韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 477-493.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 477-493.

창의성 신장을 위한 수학 게임 자료 개발 연구(II)

이 경 언 (한국교원대학교 대학원)

본 연구에서는 수학적 개념이나 수학 문제해결의 아이디어와 관련된 수학 게임을 소개한다. 더 나아가 수학 게임 개발 준거를 창의성의 구성요소와 관련하여 제시하고 수학 게임 자료를 이용한 수업 프로토콜을 제시한다.

I. 서 론

창의성 연구에서 학생들의 창의적인 사고를 가능하게 할 자료나 문제 상황의 제시가 매우 중요한 역할을 한다는 것은 쉽게 생각할 수 있다. 송상헌(1998)의 설문 조사에서도 영재교육을 활성화시키기 위해 시급히 해야할 것에 대해서 교수나 현장 교사 모두가 실재로 운영할 수 있는 학습 자료의 개발이 우선되어야 한다고 하였다. 본 연구는 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 12에서 발표한 "창의성 신장을 위한 수학 게임 자료 개발 연구(이경언, 2001)"의 후속연구이다. 지난 연구에서는 '바둑돌 놓기'라는 게임을 통해서, 학생들 스스로 게임의 규칙과 승리전략을 이끌어 낼 수 있도록 여러 가지 활동과 탐구문제, 예제 등을 제시하였다. 본 연구에서 제시하는 두 가지 게임은 지난 연구에서 예제문제로 제시되었던 게임을 체계화한 것이다.

창의성의 개념, 창의성과 관련된 사고 기능, 창의성 신장을 위한 학습 프로그램 개발의 준거 등을 종합하여 생각해볼 때, 수학게임은 학생들에게 흥미, 관심, 의욕을 불러일으킬 수 있는 소재이며, 많은 학생들이 자신감을 가지고 접근할 수 있는 소재이다. 또한 게임은 단순 반복 훈련이나 연습이 가지는 피로와 지루함을 없애면서 학습에 스스로 참여하게 하며, 특히 게임이 가지는 규칙을 찾는 활동, 규칙을 정교화해 보는 활동, 다양하고 새로운 규칙을 생각해보는 활동, 변화된 규칙에 따라 게임을 진행시켜보는 활동, 규칙에 따른 승패를 예상하고 이를 수학적으로 표현해 보는 활동 등은 자연스럽게 학생들의 창의적인 사고를 자극할 수 있다. 이밖에도 게임에 나타난 규칙이나 원리를 탐구하는 활동은 평소에 쉽게 지나치던 많은 현상들에 대해 새로운 시각을 갖고 다양하고 주의 깊게 살펴보는 태도를 갖게 할 수 있다.

그러나 지금까지 제시된 게임 자료들은 일관된 주제 아래에서 학생들이 추론하고 탐구 활동할 수 있는 체계적인 과제의 형태로 제시되기보다는 관련성 없는 많은 게임들을 단편적으로 제시하고 있는 수준에 머물고 있다. 게임자료가 학생들에게 이러한 기회를 제공해주기 위해서는 하나의 일관된 주제와 관점아래에서 좀더 체계적으로 해결을 위해 나아가는 방향으로 정교화되는 자료이어야 한다.

그러므로 본 연구에서는 다양한 게임들 중에서 수학적 개념이나 수학 문제해결의 아이디어와 관

련된 수학 게임을 중심으로, 게임의 규칙과 승리 전략을 탐구하고 이를 수학적으로 표현할 수 있는 기회를 제공하는 게임 자료를 개발하고, 개발된 게임 자료를 이용한 수업 프로토콜을 제시한다.

Ⅱ. 본 론

수학게임과 관련된 많은 연구에서 여러 가지 게임들이 소개되고 있다. 선행 연구 및 본 연구에서 제시한 게임의 일부가 이미 김대식(2001), 이충호(1990), 임승원(1995), 좌준수 · 임중삼(2000), 한인기(2001), Gardiner(1987)의 연구와 문헌에서 완성된 문제의 형태로 제시되고 있다. 그러나 이런 연구에서 제시되는 문제들은 학생들이 스스로 문제해결에 접근할 수 있도록 체계적으로 제시되고 있지 못하다. 그러면 일관된 주제 아래에서 학생들이 추론하고 탐구 활동할 수 있는 체계적인 과제의 형태란 무엇인가? 이와 관련하여 본 연구자는 선행 연구에서 바둑돌 놓기라는 게임을 통하여 게임자료를 체계적으로 제시하고자 하였다. 본 연구에서는 선행 연구에서 예제로 제시됐던 바둑돌 옮기기와 동전 옮기기 게임을 체계화한 게임 자료를 제시할 것이다.

1. 개발한 게임 자료 설명

먼저 각각의 게임의 개발 준거를 창의성의 구성요소들과 관련하여 어떤 점을 중심으로 하여 개발됐는지에 대하여 설명해보고자 한다.

