

## 인터넷 상의 조작 도구를 이용한 수학교육 프로그램 개발<sup>1)</sup>

조 한 혁 (서울대학교)

최 경 식 · 김 민 정 (서울대학교 대학원)

저학년 학생에게도 적절한 표상이 제공되기만 하면 고등 지식을 수용할 수 있다는 사실은 브루너(J.S. Bruner)의 EIS 이론에 의하여 뒷받침 될 수 있다. 이를 위해서는 구체적인 조작이나 시각적인 표상이 제공되어야 한다. 그러나, 실물로써 교구를 제시하는 것은 현실적으로 많은 제약이 따르므로 그 대안으로 컴퓨터 환경에서 제공되는 조작 도구들을 고려해 볼 수 있다. 인터넷 환경은 접근에 있어 용이하며 별도의 비용이 필요 없고 업데이트가 용이하다는 장점을 가지고 있으므로 교구로써의 장점을 갖고 있다. 이에 따라 인터넷 상의 조작 도구를 통한 수학교육 프로그램을 개발하고자 한다.

### I. 서 론

J.S.Bruner 는 EIS 이론에서 어떤 연령의 아동이든지 간에 그 연령에 맞는 언어로 표현되지만 하면, 어떤 과제이든지 학습이 가능하다고 전제하고 있다. 그의 이론에 따르면 표상은 활동적 표상, 영상적(심상적) 표상, 상징적 표상<sup>2)</sup>의 3단계로 발달한다고 한다. 따라서 지식의 전달이 이러한 표상 발달 순서에 맞추어 적절히 제공되기만 하면 어느 연령에서든지 그것이 지도될 수 있다는 것이다. 이 이론은 적절한 표상이 제공되기만 하면 저학년 학생에게는 속진 학습이 가능하며 부진아에게는 심화 학습이 가능하다는 것을 시사하고 있다.

Bruner가 제시한 것처럼 초등 학생에게 적절한 표상을 제공하기 위해서는 구체적인 조작이나 시각적인 표상이 제공되어야 한다. 이를 위해서 구체적인 조작 도구를 통한 활동을 제안할 수 있다. 조작 활동을 통해 Visual Representation 과 Verbal Representation간의 소통을 원활하게 할 수 있다. 즉 구체적이고 시각적인 표상을 의식화하여 말로 구술하고 상징화 할 수 있으며 역으로 수학적 언어로 표현된 부분을 그래프 등을 통해 시각화 할 수 있다.<sup>3)</sup> 그러나 구체적인 조작 활동을 위해서 실물로써 교구를 제시하는 것은 현실적 여건상의 제약, 학생이 직접 조작하게 하기 어렵다는 점, 즉각적으로 피드백이 주어지지 않는다는 점, 단발적 내용으로 끝나버릴 수 있다는 점등의 한계점이 있다.

이런 면에서 특히 Douglas H. Clements 의 경우 Sensory-Concrete와 Integrated-Concrete로

- 
- 1) 본 연구는 2001년도 서울대학교 대학연구센터(팀) 연구과제 지원에 의하여 연구되었습니다.
  - 2) Enactive representation , Iconic representation , Symbolic representation 으로 지칭하고 있다.
  - 3) 이것은 Bruner가 언급한 Iconic Representation과 Symbolic Representation과 연결된다.

'concrete'의 정의 자체를 새롭게 하면서 기존의 조작 도구의 한계를 지적하고 컴퓨터 조작 교구의 가능성을 제안하였다. Sensory-Concrete는 구체적 대상의 도움이 필요한 지식이나 이러한 대상의 조작에 의한 아동들의 지식을 의미하며 Integrated-Concrete의 경우 다른 지식과 연결이 되므로 더 높은 수준의 'concrete'를 의미하는데 조작물 사용의 궁극적인 도달점은 Integrated-Concrete로, 학습자로 하여금 발상을 의미있게<sup>4)</sup> 전환시키는 방법을 생각하는 것이다. 그는 기존의 조작 활동에 대해 "조작물 자체가 학생들에게 개념의 의미를 충분히 수용해 낼 수 있는가", "아동들이 조작물과 초기의 아이디어를 연결시킨다 해도 그러한 조작물을 이용한 물리적 행동은, 학생들에게 일어나기를 바랐던 정신적 활동과 일치한다고 할 수 있는가" 하는 문제점들을 제시하면서 좋은 조작물은 학습자에게 의미 있는 것, 인지적 수학적 구조와 일치하거나 반영할 수 있거나 학습자가 다양한 종류의 지식을 연결짓는데 도와주는 것<sup>5)</sup>이라고 말했다. 이런 점에서 컴퓨터가 실제적 대상과 마찬가지로 학생들에게 개인적으로 의미 있는 표현을 제시할 수 있으며, 표현이 더 다루기 쉽고, 명백하고 안정적이고 확장적이라는 연구에 따라 컴퓨터를 이용해 그러한 역할을 잘 수행해 낼 수 있다고 제안하고 있다.<sup>6)</sup>

실제로 컴퓨터 상의 조작 도구를 제공하기 위한 공간으로써 인터넷은 좋은 교구의 제공 장소가 된다. 인터넷은 누구나 접근할 수 있고, 소프트웨어에 대한 비용이 들지 않으며 업데이트가 용이한 장점을 가지고 있다. 또한 구체적인 것과 상징적인 것을 연결해 생각할 수 있으며 활동적 경험과 대상을 상징적 표현으로 연결할 수 있다. 손으로 그리거나 조작하는 일은 활동 그 자체에 기울여야 하는 집중도가 높기 때문에 수학적 방법으로 깊이 생각하게 되기 어렵다. '인터넷 상에서의 조작 활동'이라는 구체적 조작을 도구로 하여 형식적 조작을 구성할 수 있게 된다.

