韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 693-700.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 693-700.

대학수학에서 비유클리드 기하의 지도

김 병 무 (충주대학교)

대학수학(미분적분학의 이해, 생활과 수학)수업에서, 공간좌표 단원과 도형편을 지도할 때, 구체적인 모델을들고 또, 구체적인 예- 쌍곡기하에서는, i)삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180도 보다 작다. ii) 피타고라스 정리가 성립하지 않는다. iii) 세 내각의 크기가 90도이고 한 내각의 크기가 90도 보다 작은 사각형이존재한다.는 예를 들어 유클리드 기하와 쌍곡기하에 대해 비교 설명하며 수업에 흥미를 불러 일으키고, 새로운 세계에 대한 생각을 할 수 있는 기회를 제공한다.

I 서 론

유클리드 기하에 대해 기본적인 이해를 갖고 있는 학생들을 위해 수학 교과서를 읽는 것만으로 수학의 재미를 느끼는데 한계에 도달할 경우 자료를 제공하려고 한다. (김병무, 1997)

대학에 입학한 학생들은 비유클리드 기하에 대해 정규 교육과정에서 다룬적이 거의 없으므로 대부분의 학생들은 유클리드 기하의 평행선 공준(한 직선이 두 직선과 만날 때 동측내각의 합이 그 직각보다 작은쪽에서 두 직선은 만난다)의 변형으로 스코틀랜드의 물리학자이며 수학자인 플레이페어(Playfair, J. 1748-1819)가 1795년에 찾아낸 플레이어 공준(주어진 직선위에 있지 않은 한 점을 지나서 주어진 직선에 평행한 직선은 꼭 하나만 그을 수 있다)을 보고 새로운 세계를 경험하게 될 것이다. (이종우 편저, 2000)

실제로 직선 ℓ과 ℓ위에 있지 않은 점 P를 지나는 ℓ에 평행한 직선은 다음 세 경우가 있다.

1) ℓ에 평행한 직선은 없다. (Spherical Parallel Postulate)

2) ℓ에 평행한 직선은 단 하나 존재한다.(Euclidean Parallel Postulate)

3) ℓ에 평행한 직선은 둘 또는 그 이상 존재한다.(Hyperbolic Parallel Postulate)

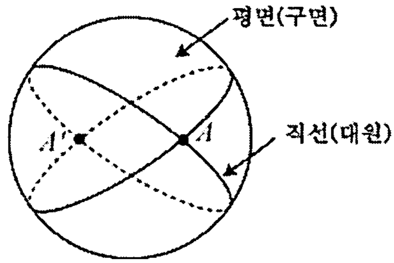
첫 번째 경우는 구면을 이용하여 표현될 수 있다.

Riemann 모형은 유크리드 기하학에서 평면, 직선, 점을 각각 임의의 구, 대원, 구 위의 점으로 바꾼 것을 말한다(<그림 1> 천석현, 1997)

구를 중심을 지나는 평면으로 자를 때 생기는 원을 직선으로 보자는 것인데 구의 대원은 <그림 1>과 같이 반드시 두 점에서 만난다. 상반구 위에 있는 대원을 직선이라 하면 이 직선의 길이는 유

한이고,

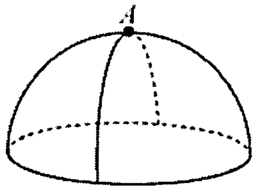
이와같은 직선을 두 개 생각하면 이들은 반드시 한 점 A에서 만나게 된다<그림 2>. 그러므로 주어진 직선 위에 있지 않은 한 점을 지나 이 직선과 만나지 않는 직선은 하나도 그을 수 없다.



<그림 1>

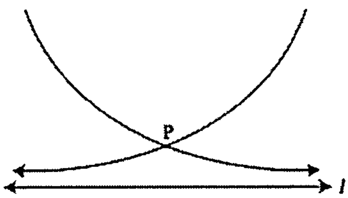
두 번째 경우는 중·고등학교 교육과정에서 다루어진 것이다.