(1) 게임(Ⅱ) 바둑돌 옮기기

바둑돌 옮기기는 5개의 활동 과제와 8개의 탐구과제, 4개의 도전문제로 이루어진다. 바둑돌 옮기기 게임은 기본적으로 선행 연구인 게임(Ⅰ) 바둑돌 놓기와 전략이 같은 게임이다. 바둑돌 놓기와 문제의 형태는 다르나 그 해결 방법은 같다. 서로 다른 형태로 주어진 문제에서 동일한 규칙이 존재함을 알고, 이를 통해 앞에서 탐구한 내용을 문제 해결에 적용시켜 볼 수 있는 기회를 제공할 수 있도록 개발되었다.

먼저 학생들이 스스로 게임의 승리 전략을 탐구할 수 있도록 간단한 규칙을 적용하는 게임에서 시작하여 좀더 복잡한 규칙으로 나아가도록 게임을 배열하였다(활동Ⅱ-1, Ⅱ-2, Ⅱ-3). 그리고 이러한 활동과 앞의 게임(Ⅰ)에서의 규칙과 비교해보는 과정(탐구Ⅱ-2, Ⅱ-3, Ⅱ-4)을 포함시켜 두 게임의 공통성을 탐구할 수 있도록 하였다.

이후에 게임Ⅰ의 규칙들을 적용해 보는 문제(도전문제Ⅱ-2, Ⅱ-3), 새로운 규칙을 만들어서 적용해 보는 문제(탐구Ⅱ-8) 등을 제시하였다.

바둑돌 놓기 게임의 개발에서는 창의성의 구성요소와 관련하여 융통성, 독창성에 특히 중심을 하여 개발하였다. 즉, 앞에서 탐구한 게임과 형태는 다르지만 그 규칙의 공통성을 파악하고 이를 통해 게임의 승리 전략을 탐구하고 적용할 수 있도록 제시하였다. 이밖에도 다양한 규칙의 개발은 독창성과 관련되며, 승리 전략의 일반화는 정교성과 관련된다.

(2) 게임(III) 동전 옮기기

동전 옮기기는 4개의 활동 과제와 9개의 탐구과제, 5개의 도전문제로 이루어진다. 동전 옮기기 게임은 기본적으로 게임(II)의 바둑돌 옮기기와 형태가 비슷하다. 그러나 승리 전략은 조금 다른 게임이다. 띠의 수가 승리 전략의 선택에 큰 영향을 준다는 것은 비슷하지만 이밖에도 처음 동전의 놓인 위치가 승패에 큰 영향을 미친다는 것에 주의할 필요가 있다. 게임(I)과 게임(II)가 서로 다른 형태로 주어진 문제에서 동일한 규칙이 존재함을 알고, 이를 통해 앞에서 탐구한 내용을 문제 해결에 적용해보는 문제라면 게임(III)은 이와 반대로 비슷한 형태지만 다른 승리 전략을 찾는 문제로 학생들의 창의성 신장에 도움이 될 것이다.

먼저 학생들이 새로운 규칙을 익히고 스스로 전략을 탐구해 볼 수 있는 문제들을 제시하였다(활동 III-1, III-2, III-3, 탐구 III-1). 이러한 활동과 탐구를 통해서 학생들에게 규칙을 일반화해보는 과정을 제시하고(탐구III-2, III-3, III-4), 일반화된 규칙을 적용해 보는 문제를 제시하였다(탐구III-4). 이러한 과정 후에는 새로운 규칙을 적용해보는 문제를 제시하였다(탐구III-5, III-6, III-7, III-8, 도전 III-1, III-2, III-3, III-4, III-5).

동전 옮기기는 창의성의 구성요소와 관련하여 유창성, 융통성, 독창성을 중심으로 개발하였다. 먼저 다양한 규칙을 생각해보는 것은 독창성과 융통성의 개발에 도움을 줄 수 있으며, 다양한 해결 전략을 찾는 것은 융통성의 신장에 도움을 줄 수 있다. 기본적으로 게임의 규칙을 일반화해보는 활동은 정교성의 신장에 도움을 주며, 주어진 문제에 대하여 체계적으로 탐구하는 활동은 수학 학습에서도 매우 유용한 태도이다.

2. 게임 자료 제시

이제부터 A, B는 두 사람이 게임을 하는 경우에 각각 게임을 먼저 시작하는 사람과 나중에 시작하는 사람으로 약속한다.

1) 게임 (II) 바둑돌 옮기기

[문제] 20개의 칸이 그려진 띠가 있다. 띠의 양 끝에는 바둑돌이 각각 놓여 있다. 두 사람이 차례로 임의의 바둑돌을 양끝으로부터 중앙으로 한 칸, 두 칸 혹은 세 칸씩 움직일 수 있으며, 한 바둑돌이 다른 바둑돌을 넘지는 못한다고 한다. 이때, 더 이상 옮기지 못하는 사람이 진다고 할 때, 누가 승리하겠는가?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
●																			○

위 게임(II)에서 주어진 조건과 규칙을 다음과 같이 정리할 수 있다.

마-1. 띠의 수 : $1\times20=20$칸

마-2. 한 번에 옮길 수 있는 칸의 수 : 1, 2, 3

마-3. 다른 돌을 뛰어넘지 못한다.

마-4. 마지막에 더 이상 옮기지 못하는 사람이 진다.