이에 따라 인터넷 상에 주어진 조작 도구를 통한 대수와 사고력 개발의 영역에서의 프로그램을 개발하고자 한다.

## II. 본 론

### 1. 대수 영역 - 막대기 대수

대수 지도에 있어 핵심적인 요소로 작용하는 변수는 학습자가 대수를 이해하는 데 있어 중요한 역할을 하는 기본 개념이다. 그 동안 변수 지도 및 그에 관련한 방정식, 함수 등에 관한 많은 연구가 있어 왔는데, 컴퓨터를 통한 학습에 있어서도 예외가 아니었다(심규선, 1997).

기존의 대수 교육에서 문제점으로 지적되었던 것 가운데 하나는, 바로 학습자가 문자나 식이 지니고 있는 의미를 모른 채 식을 기계적으로 조작하는 것이었다. 이러한 문제점들을 해결하기 위해서

4) 'meaning full' : 다른 발상들과 상황을 연결시키는 것

5) Integrated-Concrete 지식의 성장에 촉매가 될 수 있는 것이라고 표현하고 있다.

6) Clements, D. H., 1999.

기존의 연구에서는 로고 프로그래밍 언어를 통해서 변수의 필요성을 학습자가 체득하도록 하고, 이것이 수학의 변수로 전이될 수 있도록 하고자 하였다(백영균·류희찬, 1990, p.91). 또한 프로그래밍을 통해서 함수를 정의하는 것을 통해서 변수 및 함수에 대해서도 지도할 수 있다는 연구 결과가 있다(이영란, 1998). 또한 이러한 방법은 현재 긍정적인 것으로 평가되고 있다.

그러나 몇 가지 점에서 프로그래밍을 통해서만 변수 지도를 한다는 것은 문제점을 가지고 있다고 할 수 있다. 이를 위해서는 먼저 변수 개념의 특징을 파악하는 일이 선행되어야 한다. 우선 변수의 개념은 정적 변수와 동적 변수의 2가지 측면을 가지고 있다.<sup>7)</sup> 이 중 실제로 수학의 근본적인 사고 중의 하나는 동적인 변수의 개념이다.<sup>8)</sup> 이러한 동적 변수의 개념은 대수에서 한 변수의 값이 연속적으로 변화할 수 있다는 것과 또한 한 변수에 대해서 다른 변수의 변화에 대한 공변성에 대해서 나타나게 된다. 그러나 이전까지는 정적 변수 중심으로 지도되는 교과 과정에 의해서 동적 변수에 대한 개념은 변수 개념 지도에서 소외되었다. 그러나 Freudental등에 의하여 동적 변수에 대한 지도가 강조되고 있다.

이러한 동적 변수를 지도하기 위해서는 변수를 나타내는 조작 도구가 연속적으로 숫자가 변할 수 있는 대상이어야 하며, 또한 두 대상에 있어서 하나가 변할 때 다른 대상이 함께 변동하는 공변성이 있어야 한다.

이와 같은 성질을 나타내는 조작물을 구성하기 위하여 다음과 같은 환경을 설계하였다.

변수를 나타내기 위해서 초등적인 방법으로 변수를 생각할 때, 자주 쓰는 막대기 형태의 그림을 조작 도구로 선택하였다. 이 때의 막대기는 그 길이가 고정된 막대기가 아닌, 길이가 변하는 막대기이다. 또한 하나의 막대기가 변함에 따라 다른 막대기와의 관계에 따라서 변동한다.

이와 같이 막대기 형태를 통해 변수를 나타내고, 이를 조작해 보는 활동을 통해서 특수한 형태의 2원 1차 연립 방정식에 대한 해결을 지도할 수 있다. 다음의 예를 살펴보자.

형과 동생의 나이의 합이 25이고, 차가 5일 때, 형과 동생의 나이는 얼마인가?

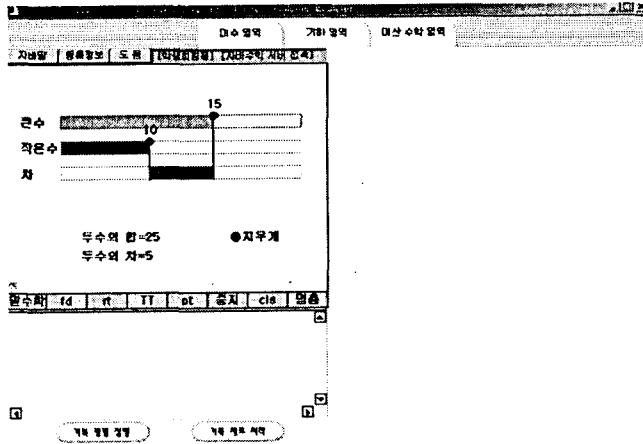
위의 문제의 경우, 일반적인 연립방정식의 형태로 나타내면 다음과 같이 될 것이다.

