과 교육(상). 서울: 서울대학교 출판부.

정승진 (1998). 개념도를 이용한 구조적 지식의 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문. 청주: 한국교원대학교.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문, 서울: 서울대학교.

정은실 (1995). Polya의 수학적 발견술 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문, 서울: 서울대학교.

한길준 · 정승진 (2000). 변증법적 방법을 이용한 분수의 나눗셈 지도 방안 고찰, 교과교육연구, **4**, pp.127-148, 서울: 단국대학교부설교과교육연구소.

_____ (2001). 역사-발생적 원리에 따른 변증법적 방법의 수학학습지도 방안, 수학교육 논문집 **12**, pp.67-82. 서울: 한국수학교육학회.

Brown, S. & Walter, M. (1970). What if not? An Elaboration and School Illustration, *Mathematics Teaching*, **51**, pp.9-17.

Cooper, B.N.; Sutherland, M.R. & Warfield, V. (1999). *Theory of Didactical Situation in Mathematics*. 제 25회 수학교육학 집중세미나. 서울: 대한수학교육학회.

Harold, I.B. (1977). *Preception, Theory and Commitment: The New Philosophy of Science*. The university of Chicago Press. 신중섭(역) (1987). 새로운 과학철학. 서울: 서광사.

Klein, M. (1973). *Why Johnny Can't Add?*. NY.: St. Martin' s Press.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Doubleday.

Silver, E.A. (1995). A Study on the Mathematical Problem Posing, *The Journal of the Institute of Science Education*, **16**.

Verschaffel, L. & Corte, E.D. (1996) Number and Arithmetic. In Alan J. Bishop, Ken Clements, Cristine Keitel, Jeremy Kilpatrik & Colette Laborde(Eds.) *International Handbook of Mathematical Education*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.