그러면 위에 제시된 게임의 규칙과 승리 전략을 탐구해보기에 앞서 좀더 간단한 몇 가지 활동을 통해 게임의 규칙과 승리전략을 생각해보자.

활동 Ⅱ-1. 위에 제시된 게임(Ⅱ)의 규칙을 아래와 같은 좀더 간단한 규칙으로 바꿔보자.

바-1. 띠의 수 : 1×5=5개

바-2. 한 번에 옮길 수 있는 칸의 수 : 1

바-3. 다른 돌을 뛰어넘지 못한다.

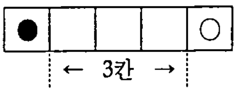
바-4. 마지막에 더 이상 옮기지 못하는 사람이 진다.

새로운 규칙 바-1, 2, 3을 적용하여 게임을 하였을 때,

(i) 누가 승리하겠는가?

(ii) 그 사람은 반드시 승리하겠는가? 그 이유는 무엇인가?

[풀이]

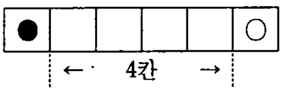


활동 Ⅱ-2. 활동 Ⅱ-1에서 띠의 수가 1×6라고 하자.

(i) 누가 승리하겠는가?

(ii) 그 사람은 반드시 승리하겠는가? 그 이유는 무엇인가?

[풀이]



활동 Ⅱ-3. 띠의 수를 다양하게 변화시키면서 그 승패를 예상해 보아라.

(i) 1×9　　(ii) 1×15　　(iii) 1×16　　(iv) 1×20

탐구 Ⅱ-1. 활동 Ⅱ-1, 2, 3의 결과를 통해 다양한 띠의 수에 따라 승패가 어떻게 결정되는지 일반화시켜 보자.

[풀이] 게임 참여자가 한번에 옮길 수 있는 칸의 수를 한 칸으로 제한한 경우 승패는 움직일 수 있는 띠의 수에 따라 결정된다. 즉 띠의 수가 홀수(2n+1)인 경우에는 A가 반드시 승리하게 되고, 띠의 수가 짝수(2n)인 경우에는 B가 반드시 승리하게 된다.

탐구 II-2. 탐구 II-1에서 일반화 된 내용을 게임(I) 바둑돌 놓기의 결과와 비교하여 보아라.

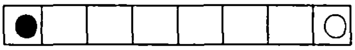
탐구 II-3. 게임(II) 바둑돌 옮기기의 규칙과 게임(I) 바둑돌 놓기의 규칙을 서로 비교해 보아라. 어떤 차이가 있는가?

[풀이] 우선 띠의 크기는 바둑판의 크기와 같다. 즉, 1×20 띠와 1×20 바둑판은 표현만 다르지 똑같은 것이다. 다음으로, 옮긴다는 표현에 주목하자. 예를 들어, 왼쪽에 있는 검은 바둑돌을 오른쪽으로 한 칸 옮긴다는 것은 결국 두 번째 칸에 새로운 검은 바둑돌을 놓은 것과 같은 결과임을 알 수 있다. 마찬가지로 오른쪽의 흰 바둑돌을 왼쪽으로 두 칸 옮긴다는 것은 두 개의 흰 바둑돌을 놓는 것과 같음을 알 수 있다. 결국 게임(II) 바둑돌 옮기기의 규칙과 게임(I) 바둑돌 놓기의 규칙은 같은 규칙임을 알 수 있다.

탐구 II-4. 탐구 II-3의 내용을 통해서 바둑돌 놓기의 승리전략을 바둑돌 옮기기에 적용할 수 있는가?

탐구 II-5. 1×8=8 띠를 생각하자. 띠의 양 끝에는 바둑돌이 놓여 있다. 두 사람이 번갈아 한번씩 바둑돌을 옮긴다. 바둑돌은 한번에 한 칸 또는 두 칸을 옮길 수 있다. 더 이상 옮기지 못하는 사람이 진다고 할 때 누가 승리하겠는가?

[풀이] 옮길 수 있는 칸의 수는 6칸이고, 두 사람이 한번에 한 칸 또는 두 칸을 옮길 수 있으므로, 게임 I 의 승리전략을 적용하면 B가 승리함을 알 수 있다.



즉, B는 A가 옮기는 띠의 수에 따라 합이 3칸이 되게 옮기면 반드시 승리하게 된다. 예를 들어, 검은 바둑돌이 1칸 움직이면, 흰 바둑돌은 두 칸 움직이고, 검은 바둑돌이 두 칸 움직이면 흰 바둑돌은 한 칸 움직이면 된다.

탐구 II-6. 다음과 같은 규칙을 생각해보자. 승패는 어떻게 되겠는가?

바-1. 띠의 수 : 1×6=6개

바-2. 한 번에 옮길 수 있는 칸의 수 : 1, 2, 3

바-3. 마지막에 더 이상 옮기지 못하는 사람이 진다.

바-4. 다른 돌을 뛰어넘지 못한다.

바-5. 앞 사람이 옮긴 칸수와 같은 수의 칸을 옮기지 못한다.

[풀이] B가 반드시 승리함을 알 수 있다.

