

JAVA를 이용한 중학교 기하영역 자료개발 -GSP로 구현한 피타고라스 정리-

계 영 희 (고신대학교)

김 종 민 (고신대학교)

중학교 기하영역 중 피타고라스의 정리를 논증적인 증명 대신에 역동적인 방법으로 이해할 수 있도록 GSP(Geometer's Skechpad)를 활용하여 구현했으며, 멀티미디어 환경에 익숙한 중학생들에게 시·공간을 초월하여 웹 상에서 개별학습, 반복학습을 할 수 있도록 JAVA 언어를 사용하여 웹으로 변환시켰다.

1. 서론

NCTM(1989)은 '학교수학의 교과과정과 평가의 기준'에서 중학교 기하학습 교과과정은 데이터 수집과 모델 구성을 통해 기하학적 모양을 탐구하고 분석할 수 있는 기회를 제공해야 한다고 권고하였다. 수학에 대한 구체적인 경험으로부터 학생을 더욱 추상화된 형식적 단계로 이끌어 주고 수학적 사고력을 향상시켜 주어야 하기 때문이다. 그 후 NCTM(1998)은 Standards 2000에서 '학교 수학의 교수 프로그램의 원리'의 일부분인 '기술 공학의 원리'에서 모든 학생들의 수학적 이해를 돕기 위해 공학을 사용해야 하며, 점차 증가하고 있는 기술 세계에서 수학을 사용하도록 학생들을 준비시켜야 한다고 주장하였다.

국내에서 최근 연구된 결과를 보면 조완영·권성룡(2000)은 다음과 같이 기술하고 있다. 학생들이 수학을 공부하면서 겪게되는 가장 큰 어려움은, 추상화된 수학에 따른 형식화인데 형식화는 수학을 간결하게 기술하는데는 큰 기여를 하였지만 학생들에게는 수학이 의미없는 기호들의 조작으로 여기게 되어 어려움을 갖게되었다고 말한다. 둘째는 고대 그리스이래 수학의 연역적인 측면을 지나치게 강조하였기 때문에 학생들의 능동적인 활동을 자제하고 교사 주도의 설명식 수업이 이루어져 오게되었다고 Lakatos의 이론으로 설명하고 있다.

Lakatos(1976)는 수학적 지식을 오류가능한 인간의 창조적 활동의 산물이라고 말한다. 수학은 절대적인 진리에서 출발하여 연역적인 추론에 의해서 절대적인 진리를 얻어내는 것이 아니라, 나중에 잘못된 것으로 판명될 수도 있는 잠정적으로 참인 가설에서 추측을 연역하는 가설·연역적인 체계로써 수학적 지식은 절대적으로 참인 진리가 아니라 언제나 반박될 가능성이 있는 추측이라고 주장한다. 이와 같은 풍토의 수학학습에서 학생들이 가지는 어려움은 컴퓨터가 가지는 다양한 기능에 의해서 덜어질 수 있는데, 컴퓨터는 추상적이고 형식적인 수학적 대상을 구체적인 표현형태로 제시할 수 있을 뿐만 아니라, 그 대상의 조작이 학생들의 통제 내에서 일어날 수 있기 때문에 수학교육의 중요

한 도구로 등장할 수 있다(신동선·류희찬 1998). 이러한 측면에서 컴퓨터는 추상화된 수학적 대상 등을 학생들의 직관과 관련지어 줌으로써 구체와 추상을 연결해 주는 매체가 된다. 또한 컴퓨터는 지필 환경에서 경험할 수 없는 다양한 경험을 할 수 있게 함으로써 학생들이 나름대로 가설을 세우고 이를 바탕으로 추측을 연역할 수 있는 환경을 제공해 준다.

현재 널리 상용되고 있는 탐구형 S/W로는 Geometric Supposer, Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad(GSP)가 있다. 이 들 탐구형 S/W는 평면도형에 대한 학생들의 경험을 풍성하게 해주며, 다양한 도형들의 작도와 관찰로 학생 스스로 가설을 세우고 이 가설을 바탕으로 연역적인 결론을 이끌어내는 과정을 훈련할 수 있는 기회를 갖게 되며 마우스를 이용해서 도형을 직접 조작해 봄으로써 지필환경에서 경험할 수 없었던 다이나믹한 동영상 경험을 할 수 있다. 그런데 컴퓨터 교육의 어려운 점으로는 계속 업그레이드 되어야 하는 컴퓨터의 S/W, H/W의 부족과 수학교육에 대한 교사들의 전통적인 사고방식과 태도를 들 수 있다(조완영·권성룡 2000).