- 
- 7) 변수 개념은 그 특징에 따라 크게 동적인 측면과 정적인 측면으로 구분된다. 변수의 동적인 측면은 실제로 변하거나 변하는 것으로 가정되는 대상의 운동학적 상태를 나타내는 것이고, 변수의 정적인 측면은 동적인 여러 대상을 동시에 나타내는 것이다. (김남희, 1997, p.1)
- 8) 수세기 동안 '변수'는 물리적, 사회적, 정신적, 수학적 세계에서 실제로 변하는 어떤 것, 또는 변하는 것으로 지각되고, 상상되고, 가정되는 어떤 것을 의미해왔다. 예를 들면, 흐르는 시간, 떨어지는 물, 변하는 기온, 점점 길어지는 낮의 길이 뿐만 아니라 이러한 현상들을 설명하는 변하는 수학적 대상을 의미하였다. (김남희, 1997, p.24)

$$\begin{aligned} x + y &= 25 \\ x - y &= 5 \end{aligned}$$

일반적으로 위의 경우의 변수 설정은 형식적인 변수의 설정으로서 중등 교과서에서 일반적으로 다루어지고 있는 풀이의 시작이다. 위의 두 방정식에 적절한 연산을 가할 때 각각의 답을 구할 수 있게 된다. 이와 같은 풀이법에서 적용된 변수에 대한 개념은 정적 변수의 개념이다.  $x, y$ 가 고정된 어떤(모르는) 수로써 정해져 있다고 가정하고 풀이하였기 때문이다. 그러나 이와는 달리 막대 환경에서는 다음과 같이 풀이할 수 있다.

1. 합을 입력한다.
2. 입력값에 대한 막대가 2개가 주어진다. (큰 수는 형의 나이이고, 작은 수는 동생의 나이이다.)
3. 형의 나이를 점차 줄이다 보면 아래 제시된 숫자가 변동하면서 동시에 동생의 나이도 증가하게 된다.
4. 이때, 형의 나이와 동생의 나이의 차가 문제의 답과 일치하는 경우가 생긴다.



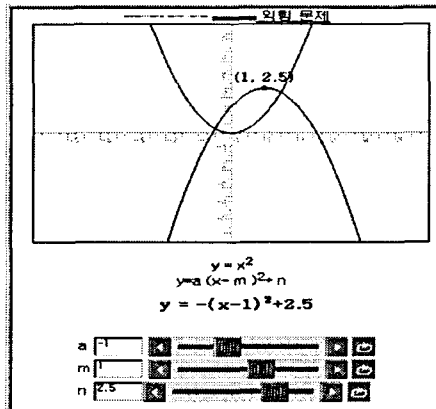
<합과 차를 알 때 막대기로 문제 해결하기>

이 방법은 또한 학습 대상이 폭 넓다는 점에서 의의를 갖는다. 종전의 변수에 대한 지도나 수학 학습에 있어서는 계단식의 단계 구분이 있어서, 전 단계를 거치지 않으면 다른 개념을 학습할 수 없는 제한적인 학습만이 이루어져왔다. 그러나 인터넷이라는 환경 자체의 특성상 누구에게나 접근 가능하다는 성질은 교육에 있어서 필요에 따라서 누구에게나 적합한 도구가 될 수 있다는 점을 의미한다. 즉, 막대기 대수는 중등 과정 중에 변수에 대한 이해가 부족한 경우에도 사용할 수 있고, 또한 초등과정의 학생 중에서 문자를 사용하지 않고서 방정식을 해결하는 것을 지도하고자 하는 속진에도

이용될 수 있다. 또한 막대로 해결할 수 있는 문제는 이외에도 몇 가지 형태를 더 가지고 있다.<sup>9)</sup>

이러한 동적 변수에 대한 개념을 통하여 학습자는 조작적으로 문제를 해결해 보는 경험을 하게 된다. 그 과정 후에는 다시 막대를 통하여 방정식을 해결하는 과정을 보여주는 애니메이션을 제공해야 한다. 학습자는 이 애니메이션을 말로 표현하는 과정을 통하여 변수 조작의 개념을 지적으로 학습하는 경험을 하도록 도울 수 있다.

더 나아가 이와 같은 예는 앞으로 함수와 그래프의 변수 개념 지도에서 사용될 수도 있다.