탐구 Ⅱ-7. 탐구Ⅱ-6의 규칙 바-5를 다음과 같은 새로운 규칙으로 바꿔서 적용해보자. 승패는 어떻게 되겠는가?

바-1. 띠의 수 : 1×6=6개

바-2. 한 번에 옮길 수 있는 칸의 수 : 1, 2, 3

바-3. 마지막에 더 이상 옮기지 못하는 사람이 진다.

바-4. 다른 돌을 뛰어넘지 못한다.

바-5. 앞 사람이 옮긴 칸수와 합이 4칸이 될 수 없다.

[풀이] A가 반드시 승리함을 알 수 있다.

탐구 Ⅱ-8. 바둑돌 옮기기의 규칙을 자세히 살펴보자. 뭔가 애매한 부분이 있을 것이다. 왜 바둑돌은 전진만 하는가? 앞으로 옮겼다가 다시 뒤로 옮길 수도 있지 않은가?

이것을 새로운 규칙으로 첨가시켜 보자. 즉, 바둑돌은 전진과 후진이 모두 가능하다고 할 때, 승패는 어떻게 되겠는가?

아-1. 띠의 수 : 1×6=6개

아-2. 한번에 옮길 수 있는 칸의 수 : 1

아-3. 바둑돌은 앞으로, 뒤로 모두 옮길 수 있다.

아-4. 다른 돌을 뛰어넘지는 못한다.

아-4. 마지막에 더 이상 옮기지 못하는 사람이 진다.

[풀이] 두 가지 경우로 나누어 생각해보자.

●					○

① 우선 양쪽 끝에서 출발한 두 바둑돌이 중앙에서 마주칠 때가지 계속 전진을 한다고 해보자. 새로운 규칙을 적용하기 전에는 여기서 게임은 끝나게 된다. 그러나 새로운 규칙에 따르면 후진이 가능하므로, 후진을 하게 된다. 만약 A가 2칸을 후진하면, B가 2칸을 전진하면 계속 같은 상황이 나타남을 알 수 있다. 즉, 후진은 승패에 아무런 영향을 미치지 않는다.

② 그러면, 게임 도중에 누군가 후진을 하는 경우에는 어떻겠는가? 전진을 하는 경우에는 위에서 정리한 승리전략대로 진행하고, 후진을 하는 경우는 먼저 후진 한 사람이 후진한 만큼의 칸을 전진하면 승리하게 된다. 즉, 이 경우에 전진 한 칸과 후진 한 칸을 합하면 계속 같은 상황이 이어짐을 알 수 있다.

활동 Ⅱ-4. 탐구 Ⅱ-8의 규칙 아-1에서 띠의 칸수를 다양하게 바꿔보자. 승패는 어떻게 되겠는가?

(ⅰ) 1×8 (ⅱ) 1×10 (ⅲ) 1×15 (ⅳ) 1×17

활동 Ⅱ-5. 탐구 Ⅱ-8의 규칙 아-2를 다양하게 바꿔보자. 즉, 한번에 옮길 수 있는 띠의 칸수가 다음과 같을 때 누가 승리하겠는가?

(i) 1, 2 (ii) 1, 3 (iii) 1, 2, 3 (iv) 1, 2, 3, 4

도전문제 Ⅱ-1. 바둑돌 옮기기에서 승패가 결정되지 않는 상황이 되도록 하는 새로운 규칙을 적용할 수 있는가?

도전문제 Ⅱ-2. 다음과 같은 규칙을 적용하여 게임을 하였을 때, 승패는 어떻게 되겠는가? 누군가 반드시 승리할 수 있다면, 그 승리 전략을 설명해 보아라.

규칙 1. 띠의 수 : $1 \times 30 = 30$

규칙 2. 한번에 옮길 수 있는 칸의 수 : 1, 2, 4

규칙 3. 다른 바둑돌을 뛰어넘지 못한다.

규칙 4. 더 이상 옮기지 못하는 사람이 진다.

[풀이] B가 반드시 승리할 수 있다. 어떻게?

도전문제 Ⅱ-3. 도전문제 Ⅱ-2에서 띠의 칸수가 다음과 같은 경우에 승패는 어떻게 되겠는가?

(i) 1×6 (ii) 1×9 (iii) 1×12 (iv) 1×14

[풀이] (i), (ii), (iii)의 경우는 A가 반드시 승리하고, (iv)의 경우는 B가 반드시 승리하는 전략이 존재한다.

도전문제 Ⅱ-4. 도전문제 Ⅱ-2과 Ⅱ-3의 결과를 이용하여 임의의 칸을 갖는 띠가 주어졌을 때, 승패를 예상하고 왜 그런지 설명해 보아라.

2) 게임 (Ⅲ) 동전 옮기기

[문제] 20개의 칸을 가진 띠가 있다. 처음에 세 개의 동전이 아래 그림과 같이 놓여 있다. 두 사람이 한 번에 한 개의 동전을 왼쪽으로 한 칸씩 옮긴다고 하자. 각각의 동전은 다른 동전의 위 또는 아래에 겹칠 수 있다. 동전을 모두 가장 왼쪽 칸으로 옮길 때 마지막으로 동전을 옮기는 사람이 이긴다고 할 때, 누가 이기게 되는가?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
															●		●		●

위 게임(Ⅲ)에서 주어진 조건과 규칙을 다음과 같이 정리할 수 있다.