최초의 온라인 기하학 수업은 1994-95년에 미국 펜실바니아 플라워타운의 세인트 조셉 아카데미의 루스 카버가 <http://forums.warthmore.edu>를 사용하여 GSP로 수업하였다. 그의 수학포럼은 주간문제에 20점, 월간 프로젝트에 40점씩을 부여하여 매 학기 100점을 취득하도록 하였고, 인터넷으로 문제의 풀이를 보내면 정답을 맞춘 학생들의 이름을 인터넷상에 올려 학생들이 매우 흥분하였다고 한다. 또한 학생들이 문제해결에 있어서 협동연구의 중요성을 인식하여 학부모와 자녀가 또 학생들이 친구들과 함께 문제를 풀도록 유도 한 결과 이 수업에 참여한 그룹은 이전의 어떤 그룹보다 기하학에 관해 많은 흥미와 성취감을 얻었다고 한다(김정여(2001)).

본 연구에서는 중학교 기하영역의 피타고라스 정리를 다양하게 논증적인 증명법이 아닌 역동적인 방법으로 기하 수업의 모형을 제시하여 온라인으로 학습할 수 있도록 하였다. 멀티미디어 환경에 익숙한 중학생들이 손쉽게 기하도형과 접할 수 있도록 JAVA언어를 사용하여 웹으로 변환시켰다. 본 논고에서는 모니터상에서 정지된 도형만을 볼 수 밖에 없다. 고신대학교 컴퓨터과학부 홈페이지(www.kosin.ac.kr)를 방문하면 동영상을 실행하여 볼 수 있도록 링크시켜 놓았다.

2. 연구의 목적 및 필요성

19세기 말부터 수학교육에서는 특히 공간 능력에 대하여 관심을 가졌었다. 1930년대에는 공간과 수에 관한 능력에 대하여 활발히 연구되어 1935년 오스트레일리아의 수학자이자 심리학자인 험리는 다음과 같이 기술하고 있다. '수학적 능력이란 일반적 지성(general intelligence)과 영상적인 이미지, 수와 공간의 형상(configuration)을 인식하고 마음 속으로 그려 봄으로써 그 형상을 유지할 수 있는 능력들의 조화'라고 하였다(McGee, 1979).

McGee는 공간 능력에 대한 많은 연구를 한 결과 공간적 능력은 공간적 시각화(spatial visualization)와 공간적 방향(spatial orientation)으로 구성되어 있다고 주장하였다. 공간적 시각화란,

사물을 마음속으로 회전할 수 있는 능력이고 공간적 패턴 안에 있는 요소의 배열을 이해하고 공간형상의 방향을 변화시켜도 혼돈하지 않고 유지할 수 있고 인간의 몸에 대해 공간적 방향을 결정할 수 있는 능력이라고 말하였다. 신동선(1998)은 컴퓨터에 관한 지식과 기능의 습득은 정보화시대에 능동적으로 대처하는 방법이므로 학생들에게 컴퓨터를 가르치는 일은 중요하다고 강조하면서 그래픽과 애니메이션, 시뮬레이션, 빠른 계산 속도와 능력, 오류 수정 등의 다양하고 우수한 컴퓨터 기능을 미래 수학교육의 도구로 여기고 있다.