<슬라이드 바를 움직임으로 그래프를 움직이는 소프트웨어 환경>

## 2. 기하 영역 - DGS를 이용한 기하 학습

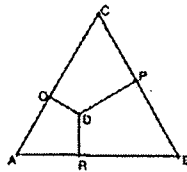
최근에 교실 수업에 DGS(동적 기하 시스템)의 소프트웨어인 GSP가 많이 이용되고 있다. 그러나

- 9) · 두 수에 관련하여 남고, 적은 양이 표시된 문제  
 몇 명의 친구에게 꺾을 7개씩 나누어주면 5개가 부족하고, 5개씩 나누어주면 11개가 남을 때, 친구 수와 꺾의 개수는 몇 개인가?
- 분배하는 문제와 관련된 문제  
 삼 형제가 37 개의 꺾을 나누기로 했다. 동생은 제일 적게 가지고, 나는 동생보다 5개 많이 가지고 형은 나보다 6개 많이 가지기로 했다. 우리 삼 형제는 각각 몇 개의 꺾을 가졌는가?
  - 거북이, 두루미 다리 세는 문제  
 두루미와 거북이의 다리 수를 합하면 20마리이고, 그 다리 수를 합하면 50이 된다. 두루미와 거북이는 각각 몇 마리인가?
  - 두 사람의 나이에 관련된 문제  
 올해 아버지의 나이는 40살이고, 아들의 나이는 12살이다. 지금부터 몇 년 후에 아버지의 나이가 아들 나이의 세 배가 되는가?

GSP는 기하 작도 및 증명에서 이용되고 있는데, 단지 교사의 시범을 위해서만 이용되고 있다. 이는 GSP등의 DGS 소프트웨어들이 상용 소프트웨어이므로 학생들은 쉽게 이용할 수 없기 때문이다. 인터넷은 이러한 문제에 대해 좋은 해결책이 된다. 잘 구성된 인터넷 소프트웨어를 통해 DGS를 구현할 때, 교사와 학생은 같은 기하 학습 공간을 인터넷 상에서 공유하게 된다. 즉, 교사와 학생이 같은 환경 하에서 학습이 일어날 수 있도록 지원하는 것이다. 이와 같은 인터넷 DGS의 대표적인 예는 자바수학<sup>10)</sup>이다. DGS는 본래 그래프 드로잉(Graph Drawing)분야의 소프트웨어를 유클리드 기하 학습용으로 전환한 것으로써 자바수학도 마찬가지로의 알고리즘 하에서 제작되었다.

기하의 경우 많은 학생들이 딱딱한 논리로 인하여 거부감을 느끼게 되는데, 이는 유클리드 기하가 기하 정리들의 발견에 대해 중심으로 서술하지 않고 연역적이며, 논리적으로 서술하였기 때문이다.<sup>11)</sup> 또한 기하를 유클리드가 전개한 방식으로 지도할 때에 응용에 대한 관심, 발견적인 접근 방법을 지도하기는 어려움을 또한 지적하고 있다.<sup>12)</sup> 발견적인 접근의 예로써 다음을 들 수 있다.

길이 10인 변을 가진 정삼각형의 내부에 한 점이 있는데, 그 점으로부터 각 변까지의 거리의 합은 얼마인가?



<문제 그림>

유클리드 기하의 논리대로라면 이 문제를 해결하기 위해서 이전에는 이와 관련된 정리를 알아야만 한다. 그러나 동적 기하를 이용하면 이와 같은 문제가 쉽게 해결될 수 있다. 즉 DGS를 이용하여 내부의 점을 움직이다가 내부의 점을 한 꼭지점에 갖다 놓으면 답을 알 수 있기 때문이다. 이는 일종의 수학적 실험 활동으로써 나중에 DGS가 없이도 머릿속으로 실험을 할 수 있도록 하는 것을

10) JavaMath - <http://javamath.snu.ac.kr/> 의 움직이는 기하에서 실습할 수 있다.

11) 그러나 논리적인 과정을 일방적으로 강조함으로써 전체적인 내용과 그 핵심적인 관련성의 이해를 어렵게 만들었으며, 탐구와 발견 정신의 개발을 어렵게 하였다.(우정호, 1998, p.282)

12) 그러나 Euclid기하는 공리적 구조에 결함이 있는 위에, 물리적 공간을 수학화한 물리적 공간론이라는 점에서 수학적 모델링의 원형이기는 하지만, Archimedes적인 정신이 결여되어 있다. 곧, 수적인 취급, 응용에 대한 관심, 발견적인 접근 방법 등이 결여되어 있다는 결함을 갖고 있다. 그러나 이와 같은 문제는 DGS를 이용함으로써 상당 부분 극복될 수 있다. 예를 들어 다음과 같은 문제에 대해서 생각해 보자. (우정호, 1998, p.288)

학습자로 하여금 배우게 한다.<sup>13)</sup> 또한 적절히 구성된 프로그램 하에서 이러한 사고의 실험을 통하여 여러 수학 정리들을 스스로 발견해 나갈 수 있다. 또한 발견된 수학의 정리, 또는 기하적 대상의 성질에 대하여 학습자로 하여금 ‘왜 그럴까?’ 하는 문제 제기를 유도할 수 있다.