자-1. 띠의 수 : $1 \times 20 = 20$

자-2. 한번에 한 개의 동전을 왼쪽으로만 옮길 수 있다.

자-3. 한 번에 옮길 수 있는 칸의 수 : 1

자-4. 마지막에 더 이상 옮기지 못하는 사람이 진다.

그러면 위에 제시된 게임의 규칙과 승리 전략을 탐구해보기에 앞서 좀더 간단한 몇 가지 활동을 통해 게임의 규칙과 승리전략을 생각해보자.

활동 Ⅲ-1. 위에 제시된 게임(Ⅲ)의 규칙을 아래와 같은 좀더 간단한 규칙으로 바꿔보자.

차-1. 띠의 수 : $1 \times 8 = 8$

차-2. 한번에 한 개의 동전을 왼쪽으로만 옮길 수 있다.

차-3. 한 번에 옮길 수 있는 칸의 수 : 1

차-4. 마지막에 더 이상 놓지 옮기지 사람이 진다.

새로운 규칙 차-1, 2, 3, 4를 적용하여 게임을 진행시켜보자. 우선 띠의 크기를 8칸으로 고정시키고 동전의 위치를 다양하게 움직여보자.

(i) 띠의 크기 8칸, 동전 1개, 8번째 칸에 동전이 놓여 있음.

(ii) 띠의 크기 8칸, 동전 1개, 6번째 칸에 동전이 놓여 있음.

(iii) 띠의 크기 8칸, 동전 1개, 4번째 칸에 동전이 놓여 있음.

[풀이]

(i)

							●

A가 반드시 승리한다.

(ii)

					●		

A가 반드시 승리한다.

(iii)

			●				

A가 반드시 승리한다.

활동 Ⅲ-2. 활동 Ⅲ-1 (i)~(iii)의 결과를 생각하며 다음 경우에 승패를 예상해보자.

[풀이]

(i) 띠의 크기 8칸, 동전 3개, 동전은 4번째, 6번째, 8번째 칸에 놓여 있음.

			●		●		●

편의상 각각의 동전을 4번 동전, 6번 동전, 8번 동전이라고 하자. 그러면 활동 Ⅲ-1의 결과에 의해서, 4번 동전은 3칸, 6번 동전은 5칸, 8번 동전은 7칸을 움직이게 된다. 세 개의 동전은 왼쪽으로 한 칸씩만 움직일 수 있으므로 세 개의 동전을 모두 가장 왼쪽의 칸으로 옮기기 위해서는 $3+5+7=15$칸을 움직이면 된다는 것을 알 수 있다. 그러므로, A가 반드시 승리하게 된다.

활동 III-3. 띠의 수가 9칸이고 활동 III-2의 규칙 차-1, 2, 3, 4가 적용되는 경우를 생각해보자.
(i) 띠의 크기 9칸, 동전 1개, 9번째 칸에 놓여 있음.
(ii) 띠의 크기 9칸, 동전 3개, 동전은 5번째, 7번째, 9번째 칸에 놓여 있음.

탐구 III-1. 다음 각각의 경우에 대하여 누가 승리하는지 설명하여 보아라.
(i) 8칸, 동전 4개, 동전은 2번째, 4번째, 6번째, 8번째 칸에 놓여 있음.
(ii) 8칸, 동전 2개, 동전은 5번째와 8번째 칸에 놓여 있음.
(iii) 8칸, 동전 3개, 동전은 6번째, 7번째, 8번째 칸에 놓여 있음.
(iv) 8칸, 동전은 3개, 동전은 3번째, 5번째, 7번째 칸에 놓여 있음.
[풀이]
각각 B, A, B, B가 승리한다.

탐구 III-2. 이 게임에서 승리하기 위해서 게임 참여자는 어떤 사실에 집중해야 하는가?
만약 두 명의 게임 참여자 A, B가 임의의 위치에 바둑돌을 놓고 게임을 진행한다고 할 때, B는 자신이 항상 승리하도록 동전을 놓을 수 있는가?
[풀이] 승리하기 위해서는 동전이 놓인 칸이 몇 번째 칸인지에 집중해야 한다. 몇 개의 동전이 놓여 있던지 간에 동전이 놓인 칸의 위치를 안다면 쉽게 게임에서 승리할 수 있다.

탐구 III-3. 활동 III-1, 2의 결과와 탐구 III-1의 결과를 종합하여 보아라.
2개의 동전이 놓인 위치가 임의로 주어질 때, 승패는 어떻게 결정되겠는가?
[풀이]
동전이 2개 놓여진 위치를 각각 m, n ($m>1$, $n>1$)이라고 하자.
① m=홀수, n=홀수 인 경우
: m과 n 모두 짝수번 옮기므로, 전체도 짝수번 옮기게 된다. 결국 B가 반드시 승리한다.
② m=홀수, n=짝수 인 경우
: m은 짝수번 옮길 수 있고, n은 홀수번 옮길 수 있으므로 전체로는 홀수번 옮기게 된다. 결국 A가 반드시 승리한다.
③ m=짝수, n=홀수 인 경우
: ②의 경우와 같다.
④ m=짝수, n=짝수 인 경우
: m과 n 모두 홀수번 옮기므로, 전체는 짝수번 옮기게 된다. 결국 B가 반드시 승리한다.