교육부는 1999년 제 7차 교육과정에서 특별활동 교육과정은 ‘자율과 창의에 바탕을 둔 학생 중심 교육 과정’으로서 사회의 새로운 요구와 수요에 적합하게 개정하였다. 제 7차 교육과정 개정에서 강조되고 있는 인간성, 창의성, 적응성, 자기 주도력, 적성, 진로 등에 관한 교육은, 교과보다는 오히려 특별활동의 영역에 더 넓고 깊게 관련되어 있으므로 초·중등학교의 특별 활동은 과거 어느 시기의 특별활동보다 중요한 위치와 교육적 의미를 가지게 될 것이라고 전망하고 있다. 김영국(2000)의 연구에 의하면 수학과목에 대하여 초등학교 3, 4학년까지는 약 60%의 학생들이 호의를 보이다가 중학교 1학년이 되면 50%, 중학교 3학년은 40%, 고등학교 1학년은 23%만이 수학을 좋아한다고 한다. 즉 수학에 대한 기피증이 학년이 올라갈수록 높아감을 알 수 있다. 박혜숙(2001)은 이러한 수학 기피증과 학력저하를 줄이기 위해서는 특별활동에서 수학반을 운영해야 하며 수학반의 성격을 어려운 문제 풀이 위주의 운영에서 벗어나 학생들의 수학에 대한 흥미를 높이는 방향으로 운영하여야 한다고 주장하고 있다. 그의 연구에 의하면 서울과 광역시, 중·소도시에서 70개교를 임의 추출하여 설문지를 돌리어 비교·조사한 결과 특별활동의 편성에서 수학반을 개설한 학교는 70개의 학교중 43%가 운영하고 있었다. 수학 관련 특별 활동반이 새로 개설된다고 하더라도 60%의 학생이 참가하지 않겠다고 답하였는데 그 중 18%의 학생이 수업 자료가 재미없어서, 29%의 학생이 2시간 이상 계속하기 힘들다고 이유를 들었다.

수학반 운영의 어려운 점으로는 교사 70명중 47%가 수업 자료의 부족을 호소하였고, 현재 운영하고 있는 수학반에서 가장 필요한 것에 대해 74%의 교사가 수업 자료 개발과 보급이라고 꼽았다. 그리고 수학반 운영 내용 중의 교과 과정과 관련 있는 것은 40% 미만으로 했으면 좋겠다고 교사의 53%가 희망하고 있다. 교사보다 학생들이 조작하고 활동하는 내용을 더 많이 원하고 있었으나 현재 교사들이 사용하고 있는 수업 방식은 강의가 49%, 발표가 44%, 토의 활동이 33%의 순인데 앞으로 희망하는 수업방식에 있어서 컴퓨터와 인터넷의 활용은 60%, 구체적 조작·실습 활동은 53%, 토의 활동은 34%가 원하고 있었다. 그런데 컴퓨터와 인터넷의 활용은 교사들이 60%인 반면에 학생들은 10%가 더 많은 70%가 되었다.

본 연구에서는 GSP의 성질을 활용하여 마우스를 클릭하면 삼각형이나 사각형의 면적들이 합동임을 딱딱하고 어려운 논증적인 방법대신에 시각적인 방법으로 확인할 수 있으며 다양한 색상으로 아름답게 표현되어 학생들의 흥미와 동기유발이 용이하도록 구현하였다. 또한 교과서 외의 증명방법은 우수한 학생들에게 신선한 자극도 줄 수 있으며 멀티미디어 환경에 익숙한 학생들이 시·공간의 제

약없이 웹을 이용하여 다양한 학습과 반복학습을 할 수 있는 장점이 있다.

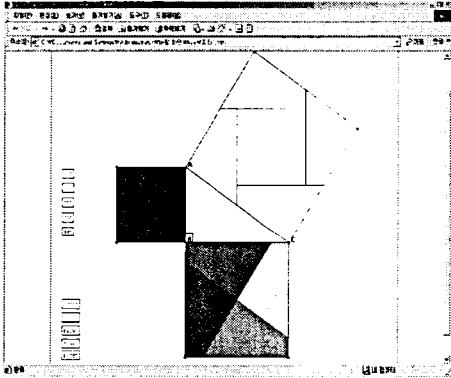
3. 피타고라스 정리의 유래와 내용

피타고라스 정리는 피타고라스가 살기 오래 전부터 여러 문화권에서 발견되었다. 3,500년 전 돌비석에 새겨진 고대문명의 유적으로는 <바빌로니아 정리>가 있는데 그 내용이란 현재 우리가 알고 있는 피타고라스 정리를 만족하는 숫자 3개의 집합들이다. 이를 보면 {3, 4, 5}, {5, 12, 13} 등... 또한 피타고라스가 생존했던 시기 전후의 아라비아, 중국, 인도, 유럽 등의 여러 문명권에도 피타고라스 정리를 만족하는 특별한 경우의 수들이 기록되어 있다.