세 번째 경우는 쌍곡기하로 이제부터 주로 다룰 것이다. 직선 ℓ과 그 위에 있지 않은 점 P를 지나는 평행한 직선은 점 P와 ℓ로 이루어지는 평면에 적어도 두 개 존재한다. <그림 3> (이종우 편저, 2000)



<그림 2>

Ⅱ. 본 론



<그림 3>

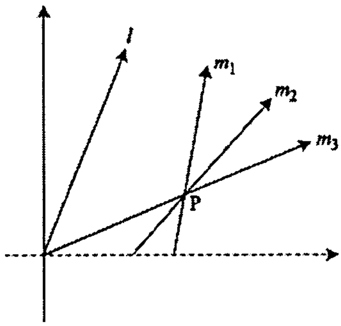
1. 쌍곡기하의 모델 알아보기

유클리드 공간에서 새로운 쌍곡 평행선 공준(Hyperbolic Parallel Postulate)를 만족하는 모델을 만들기 위해 평면의 일부를 제거할 필요가 있다. Beltrami-Poincare(B-P) Half-Plane 모델이 쌍곡기하와 그 성질을 표시하는데 보통 이용되는 표준 모델중의 하나이다. 이 모델은 보통의 평면좌표를 이용하지만 x축 위 또는 x축 아래 모든 점을 제외한다.

유클리드 평면 위에서 ax+by+c=0 (y>0) 인 직선을 생각하면 모든 경우에 쌍곡 평행선 공준이 성립한다는 것이 보여진다.

<그림 4>는 직선 ℓ과 그 위에 있지 않은 점 P를 나타낸다.

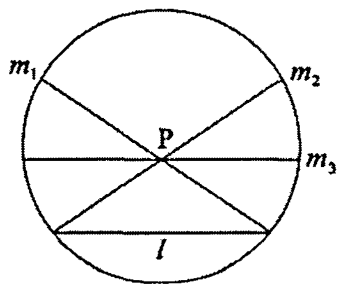
P를 지나고 ℓ에 평행한 무한히 많은 직선들(m_1 m_2 m_3 ,…)이 있음을 알 수 있다.



<그림 4>

또 다른 Klein 모형을 소개하면, Euclid 기하학에서 말하는 평면, 직선, 점을 각각 임의의 원의 내부, 현, 내부의 점으로 바꾼 것이다.<그림 5>

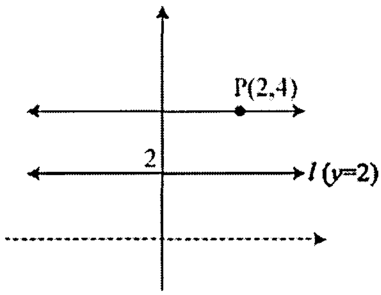
이 모형을 이용하면 직선 ℓ 위에 있지 않은 점 P를 지나 직선 ℓ에 평행한 직선은 무한이 있을 수 있음을 알 수 있다. (천석현, 1997)



<그림 5>

그러나 쌍곡 평행선 공준이 모든 경우에 성립하는 것은 아니다.

x축에 평행한 직선 ℓ (y=2)와 P(2, 4)를 생각하면 점P를 지나고 ℓ에 평행한 직선은 단 하나이다. (그림6)



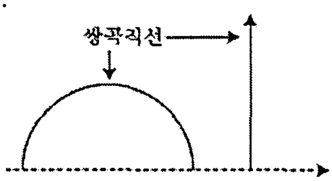
<그림 6>

모든 경우에 쌍곡 평행선 공준을 만족시키는 점과 직선으로 이루어진 모델을 얻기 위해 직선에 대한 유클리드 개념을 버리고 대신 반 평면 위쪽에 있는 x축 위에 중심을 갖는 반원과 x축에 수직인 수직선을 직선 또는 h-직선이라 하면, B-P Half-Plane 모델에서 점과 직선이 정의된 것이다. (그림7)