이러한 문제 제기의 사고를 유도한 후에, 증명 과정을 지도하기 위하여 기하 도형에 대한 적절한 애니메이션을 제공하여 주는 것이 필요하다. 이는 단지 증명과정을 보여주는 활동만 하는 것이 아니라, 자신이 본 여러 과정들을 말로 표현하는 과정(verbalization)을 통하여 논리적으로 증명하는 사고를 익힐 수 있도록 돕는다.

### 3. 사고력 영역 - 그래프

최근 사고력 교육에 대한 관심이 높아지고 있으며 이것은 수학교육에 있어서도 예외가 아니다. 그러나 실제적으로 그에 대한 체계적인 프로그램이 없는 실정이어서 산발적, 단발적인 시도가 주로 이루어지고 있다. 교과서에서 다루고 있는 교구 부분도 그러하여 구체적 조작 활동이 사고력 향상에 연계적으로 교육적 효과를 일으키기보다는 각 부분에 대한 일시적 조작으로 끝나버리게 될 우려가 있다. Clements 이 말했듯이 조작 활동은 ‘symbolic concrete’ 가 아닌 ‘Integrated concrete’ 를 구성 되도록 할 때에 의미 있는 것이 된다. 이러한 부분에서 이산수학이 하나의 대안을 제시할 수 있다.

이산수학은 선행적인 수학 지식이나 복잡한 수학적 기호 없이도 쉽게 문제에 접근할 수 있다는 용이점이 있다. 추상화되고 형식화된 수학적 기호에 대한 의존도가 높지 않기 때문에 학생들로 하여금 거부감 없이 시도해 볼 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 특히 그래프의 경우 초등 수학에서 학습자가 일반적으로 생각하는 “수”의 조작을 통한 활동이 아니라 “그림”을 통한 사고를 할 수 있으므로 더욱 그러하다.

따라서 이산 수학적 사고(특히 그래프와 관련지어)는 Bruner가 말하는 ‘적절한 표상’으로 제공되기만 하면 저학년 학생들도 어렵지 않게 사고 체계를 습득하게 될 수 있고 스스로의 활동을 통해 개념을 정의해 내고 성질을 파악해 내는 “Doing Math” 도 가능하게 한다. 또 고등학교의 교과 과정에 이산 수학이 실제로 들어가 있기 때문에 이산수학적 아이디어를 바탕으로 하는 사고력 교육은 후행 학습으로 자연스럽게 전이될 수도 있다. 이미 미국의 DIMACS 의 경우 방학을 이용해 초등학생들을 대상으로 이산수학 활동 프로그램을 시행하고 있으며 초등학교에서도 교사들의 그러한 시도를 찾아볼 수 있다.<sup>14)</sup>

그러나 우리나라의 교육 여건상 교사의 재량에 의한 수업에는 한계가 있고, 또한 초등학생을 대상으로 하는 이러한 교육프로그램이 활성화되지 못하고 있는 것이 현실의 상황이다. 이러한 현실적 여건을 고려해 볼 때 인터넷 상의 조작물을 통한 탐구 활동이 하나의 대안이 될 수 있다.

13) Sutherland, R. & Mason, J., 1995, p.204

14) Rosenstein, J. G. ; Franzblau, D. S. & Roberts, F. S. , 1997.

이산 수학의 영역 중 그래프 이론의 경우에는 인터넷 상에서 더 좋은 효과를 얻을 수 있는 콘텐츠가 된다. 그래프는 단순히 edge와 vertex의 단순한 구조로 이루어져 있기 때문에 처음 도입에 큰 어려움이 없다. 그리고 그래프 이론의 내용들의 경우 '시각적 측면'을 통해 그래프를 변형하고 조작하면서 그 성질을 탐구하고 정의해 내는 것이 많다. 따라서 굳이 초등학생들에게 그래프에 대한 설명을 해주지 않아도 그래프의 조작을 통해 학생들은 규칙을 찾아내고 의문을 가지면서 나름대로의 사고 체계를 확립해 나갈 수 있게 된다. 즉 단순히 그래프 이론을 초동화해서 지도하는 지식 교육이 아니라 단순한 구조를 직접 조작하고 탐구해 봄으로써 거꾸로 개념을 습득하고 내재화하는 발견학습을 하면서 수학적 사고력을 유도하는 것이다. 조작을 통해 발견을 하고 스스로의 개념 정의, 규칙을 구성해보기(Doing Math)의 과정을 거쳐 새로운 지식으로 전이가 이루어지게 되며 이것은 후행학습(고등학교의 이산수학 과정)에 있어 용어나 개념습득으로 이어질 수 있다. 한 걸음 더 나아가서 실제적인 현상이나 상황을 그래프로 modeling 하고 representation 하게 될 수도 있다. 그리고 나중에는 이것이 또 다른 '행렬'이라는 수학적 표현으로 이어질 수도 있다. 즉 representation 의 연결에 있어서도 중요한 역할을 할 수 있다.