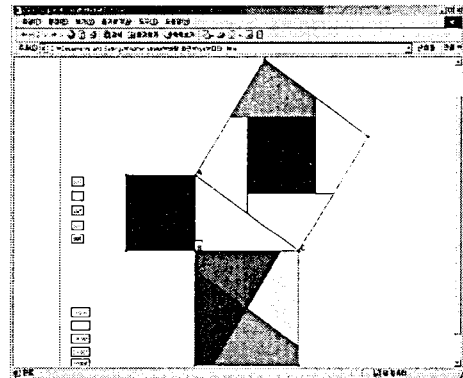
피타고라스는 B.C. 500년경 그리스의 철학자인데, 여러 문화권에서 이미 사용되었던 피타고라스 정리가 특별히 피타고라스의 이름이 붙여진 이유는 피타고라스의 학교(피타고라스 학파)에서 과거와 다르게 논리적인 증명을 했기 때문이다. 정리의 내용은 이미 잘 알려졌듯이 직각삼각형에서 높이를 a , 밑변을 b , 빗변을 c 라고 할 때 $a^2 + b^2 = c^2$ 이 성립한다는 것이다. 피타고라스 정리는 유클리드의 <원론>에서도 매우 중요한 대표적인 정리(proposition)중의 하나이다. 유클리드는 B.C. 300년경 그 이전과 다르게 논리적이고 엄밀하게 증명한 것이다. 많은 그리스 수학자들에게 피타고라스 정리가 오랫동안 연구되었던 것은 북아프리카와 스페인 남부에서 활동했던 아라비아 학자들과 인도의 학자들 덕분이기도 했다.

(1) 증명 1.

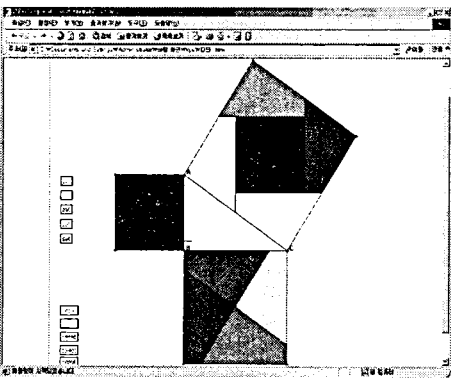
이 증명은 비교적 쉬운 내용이다. 밑변을 한 번으로 하는 정사각형을 4조각으로 나누는데 주의할 점은 합동인 도형으로 분할해야 한다. 먼저 b 를 한변으로 하는 정사각형을 그린 후 이 정사각형의 중심점을 잡는다. 이 중심점을 지나면서 변 c 에 평행한 직선을 긋고, 이 평행선에 대하여 중심점에서 수직인 직선을 그리면 4조각으로 분할이 되고 빗변을 한변으로 하는 정사각형이 변 a 로 만들어지는 작은 정사각형과 이들 4조각으로 맞추어지는 것을 알 수 있다.



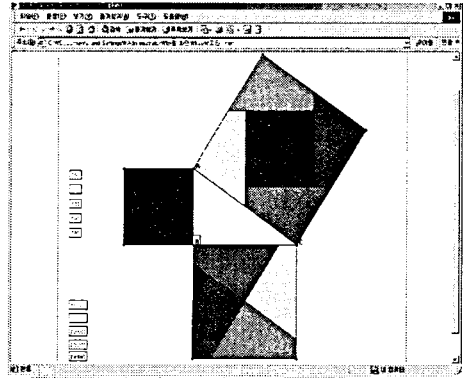
<그림 1> 증명1-1



<그림 2> 증명1-2



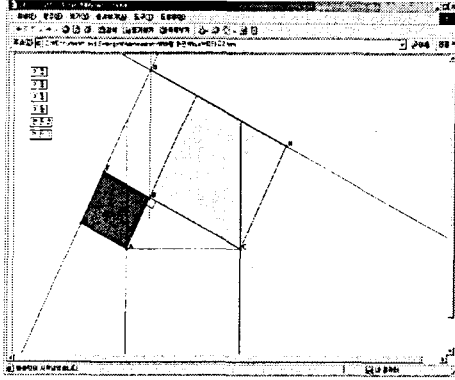
<그림 3> 증명1-3



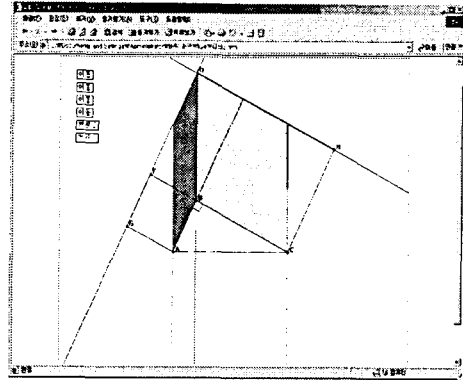
<그림 4> 증명1-4

(2) 증명 2.