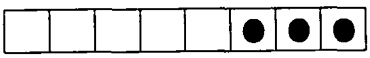
활동 Ⅲ-4. 다음은 바둑돌이 놓여 있는 칸의 위치를 말한다. 각각의 경우에 누가 승리하겠는가?
(i) 2, 5, 6 (ii) 3, 6, 9 (iii) 3, 5, 7 (iv) 2, 4, 6
[풀이]
탐구Ⅲ-3의 결과를 이용해보자.

탐구 Ⅲ-5. 앞에서는 차-2의 규칙에 의해서 한번에 하나의 동전만을 움직일 수 있었다. 만약 새로운 규칙으로 "동전이 겹쳐질 때 두 개의 동전을 함께 움직인다"는 규칙으로 차-2를 바꾼다면 승패는 어떻게 되겠는가?
[풀이]
두 개의 동전을 한번 움직인다는 것은 한 개의 동전을 두 번 움직이는 것과 같다. 그러므로 두 개의 동전을 한번 움직일 때마다 하나씩 옮길 때보다 한번의 이동을 적게 함을 알 수 있다.
그러므로 승패는 하나씩 이동했을 때 전체 이동횟수에서 두 개씩 이동한 횟수를 뺀 횟수를 가지고 승패를 결정할 수 있다.

도전문제 Ⅲ-1. 탐구 Ⅲ-5의 규칙을 적용하여 다음 각각의 경우에 승패를 결정하여 보자. 다음 세 가지 경우는 한 칸씩만 움직일 때는 모두 B가 승리하는 경우이다. 두 개를 겹쳐서 함께 움직일 때, A가 승리하기 위해서는 어떻게 하면 되겠는가?

(i) 

(ii) 

(iii) 

도전문제 Ⅲ-2. 8칸의 띠에 4개의 동전이 5번째, 6번째, 7번째, 8번째 칸에 놓여 있다. 두 개를 겹쳐서 함께 움직일 수 있는 경우 승패를 결정해 보아라.

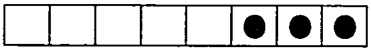
탐구 Ⅲ-6. 만약 세 개의 동전이 겹친 경우, 세 개의 동전을 함께 움직일 수 있다고 했을 때, 승패는 어떻게 되겠는가?
[풀이]
세 개의 동전을 한번 움직인다는 것은 한 개의 동전을 세 번 움직이는 것과 같다. 그러므로 세 개의 동전을 한번 움직일 때마다 하나씩 옮길 때보다 두 번의 이동을 적게 함을 알 수 있다. 그런데 여기서 두 번 이동이 적다는 것은 원래 이동과 짝수 번의 차이가 난다. 짝수 번의 이동은 게임의 승

패에 영향을 미치지 않는다. 그러므로 승패는 하나씩 이동했을 때와 같다.

도전문제 Ⅲ-3. 탐구 Ⅲ-6의 규칙을 적용하여 다음 각각의 경우에 승패를 결정하여 보자.

(i) 

(ii) 

(iii) 

도전 문제 Ⅲ-4. 8칸의 띠에 4개의 동전이 5번째, 6번째, 7번째, 8번째 칸에 놓여 있다. 세 개를 겹쳐서 함께 움직일 수 있는 경우 승패를 결정해 보아라.

탐구 Ⅲ-7. 도전문제 Ⅲ-1과 Ⅲ-2에서 보면 어느 위치에서 두 개의 바둑돌이 겹쳐지느냐가 승패에 큰 영향을 미친다. 겹쳐지는 위치가 승패에 어떤 영향을 미치는지 생각해보아라.

[풀이]

두 가지 경우로 나누어 생각해보자. 일단 동전은 4, 5, 6의 위치에 있다고 생각하자.

① 5번째 칸의 동전을 4번째로 옮겨서 겹치게 하는 경우

5번째 동전을 4번째로 옮기는데 1번(홀수 번)의 이동 필요

그러면 이제 동전은 4번째 칸과 6번째 칸에 짝수 개의 동전이 놓여 있게 된다.

결국 이 경우에 전체 이동횟수는 "1+3+5=9"가 되어 A가 승리하게 된다.

② 6번째 칸의 동전을 5번째로 옮겨서 겹치게 하는 경우

6번째 칸의 동전을 5번째로 옮기는데 1번(홀수 번)의 이동 필요

그러면 이제는 동전은 4번째 칸과 5번째 칸에 동전이 놓여 있다.

결국 이 경우에 전체 이동횟수는 "1+3+4=8"가 되어 B가 승리하게 된다.

탐구 Ⅲ-8. 반드시 왼쪽으로만 움직일 수 있다는 조건을 없애자. 이 조건을 없앤다면 게임의 승패는 어떻게 되겠는가?