점 : 모든 (x, y) $(y>o)$의 집합

직선 : $(x-a)+y^2 \ =r^2$ $(y>o)$꼴의 반원

$x=k$(상수) $(y>o)$꼴의 사선

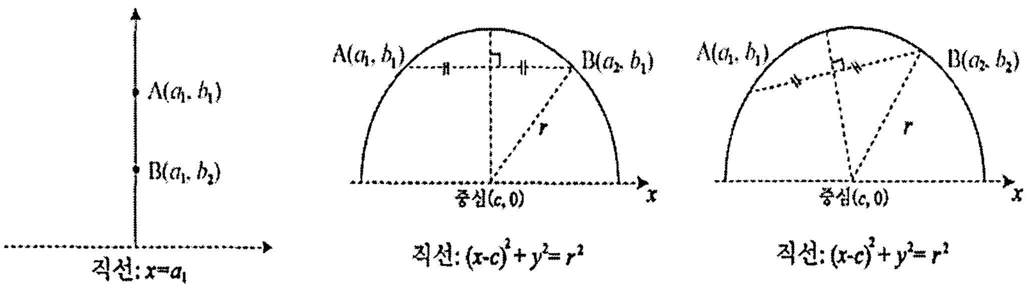


<그림 7>

이와같이 정하면 여러 가지 기하의 공리와 정리를 조사할 수 있다.

이를테면, 임의의 두 점 A, B를 지나는 직선은 항상 유일하다는 것을 증명할 수 있다.

<그림 8>이 이것을 설명한다.

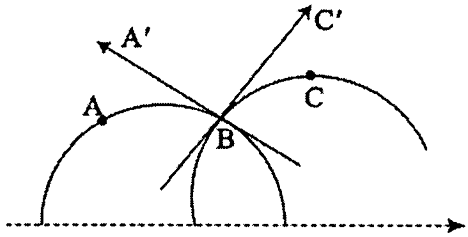


<그림 8>

B-P 모델이 편리한 점은 각의 크기가 유클리드 평면과 일치한다는 것이다.

두 곡선이 이루는 각을 구하기 위해 교점에서 두 곡선에 그은 접선 사이의 각을 구하면 된다. 두 h-직선이 이루는 각을 구하기 위해 이 사실을 이용한다.

<그림 9>는 쌍곡각ABC를 이루는 두 h-직선을 나타낸다.



<그림 9>

점 B에서 각 h-직선의 접선은 직선 A′B와

직선 BC′이고

$\angle ABC = \angle A'BC'$ 이다.

거리의 개념은 간단하지 않다.

쌍곡기하에서 거리에 대한 적절한 개념을 개발하기 위해 반원인 쌍곡직선 ℓ 위에 두 점 A, B를 생각하자.

x축 위에 있는 반원 위의 끝점들을 M, N이라 하자.

여기서 쌍곡거리로서 $AB\to\infty$ (AB는 두 점 사이의 거리를 나타낸다.)일 때, $AM\to 0$ 또는 $AN\to 0$ 인 함수를 찾으려고 한다. 또 쌍곡거리로서 $AB\to 0$일 때, A가 B에 접근하는 조건을 필요로 한다.

다음과 같이 점에 대한 좌표를 주어서 이것이 가능해질수 있다.

A[x], B[y]($x<y$)와 N[0], M[180] 이 때, 쌍곡거리 AB(이하 h-AB로 나타낸다.)는 x와 y의 어떤 함수이다.

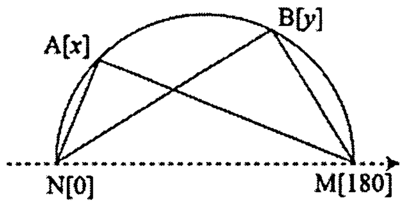
h-AB = f(x,y)

위의 제한들은 다음과 같이 쓸 수 있다.

x=y이면, f(x,y)=0, x 또는 $y\to 0$이면 $f(x,y)\to\infty$,

x 또는 $y\to 180$이면 $f(x,y)\to\infty$,

이러한 제약을 만족하는 함수의 예는



<그림 10>

$f(x,y) = |\ln y - \ln x - \ln(180-y) + \ln(180-x)|$

이다. 로그의 성질을 이용하여 간단히 하면 $f(x,y) = \left|\ln\frac{y(180-x)}{x(180-y)}\right|$

마지막으로 유클리드 거리 개념으로 돌아와 현의 길이를 호의 길이로 대체한다.