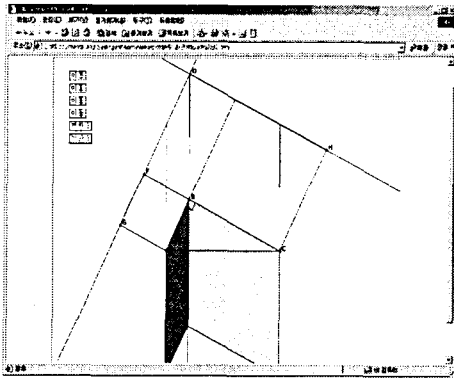
이 증명법은 평행선을 따라 움직이면서 정사각형의 면적과 평행사변형의 면적이 합동임을 보이면서 피타고라스의 정리를 증명한다.



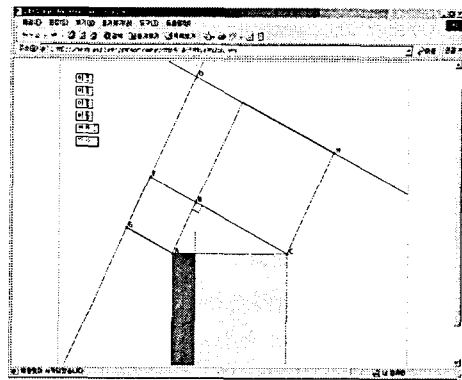
<그림 5> 증명2-1



<그림 6> 증명2-2



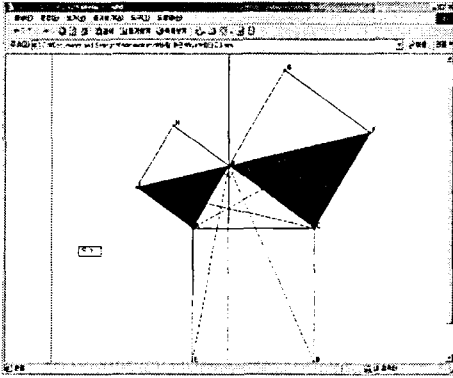
<그림 7> 증명2-3



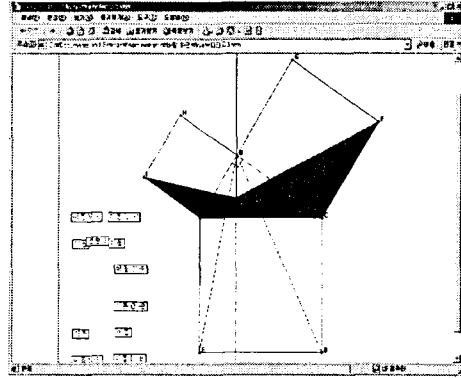
<그림 8> 증명2-4

(3) 증명·3.

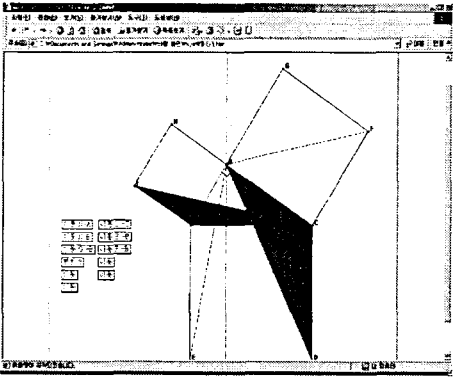
이 증명법은 B.C. 300년경 유클리드가 증명한 것으로서 중학교 교과서에 나오는 가장 잘 알려진 증명법이다. 이유는 알 수 없지만 아라비아 학자들은 '새색시의 도형(figure of the bride)'이라고 불렀고, 러시아 학생들은 아라비아 학자보다 덜 공손하게 '피타고라스의 바지(Pythagoras' Pants)'로 불렀다고 한다.