탐구 Ⅲ-9. 한 번에 옮길 수 있는 칸의 수를 1, 2칸으로 바꿔서 게임을 진행시켜보자. 승패는 어떻게 되겠는가?

[풀이] 게임(Ⅰ)과 게임(Ⅱ)에서 일반화된 승리전략을 이용하자.

도전문제 Ⅲ-5. 동전이 쌓인 개수만큼 한번에 움직일 수 있다는 규칙으로 바꿔서 게임을 한다면 승패는 어떻게 되겠는가? 즉, 한 개일 때는 한 칸씩만, 두 개가 겹쳤을 경우에는 두 칸까지, 세 개가 겹친 경우는 세 칸까지 움직일 수 있다고 하면 승패는 어떻게 되겠는가?

[풀이] 결국 승패는 전체 이동횟수에서 결정된다.

3. 수업 프로토콜

여기에서는 선행 연구에서 제시한 게임(Ⅰ) 바둑돌 놓기를 이용한 교수-학습 과정에 대한 가상적 프로토콜을 제시하고자 한다. 본 교수-학습 모델은 중학교 수학 특별반 활동을 하는 것을 기본으로 하여 만들어졌다. 한 명의 교사와 네 명의 학생들(봉건, 종현, 민정, 미애)로 구성된 특별반 수업을 생각하자.

게임(Ⅰ) 바둑돌 놓기

교사 : 여러분 안녕하세요.

학생들 : 안녕하세요.

교사 : 휴일은 잘 보냈나요? 표정이 밝은 것을 보니까 기분이 좋은데요. 그럼 오늘은 지난 시간에 약속한 데로, 다 같이 게임을 합시다.

(칠판에 5×6 바둑판을 그린다. 옆에는 몇 개의 바둑돌을 그린다)

교사 : 여러분 집에 바둑판 있어요? 오늘 게임은 바둑판과 바둑돌을 이용한 게임입니다.

봉건 : 바둑판에서 게임을 해요? 알까기해요, 선생님. 그럼 내가 1등일 텐데.

(모두 웃는다)

민정 : 선생님! 근데 바둑판의 수가 너무 적어요. 집에 있는 바둑판에는 칸이 무척 많은 것 같은데.

교사 : 네. 맞아요. 집에 있는 바둑판은 19×19 크기지만, 지금은 5×6 크기 바둑판을 생각해 봅시다. 혹시 바둑 둘 수 있는 사람 있니?

종현 : 조금요.

교사 : 질문 하나 해도 될까? 바둑둘 때, 바둑돌을 어디에다 놓을까?

종현 : 바둑판에 그려진 선들이 만나는 곳에 놓죠.

교사 : 그렇지. 바둑에서는 선이 교차하는 돌을 놓죠. 그렇지만 오늘은 바둑판의 작은 네모칸에 바둑돌을 놓는다고 합시다.

그럼, 미애야. 칠판에 그려진 바둑판에는 바둑돌을 몇 개나 놓을 수 있을까?

미애 : 가로로 5칸, 세로로 6칸. 5×6=30칸이니까. 30개를 놓을 수 있겠네요.

교사 : 그렇지. 30개를 놓을 수 있어요. 그럼 이제부터 오늘 할 게임을 소개할께요.

자, 여기에 30칸 짜리 바둑판이 있습니다. 바둑판의 네모 칸 안에 두 사람이 차례로 바둑돌을

놓는다고 합시다. 바둑돌은 한번에 세 개까지 놓을 수 있으며 반드시 한 개 이상의 돌을 놓아야 합니다. 이때 바둑돌을 더 이상 놓지 못하는 사람이 게임에서 진다고 합시다.

누가 게임에서 승리할까요?

봉건 : 모르죠. 해봐야 알죠.

미애 : 누군가는 이길 것 같은데요. 무승부는 없을 것 같아요.

교사 : 좋은 지적이에요. 그런데 왜 무승부가 없지? 설명해 주겠니?

미애 : 네. 모두 30칸인데 두 사람이 번갈아 가면서 놓으니까 누군가 마지막 칸을 채우면 다른 사람은 더 이상 놓을 수 없기 때문입니다.

교사 : 네. 잘 했어요. 그럼 연습 삼아 한번 게임을 해 볼까요? 봉건이랑 민정이가 게임을 하고, 미애랑 종현이랑 게임을 해 봐요.

(각각 게임을 한다)

교사 : 이긴 사람?

민정, 종현 : 제가 이겼어요.

교사 : 잘했어요. 근데, 어떻게 이겼는지 얘기할 수 있겠니?

민정 : 어떻게 이기다뇨. 그냥 규칙대로 하다보니까 이긴 것 같아요. 운이 좋았어요.

종현 : 예. 저도 잘 모르겠어요. 그런데 승리하는 방법이 있나요?

교사 : 글쎄요? 같이 생각해봅시다. 규칙이 너무 복잡하니까 좀더 쉬운 규칙을 생각해볼까요? 한번에 하나의 바둑돌을 놓는다고 생각하면 어떨까요?

봉건 : 바둑돌을 무지 여러 번 놓아야 겠네요.