따라서 그래프와 관련지어 '수학적 사고력'에 대한 교육 프로그램을 생각해 보고자 한다. 수학적 사고력은 넓게는 수학적 능력이라고 표현할 수도 있는데 이는 포괄적 개념으로 그 정의도 다양하다. 그 중 V.A.Krutetskii는 "수학을 배우는 능력이란(ability to learn mathematics) 다른 모든 조건이 동일한 경우에 학교에서 요구하는 수학적 활동을 수행하고 학교교과목으로서의 수학을 숙달하는 데, 특히 수학적 지식, 기능, 습관 등을 비교적 신속하고 용이하고 철저하게 숙달하는 데 영향을 주는 개인의 심리적 성향, 주로 정신활동의 성향을 의미한다." 라고 하면서 특히 능력의 성분 가운데 정의적인 측면이나 태도의 측면을 드러내는 것을 일컬어 '사고의 수학적 경향(mathematical cast of mind)'라고 하였다. 이것이 이산수학(여기서는 특히 그래프) 활동으로 습득하게 되는 사고력의 측면이다. 즉 content 자체를 학습하고 습득하는 것을 벗어나 수학적으로 사고하는 방법을 습득하고 전이를 통해 그것을 여러 가지 상황으로 적용시키게 됨으로써 사고 방법, 태도의 측면에 관심을 두는 것이다. 이러한 점에서 V.A.Krutetskii가 수학적 정보를 다루어 나가는 활동으로 제시한 문제 해결 활동의 단계를 수학적 사고력 습득의 절차로 연결시켜 생각해 볼 수 있다.



단계	과정	사고력
1.정보의 수집 단계	문제에 관한 정보의 획득과정	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 문제의 형식과 구조 파악하기</li> <li>· 수학적 사실을 형식화하여 인지</li> </ul>
2.정보의 처리 단계	문제 해결을 목적으로 획득된 정보의 변형	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 논리적으로 사고하기</li> <li>· 수학적 기호를 사용하여 사고하기</li> <li>· 일반화하기</li> <li>· 압축된 구조로 사고 하기</li> <li>· 사고 과정의 유연성</li> <li>· 간단하고 경제적으로 해결방법 찾기</li> <li>· 사고과정의 방향을 전환하고 재구성하기</li> </ul>
3.정보의 파지 단계	해결된 문제에 관한 정보의 파지	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 수학적 관계, 유형적 특성, 증명의 골격, 문제 풀이 방법, 접근방법 등에 대한 일반화된 기억</li> </ul>

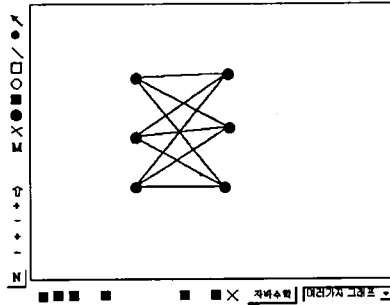
수학적 사고에 대한 이러한 이론적 배경을 바탕으로 이미 제작되어 있는 그래프 프로그램을 통해 실제적으로 생각해 볼 수 있다. <http://javamath.web.edunet4u.net/> 의 고등 수학 학습방에는 GraphMAL이라는 그래프 교육용 프로그램이 올려져 있다.

### 동형 그래프 찾기

#### 1. 정보 수집 단계

- 그래프 그리기, 관찰하기, 특징 살펴보기를 할 수 있다.
- 그래프를 그리고 점과 선의 개수를 세어 볼 수 있다.
- 하나의 점에 연결된 선의 개수를 파악해 보고 다른 그래프에 대한 그런 활동을 반복해 볼 수 있다.
- 완전그래프나 수형도 등 특수한 그래프를 관찰할 수 있다.

주어진 그래프에 대한 단순한 관찰 활동으로 특징을 살펴보는 활동으로써 문제의 구조를 파악하는 사고 방식으로 자연스럽게 연결될 수 있다. 즉 그래프가 주어질 때 단순히 '어떻게 생긴 모양'이라는 감각적 사고로 그치지 않고 점이 몇 개이고 선이 몇 개이며 어떻게 연결되어 있다 하는 것을 파악하면서 초등적으로 문제 상황을 형식화 하는 태도를 습득할 수 있다

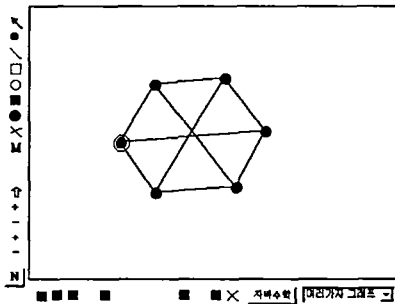


&lt;그래프 관찰&gt;

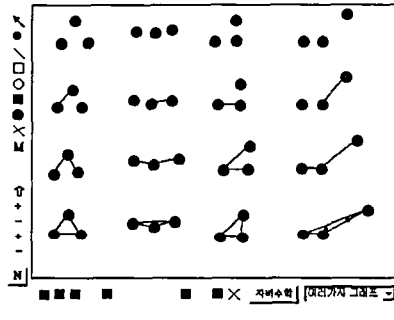
## 2. 정보 처리 단계

- 그래프의 점과 선을 마우스로 마음대로 이동시켜 보면서 이동시키는 조작을 한다.
- 마우스 조작을 통해 만들어지는 모양을 원래 그래프와 연결지어 생각할 수 있다. 각 점의 색을 달리해 봄으로써 어떤 점이 어디로 옮겨져 갔는지를 쉽게 생각해볼 수 있고 동형그래프에 대해 그러한 대응관계를 잠재적으로 인지할 수 있다.
- 점이나 선을 추가하거나 삭제하지 않은 상태에서 마우스로 그것을 이동시키는 조작만을 통해 만들어지는 그래프는 동형인 그래프라는 개념을 자연스럽게 받아들일 수 있다.
- 주어진 그래프의 여러 가지 동형 그래프를 만들어보고 또 주어진 점에 대해 동형이 아닌 그래프를 만들어 보면서 동형그래프의 특징을 생각할 수 있다.