즉, y= 호BN= 현BN 이고 x= 호AN= 현AN, 등…

이와같이 쌍곡거리에 대한 다음 정의에 도달한다.

h-AB = $\left|\ln\frac{AM\cdot BN}{BM\cdot AN}\right|$ {M, N은 x축 위에 반원의 끝점이고 AN, BN, BM과 AN은 각 점들 사이에 유크리드 거리이다.} (그림10) (Eric Milou, 2000)

2. 쌍곡삼각형(Hyperbolic Triangle)

이제 쌍곡삼각형에서 세 내각의 크기의 합은 180° 보다 작다는 것을 앞에서 정의한 각의 크기를 이용하여 세각의 크기를 구하여 알아보자.(계산은 Mathematica의 도움을 받는다.)

세가지의 h-직선이 주어진다.

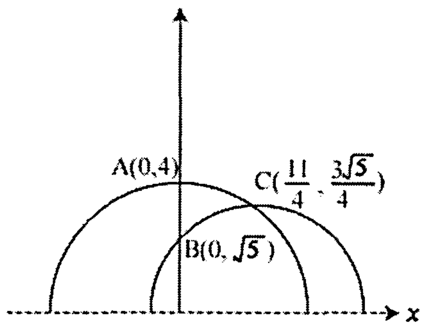
$x^2+y^2=16,\ \ y>0$

$(x-2)^2+y^2=9,\ \ y>0$

$x=0,\ \ y>0$

이들을 나타내면 (그림 11)과 같이 쌍곡삼각형이 만들어진다.

각 교점을 구하면 점A(0, 4), 점B(0, $\sqrt{5}$), 점C $\left(\frac{11}{4}, \frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$



<그림 11>

⊿ABC의 세각의 크기를 구하여 보자

각A의 크기를 구하는 것은 쉽다. A에서의 접선과 사선 BA가 이루는 각을 구하면 되므로 ∠A=90° 이다.

∠C의 크기를 구하기 위해 점 C에서 두 반원에 그은 접선의 기울기를 m_1 ,m_2 라 하고,

음함수 미분법을 이용하여 점 C $\left(\frac{11}{4}, \frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$에서 접선의 기울기를 구하면 된다.

$$m_1 = -\frac{11}{3\sqrt{15}},\ m_2 = -\frac{1}{\sqrt{15}} \quad \text{따라서,} \quad \tan C = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}\right| = \frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$C = \tan^{-1}\frac{15}{7}$$

∠B의 크기는 사선 BA와 반원 위의 점 B에서 그은 접선이 이루는 각을 구하면 된다.

정선의 기울기는 $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 따라서 $\angle B = 90° - \tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서, $\angle A+\angle B+\angle C = 90° + ArcTan[N[\frac{\sqrt{15}}{7}]] \times \frac{180}{\pi} + 90° - ArcTan[N[\frac{2}{\sqrt{5}}]] \times \frac{180}{\pi}$

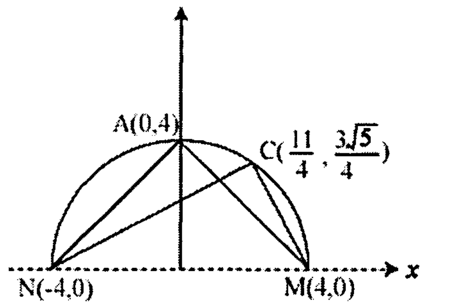
$$= 167.145° \ \langle\ 180°$$

한편, ⊿ABC가 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리가 성립하는가 알아보자

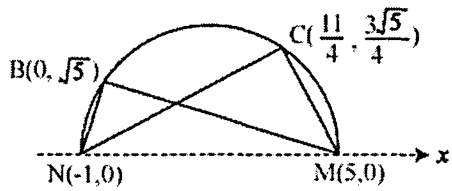
앞의 정의에 의해 삼각형의 세 변의 길이를 다음과 같이 구한다.