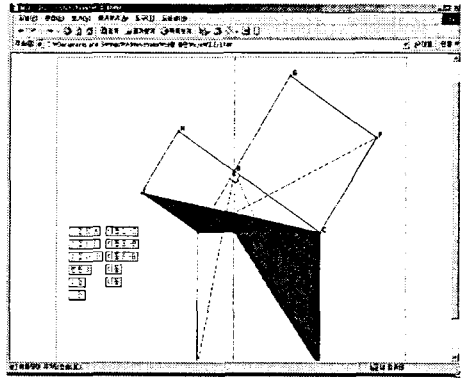
<그림 9> 증명3-1



<그림 10> 증명3-2



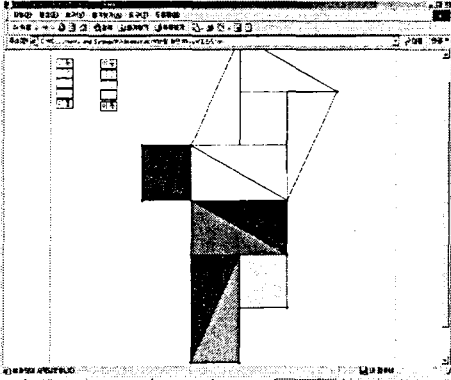
<그림 11> 증명3-3



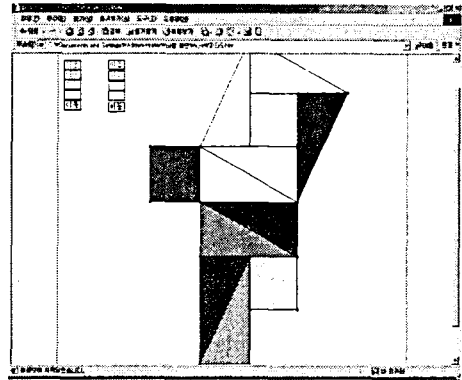
<그림 12> 증명3-4

(4) 증명 4.

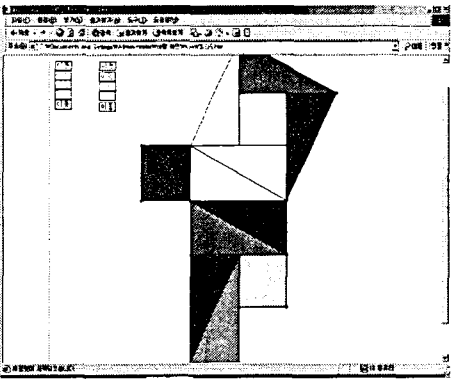
이 증명법은 1927년 NCTM에서 처음 발간한 Elisha Scott Loomis의 고전 <피타고라스의 정리>에 나오는 증명법으로써 시각장애인 E. A. Coolidge 양의 공적으로 돌린다고 써있다. 변 c 를 한 변으로 하는 정사각형의 각 꼭지점에서 변 a 와 평행한 직선 2개, 변 b 와 평행한 직선을 2개 그으면 5조각으로 분해되어 변 b 를 한 변으로 하는 정사각형 밑에 변 a 의 정사각형을 붙인 후에 위의 5조각과 합동인 도형 5조각으로 나누어짐을 보인다.