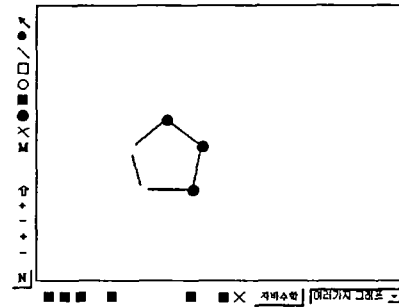
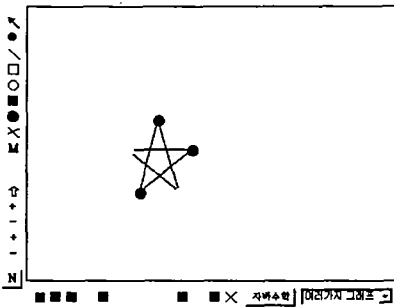
동형인 그래프의 특징과 동형이 아닌 그래프의 특징을 살펴보면서 대상을 어떠한 기준에 따라 분류해보는 사고를 할 수 있다. 또 활동을 통해 동형에 대한 나름대로의 정의를 내릴 수 있게 되고 초보적으로 동형 그래프의 특징을 패턴화하고, 변하지 않는 성질에 대한 일반화를 할 수 있다. 또 조작 활동 이전에 그러한 일반화를 바탕으로 주어진 그래프가 동형인지를 추론해 볼 수 있다.



<그래프 조작 - 동형 개념 인식>



<동형인 그래프와 동형이 아닌 그래프>



<색칠된 점으로 대응관계 사고>

### 3. 정보 파지 단계

- 조작을 통해서 동형인 그래프와 기하에서 말하는 '같은 모양' 이라는 것과 다른 뜻이라는 것을 알 수 있다. 즉 선의 길이나 각도의 동일성과는 무관하게 점과 선의 관계에서 비롯되는 것임을 직관적으로 인지함<sup>15)</sup>으로써 '합동'과는 다른 의미에서 동형 그래프를 받아들이고 그러한 차이를 구분할 수 있다.<sup>16)</sup>

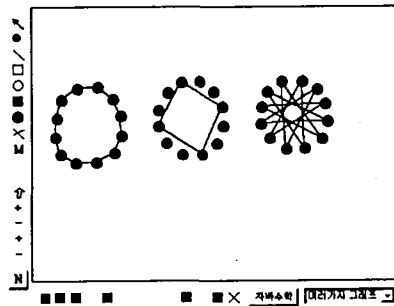
- 여러 가지 동형 그래프를 조작하는 과정에서 동형 그래프의 불변적 성질(점수, 선의수, 점에 연결되는 선의 수, 서로 이어져 있는 선과 점 등)의 개념을 구성하여 동형그래프가 되기 위한 조건이나 동형그래프이면 항상 만족하는 조건들을 불완전하게나마 스스로 구성하여 인식할 수 있다. 나아가서 수학적 체계에서 중시하는 '동형'에 대한 초보적 인지를 하여 나름대로의 지식 체계를 구축할 수 있다.

15) 마우스 조작으로 이루어지는 상황이므로 언어적으로 표현하지는 못하더라도 무의식적으로 인지할 수 있다.

16) 점과 선으로 만들어졌다는 것에서 기하에서의 도형과 그래프를 혼동할 염려가 있는데 이러한 활동을 통해서 문제를 해결할 수 있다.

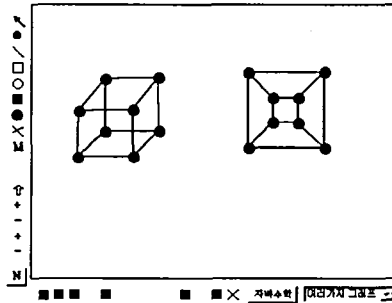
그래프의 동형을 이용한 심화 학습으로 다음과 같은 방법도 생각해 볼 수 있다.