x=0 위에 있는 선분 AB의 길이(AB로 나타낸다. 이하 다른 선분의 길이도 같은 표현을 쓴다.)는

$$AB = \left|\ln\frac{AM}{BM}\right| \quad \text{(M=N이므로)}$$



<그림 12>



<그림 13>

따라서, AB = $\ln\frac{4}{\sqrt{5}}$

선분AC의 길이는 (그림 12)에서,

AC= $\left|\ln\frac{AM\cdot CN}{CM\cdot AN}\right|$

A(0, 4), C($\frac{11}{4}$, $\frac{3\sqrt{15}}{4}$), M(4, 0), N(-4, 0)

AM = $\sqrt{4^2+4^2}$ = $\sqrt{32}$

CN = $\sqrt{(\frac{11}{4}+4)^2+(\frac{3\sqrt{15}}{4})^2}$ = $\frac{864}{16}$

= $\sqrt{54}$

CM = $\sqrt{(4-\frac{11}{4})^2+(\frac{3\sqrt{15}}{4})^2}$ = $\sqrt{10}$

AN = $\sqrt{4^2+4^2}$ = $\sqrt{32}$

따라서, AC = $\left|\ln\frac{\sqrt{32}\sqrt{54}}{\sqrt{10}\sqrt{32}}\right|$ = $\ln\sqrt{\frac{27}{5}}$

마지막으로 선분 BC의 길이를 구하면,

(그림13)에서,

$$BC = \ln\left|\frac{BM\cdot CN}{CM\cdot BN}\right|$$

B(0, $\sqrt{5}$), C($\frac{11}{4}$, $\frac{3\sqrt{15}}{4}$), M(5, 0), N(-1, 0)

BM = $\sqrt{25+5}$ = $\sqrt{30}$

CN = $\sqrt{(\frac{11}{4}+1)^2+(\frac{3\sqrt{15}}{4})^2}$ = $\sqrt{\frac{90}{4}}$ = $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

CM = $\sqrt{(\frac{11}{4}-5)^2+(\frac{3\sqrt{15}}{4})^2}$ = $\sqrt{\frac{54}{4}}$ = $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

BN = $\sqrt{1+5}$ = $\sqrt{6}$

따라서, BC = $\ln\frac{\sqrt{30}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{6}}$ = $\ln\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\angle A = 90^\circ$ 이므로 $BC^2 = AB^2 + AC^2$ 이 성립하는가 알아보면

$$(\ln \frac{5\sqrt{3}}{3})^2 = (\ln \frac{4}{\sqrt{5}})^2 + (\ln\sqrt{\frac{27}{5}})$$

1.12388 ≑ 0.33823 + 0.0684472 이 되어 성립하지 않는다.
= 0.406677

그러나 Hyperbolic Pythagorean Theorem 이 있다.
Cosh(BC) = Cosh(AB) · Cosh(AC) 가 성립하는지 확인하여 보자.

$$c = \text{Cosh(BC)} = Cosh\left[Log\left[\frac{5\sqrt{3}}{3}\right]\right] = 1.61655 = \frac{14}{5\sqrt{3}}$$

$$d = \text{Cosh(AB)} \cdot \text{Cosh(AC)} = Cosh\left[Log\left[\frac{4}{\sqrt{5}}\right]\right] \times Cosh\left[Log\left[\sqrt{\frac{27}{5}}\right]\right] = 1.61655 = \frac{14}{5\sqrt{3}}$$

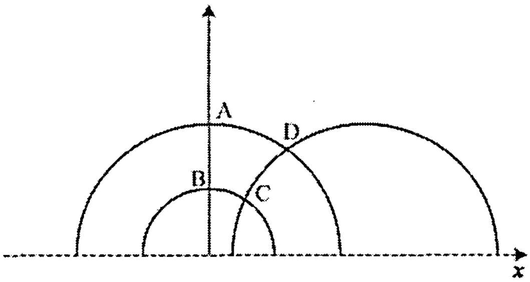
c == d
True

3. 쌍곡사각형

세 내각의 크기가 각각 90˚이고 나머지 한 내각의 크기가 90˚보다 작은 사각형이 존재하는가 알아보자.