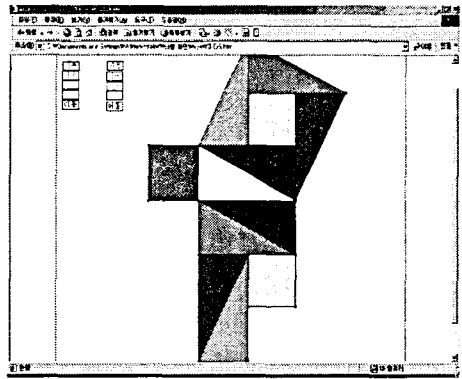
<그림 13> 증명4-1



<그림 14> 증명4-2



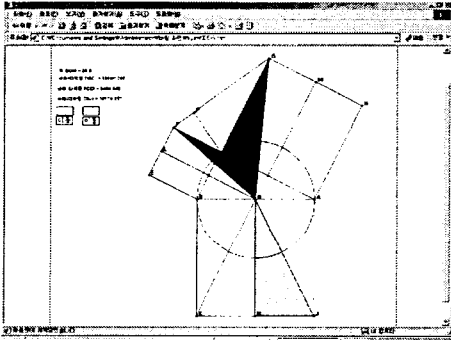
<그림 15> 증명4-3



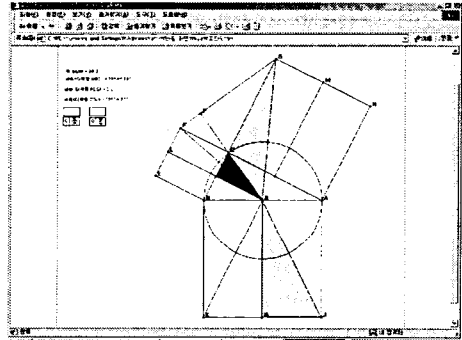
<그림 16> 증명4-4

(5) 증명 5.

이 증명법은 Ann Condit 의 증명법으로 불리우는데 1938년 미국 Indiana South Bend Central 고등학교에 재학중이던 16세 소녀 Ann Condit 양이 증명한 것으로 Loomis 의 고전 <피타고라스의 정리>에 수록되어 있다. 이 증명법은 직각삼각형의 세 꼭지점이 원둘레에 오도록 원을 작도한 후에 원의 중심점에서 변 b 와 변 a 에 각각 평행선을 그은 후 삼각형들의 면적이 합동임을 이용하여 증명하는 것이다.



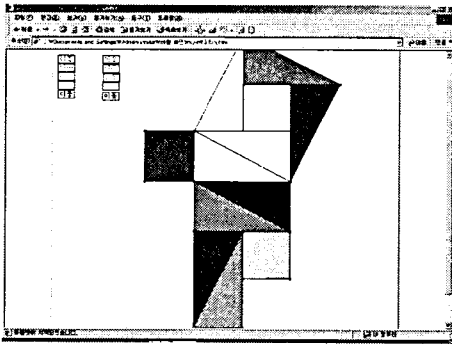
<그림 17> 증명5-1



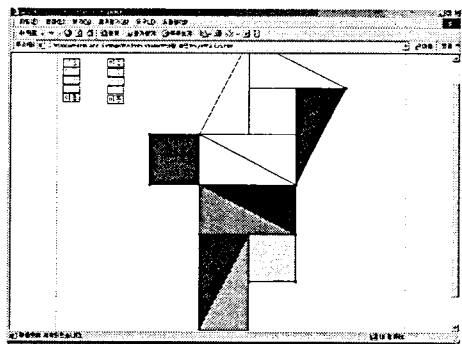
<그림 18> 증명5-2

(6) 증명 6.

이 증명법은 16세기의 유명한 이탈리아 화가 레오나르도 다 빈치가 증명한 것이다. 변 b 와 변 a 에 대해서만 정사각형을 작도한 후에 기본이 되는 삼각형을 점대칭시키고 다시 선대칭을 하여 $a^2 + b^2 = c^2$ 를 증명한 방법이다.



<그림 19> 증명6-1



<그림 20> 증명6-2

4. 웹으로의 변환

GSP(Geometer's Sketchpad)로 작성한 다이나믹한 이미지를 웹상에서 표현하기 위한 수단으로 JAVA, C++, Visual Basic 등과 같은 프로그래밍언어를 사용할 수 있다. 이외에 Cabri geometry, Mathematica 등을 사용하여 동영상을 만든 후, 복사/붙이기 기능을 사용하여 웹페이지를 만들 수도 있다. 그리고 객체지향언어인 JAVA를 사용한 JSP(Java Sketchpad) 프로그램을 사용하여 인터넷 상에서 GSP를 사용하여 작도한 동적인 도형의 움직임을 표현할 수도 있다. 수학사랑 사이트

(<http://www.mathlove.com>)내에 있는 ‘움직이는 기하’에 가면 JSP를 사용한 몇 가지 움직이는 도형의 예를 보여주고 있다. 이러한 예가 보여 주듯이 본 논문에서는 객체지향언어인 JAVA로 기하학적 도형이 웹상에서 표현 가능함을 확인할 수 있었고 나아가 다양한 수학교과 개발에 대한 무한한 가능성을 확인할 수 있었다.