• 점 12개를 일정한 간격으로, 또 어떤 지점에 대해 동일한 거리에 있도록(원상에) 배치한 다음 이웃한 점들을 이어본다. 그리고 그 도형과 동형이 되는 그래프는 어떤 것이 있는 지 찾아 볼 수 있다. 특히 일정 개수의 점을 건너서 규칙적으로 점을 이을 때(즉, 한점을 건너서 잇기, 두점을 건너서 잇기 등) 몇 개를 건너야 동형인 그래프가 만들어지는지 조작해 볼 수 있다. 나아가 동형이 아닌 그래프가 몇 개가 생길지 탐구해 볼 수 있다. 이것은 대수에서의 약수와 배수의 개념과 연결이 된다. 즉 실제적인 조작을 통해서 12와 서로 소에 있는 수만큼 건너뛰는 점을 이을 때에만 모든 점을 다 거쳐야 원래의 점으로 돌아오게 됨을 알 수 있고 이것은 마우스 조작을 통해 동형임을 판단할 수 있다. 중학교 이후의 과정에 있는 학생들의 경우 이 개념을 어렵지 않게 구성할 수 있으며 이러한 활동을 바탕으로 규칙을 세우고 추론을 하는 사고 방식이 습득될 수 있다.



<동형인 그래프가 만들어지는 조건 사고>

• 특정한 다면체에 대한 schlegel diagram을 생각하여 두 그래프가 동형인지 생각해 보게 하면서 기하적 측면에 연결이 될 수 있다. 그러나 주어진 다면체에 대한 schlegel diagram을 생각하는 일은 쉽지 않을 수 있다. 그러나 여기서는 실제로 주어진 다면체에 대한 schlegel diagram을 구성하는 것이 초점이 아니라 주어진 두 그래프 모양이 동형인가에 초점이 맞추어져 있으므로 이 부분은 크게 문제가 되지 않는다. 또한 마우스 조작으로 동형임을 쉽게 알 수 있게 된다. 이렇게 초보적인 방법으로 두 그래프가 동형이라는 사실을 인지함으로써 후행학습이 될 다각형 - schlegel diagram 관계 인식에 도움을 줄 수 있다. 이것은 일종의 정보 파지로 볼 수 있다.



<다면체와 schlegel diagram의 동형>

### III. 결 론

지금까지 인터넷 상에 구현된 조작 도구를 이용하여 대수, 기하, 사고력의 측면에서 개발된 수학교육 프로그램에 대해서 살펴 보았다.

대수의 영역에서는 교실 수업이나 컴퓨터를 이용한 대수 교육에서 변수에 대해서 정적인 변수 지도에 초점을 맞추었으나, 브루너의 아이디어와 같이 더 쉬운 표상으로 바꾸어 동적인 변수를 지도할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 이 프로그램은 또한 단지 변수의 개념 지도 뿐만 아니라 이를 통하여 문제 해결에 이용된다는 점과 변수에 대한 깊은 이해를 유도하며, 또한 이러한 과정을 말로 표현하는 과정을 통해서 변수 조작의 과정을 학습할 수 있다.

기하의 영역에서 인터넷 상에서의 DGS는 이전의 다른 DGS와는 달리 접근에 제한이 없어 교사와 학생이 동일한 환경에서 학습할 수 있도록 한다. 또한 기존의 DGS를 이용하는 것과 같이 단지 제시용이 아닌 학생이 직접 적절한 문제에 대해서 수학 실험을 해 볼 수 있고, 추론해 볼 수 있는 기회를 가질 수 있다. 그리고 이러한 과정을 통해서 학습자는 스스로 수학적 대상에 대해서 문제 제기를 하도록 유도할 수 있으며, 이에 대한 증명 과정을 말로 표현하는 과정을 통해서 증명의 논리를 학습할 수 있다.

이산 수학의 영역의 경우 도구 사용이 단발적인 조작활동으로 그치지 않고 학습자 나름의 지식 사고 체계로 정립하도록 하기 위해서는 체계적 흐름을 가진 과정이 필요하다. 그런 면에서 인터넷 상에서의 그래프 조작은 컴퓨터의 조작적인 특성과 그래프의 시각화라는 특성이 결합되어 초등학교로 하여금 Doing Math를 시도하는데 도움을 줄 수 있다.

앞으로 본고에서 제시한 대수, 기하, 사고력의 측면에 대한 프로그램에 대한 실험 연구가 뒷받침되어야 한다. 또한 본 프로그램들은 방과후 교실, 정규 수업 또는 학습자의 자기 조절 학습 등에 적용될 수 있다고 전망된다.

## 참고문헌

- 김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대학교 박사학위 논문.
- 김응태·박한식·우정호 (2001). 수학교육학개론, 서울: 서울대학교 출판부.
- 백영균·류희찬 (1990). 로고 아동과 컴퓨터, 서울: 양서원.
- 심규선 (1997). 교육용 프로그래밍 언어 MAL을 이용한 함수개념 지도, 서울대학교 석사학위 논문.
- 우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.
- 이영란 (1998). 이차함수 그래프의 구성주의적 접근, 서울대학교 석사학위 논문.
- 허미화 (2000). 웹 기반 이산수학 교육용 소프트웨어 Graph MAL의 설계 및 활용, 서울대학교 석사학위 논문
- Clements, D.H. (1999). 'Concret' Manipulatives, Concrete Ideas, *Contemporary Issues in Early Childhood* 1(1).
- Rosenstein, J.G.; Franzblau, D.S. & Roberts, F.S. (1997). Discrete Mathematics in the Schools, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 36.
- Sutherland, R. & Mason, J. (1995). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.