네 개의 h-직선이 다음과 같이 주어진다.

$x=0,\ y>0$
$x^2 + y^2 = 1,\ y>0$
$x^2 + y^2 = 4,\ y>0$
$(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 4,\ y>0$



<그림 14>

이들을 나타내면
(그림 14)와 같고, 점 A(0, 2), 점 B(0, 1),
점 C($\frac{5}{4\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$), 점 D($\sqrt{2}, \sqrt{2}$)이다.

∠A, ∠B, ∠C, ∠D 의 크기를 각각 구하면, ∠A, ∠B 의 크기는 A, B에서의 두 반원 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선과 직선 x=0이 이루는 각이므로 각각 90˚이다.
∠D의 크기는 음함수미분법을 이용하면 점 D에서 두 반원 $x^2 + y^2 = 4$, $(x-2\sqrt{2})^2 + y^2 = 4$ 에 그은 접선의 기울기 $\frac{dy}{dx} = -1$, $\frac{dy}{dx} = 1$ 이 되고, 기울기의 곱

이 -1 이므로 90˚가 된다.

한편, 점 C에서 두 반원 $x^2+y^2=1$, $(x-2\sqrt{2})^2+y^2=4$ 에 그은 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 하면 $m_1=-\frac{5}{\sqrt{7}}$, $m_2=\frac{11}{\sqrt{7}}$

따라서, $\tan C=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1 m_2}\right|=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$$C=\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3} < 90^\circ$$ 가 되어

세 내각의 크기는 각각 90˚이고 나머지 한 내각의 크기가 90˚보다 작은 사각형이 존재함을 확인할 수 있다.

Ⅲ. 결 론

하나의 직선 밖에 있는 한 점을 지나고 이 직선과 평행인 직선은 단지 한 개 밖에 그을 수 없다는 것이 유클리드기하이다. 그런데 이러한 기하 이외에 평행선이 한 개만이 아니고 적어도 두 개 그릴 수 있는 경우 어떠한 차이가 일어나는지 구체적인 몇 개의 상황에 대해 알아보았다. 이를 통해 학생들은 새로운 세계를 다른 각도에서 알아보고 유클리드 기하에서 성립하는 여러 가지 성질들을 직관적으로 또는 구체적으로 새로운 정의를 통해 확인할 기회를 스스로 찾게되면 미지의 세계에 대한 도전에 자극을 받을 수 있고 지적 호기심을 충족시킬수 있는 영역을 넓혀 나갈 수 있을 것이다. 물론 이들에 대한 체계적인 증명이 참고문헌의 책들에 소개되어 있으나 학생들의 이해를 돕도록 구체적인 모델을 통해 간단한 계산으로 확인할 수 있게 하였다. 그리고 그들이 교실에서 이와 같은 것을 대화할 수 있고 구면기하에서는 삼각형의 내각의 크기의 합이 180˚보다 크다는 것을 포함하여 유크리드 기하와 대비되는 정리들에 대해 시간을 보낸다면 이것이 바로 가르치는 교수에 대한 보상이 될 것이다.

참 고 문 헌

김병무 (1997). 흥미 및 동기 유발을 위한 대학수학 수업자료와 평가, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> **36(2)**

이종우 (2000). 유한과 무한으로의 여행, 서울: 경문사

천석현 (1997). 현대기하학 기하학이란 무엇인가, 서울: 교우사

Eric Milou (2000). A Glance at Hyperbolic Geometry Provides a Challenge to Students'Intuition, *Mathematics and Computer Education* **34(1)**.