웹상에 올려진 동적인 도형을 보기 위해서 본 논문에서는 JAVA 애플릿을 사용하여 웹페이지를 만들고, 만들어진 웹페이지를 보려면 자바를 지원하는 Explorer 4.0이상, 네스케이프 4.0이상의 웹브라우저가 필요하다. 이 때 홈페이지에서 움직이는 그림을 만들기 위해 GSP를 사용하여 그린 도형을 JAVA애플릿을 사용하여 HTML로 변환시켰다. JAVA를 모르거나 초보인 경우에는 Sketchpad HTML Converter라는 프로그램을 이용하여 HTML 문서로 바꾼후 간단히 편집할 수 있는 편리한 프로그램을 이용하면 된다.

5. 결 론

고대 그리스이래 수학의 연역적 측면의 강조와 형식화, 추상화로 인하여 수학학습에서 학생들이 가지는 어려움을 이제는 테크놀러지의 발달과 컴퓨터의 다양한 기능으로 완화시켜 줄 수가 있다. 컴퓨터는 추상적이고 형식적인 수학적 대상을 구체적인 형태로 제시할 수 있게 해주며 그 대상을 학생 스스로가 조작·통제할 수 있게 해주기 때문이다. 직접적인 마우스 조작으로 모니터상에서 구체적이고 시각적인 모델을 구현할 수 있으므로 직관적인 관찰도 가능하고 개별학습, 수준별 학습도 가능케 하며 인터넷을 사용하면 시·공간을 초월하여 반복학습도 가능케 한다.

본 논문에서는 기하 S/W GSP(Geometer's Sketchpad)를 사용하여 피타고라스의 정리를 객체지향 언어인 JAVA를 사용한 JSP(Java SkechPad)프로그램을 사용하여 웹상에서 동적인 도형을 경험할 수 있도록 하였다. 멀티미디어 환경에 익숙한 학생들에게 좀 더 친근하게 기하학적 도형에 관하여 흥미를 유발시킬 수 있는 자료를 개발해 본 것이다. 인터넷을 통한 웹상에서의 학습은 언제 어디서나 학습자에게 반복학습의 기회를 제공해 주는 매력적인 교재인 것이다.

참 고 문 헌

- 강순자·고상숙 (1999). 공간 능력을 신장하기 위한 기하 학습자료 개발: GSP를 이용하여 정다면체 구성, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **38(2)**, pp.178-187.
- 계영희 (2000). GSP를 활용한 중학교 수학 교과 연구 -피타고라스 정리를 중심으로- 수학 사학회지 **13(2)**, pp.121-132.
- 교육부 (1999). 중학교 교육과정 해석(I)-총론, 특별활동.
- 김영국의 5인 (2000). 학교수학의 각 영역에 대한 선호도 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학

- 교육 ≥ **39(2)**, pp.127-144.
- 김용운 · 김용국 (1984). 공간의 역사, 현대과학신서 **51**, 서울: 전파과학사.
- 김정여 (2001). 웹 기반 수업의 가장 간단한 형태, 수학사랑 Math Festival 프로시딩, **3(2)** pp.158-178.
- 김향숙 (2001). 평면변환기하에 있어서 Mathematica를 이용한 교수-학습방법, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **40(1)**, pp.93-102.
- 박혜숙 (2001). 제7차 교육 과정에 따른 중학교 수학 교과에서의 특별 활동, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **40(1)**, pp.53-66.
- 신동선 · 류희찬 (1998). 수학과 컴퓨터, 서울: 경문사.
- 조완영 · 권성룡 (2000). 컴퓨터공학의 도입을 위한 수학교육연구의 방향, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **39(2)**, pp.179-186.
- Dan Bennett (1995). *Pythagoras Plugged in Proofs and Problems*, Key Curriculum Press, C.A.
- Eugene Klotz & Doris Schattschneider (1995). *The Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, C.A.
- Lakatos, I. (1976). *Proof and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press,
- Michael Serra (1997). *Discovering Geometry 2nd*, Key Curriculum Press, C.A.
- NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)(1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA: Author,
- NCTM, Standard (2000). (Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft), Reston, VA: NCTM, Inc.,pp.1-75.