교사 : 그래 바둑판이 너무 넓은 것 같으니까. 3×3짜리 바둑판을 생각해 볼까요.

봉건 : 9칸이니까. 먼저한 사람이 이길 것 같은데요. 왜냐하면 두 사람이 4개씩 놓으면 하나가 남는데, 먼저한 사람이 놓는 순서가 되잖아요.

교사 : 맞아요. 그렇다면 4×4 바둑판이면 어떨까요? 또 4×5 바둑판이면 누가 이길까요?

민정 : 둘 다 나중에 한 사람이 이겨요.

교사 : 왜 그렇지?

민정 : 먼저한 사람은 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째 같이 홀수번째 칸을 채우고 나중한 사람은 두 번째, 네 번째, 여섯 번째 같이 짝수번째 칸을 채우니까 두 번째 사람이 승리해요.

교사 : 잘했어요. 그럼 종현아. 봉건이와 민정이가 한 말을 정리할 수 있겠니? 그럼 이제부터 먼저 한 사람을 A라고 하고 나중한 사람을 B라고 합시다.

종현 : 그러니까. 한번에 하나의 바둑돌을 놓는다고 하면, 바둑판 숫자가 홀수인지 짝수인지에 따라서 승패가 결정될 것 같은데요. 홀수개이면 A가 이기고 짝수개이면 B가 승리하겠네요.

교사 : 맞아요. 그럼 좀더 다른 규칙을 생각해볼까요? 한번에 하나 또는 두 개의 바둑돌을 놓을 수 있다고 해볼까요? 누가 승리할까요?

미애 : 바둑판의 개수가 하나나 두 칸이면 A가 이겨요. 그리고 세 칸이면 B가 이길 것 같은데요.

교사 : 왜 그렇지. 설명해 보겠니?

미애 : 그러니까. 하나나 두 칸이면 A가 모두 채울 수 있잖아요. 그러니까 A가 이겨요. 그런데 세 칸이면 A가 하나 놓으면 두 칸이 남고, A가 두 개 놓으면 한 칸이 남고 그 다음에 B 차례인데, B가 각각 두 개 놓고, 한 개 놓으면 A는 더 이상 놓을 수 없게 되요. 그러니까 B가 승리하죠.

봉건 : 신기하네. 그럼 4칸이면 누가 이겨?

민정 : A가 이기겠네.

봉건 : 왜?

민정 : 어휴, 바보야. 그것도 몰라. A가 처음에 한 개 놓으면 어떻게 할래?

봉건 : 한 개 놓으면, 3칸 남으니까. B가 하나 놓으면 A는 두 개 놓고 B가 두 개 놓으면 … 아하! 그렇구나. 진짜 신기하다.

종현 : 그럼 5칸일 때도 A가 승리하겠다. 6칸일 때는 …

미애 : B가 이겨.

민정 : 먼저 번에는 칸의 수에 따라 승패가 결정됐는데, 이번에도 그럴까?

미애 : 맞아. 그런 것 같아. A는 1, 2, 4, 5칸일 때 이기고, B는 3, 6칸일 때 이기잖아. 잘 보면 B는 3의 배수일 때 승리하는 것 같은데.

종현 : 그렇네. 그럼 7, 8칸일 때는 A가 승리하겠네. 9칸일 때는 B가 승리하고.

민정 : 미애 추측이 맞는 것 같아. 7칸일 때, A는 하나를 놓고 그 다음부터는 B가 놓는 것에 따라 3칸을 남기면 될 것 같아. 8칸일 때는 처음에 두 개를 놓으면 마찬가지고.

교사 : 뭔가 멋진 규칙을 찾아낸 것 같은데. 이제 처음 주어진 문제를 푸는 것도 시간 문제겠구나. 같은 방법으로 접근하면 될 것 같은데.

봉건 : 네 풀었어요. 세 개까지 놓기로 하면, 4칸일 때 B가 이겨요. 1, 2, 3칸 일 때는 당연히 A가 이가고요. 그리고 5칸일 때는 또 A가 이기고 ….

민정 : 많이 늘었네.

봉건 : 기본이지.

종현 : 앞에서도 그렇지만 A가 이기고, B가 이기는 칸수가 정말 규칙적으로 나타나는 것 같은데, 여기서는 B의 경우는 4, 8칸일 때 승리하니까, 혹시 4의 배수인 경우에는 항상 B가 승리하는 것이 아닐까?

미애 : 멋진데. 그럼 처음에는 30칸이었으니까 A가 승리하겠구나. 근데 어떻게 이기지?

봉건 : 5칸이면 한 개 놓아서 4칸 만들었잖아. 그리고 10칸이면 2개 놓아서 8칸 놓으면 이기고 …

민정 : 아하! 30칸이면 두 개 놓아서 28칸 만들면 A가 이기겠다. 28칸이면 두 번째 사람이 이기는데, 여기서는 A가 두 번째 사람이 되잖아.

봉건 : 뭐야. 내가 말하려고 했는데.

교사 : 알아냈구나. 모두 다 알겠니?

학생들 : 예

교사 : 그럼 40칸이면 누가 승리할까요?

봉건 : 당연하죠. B가 이겨요.

교사 : 잘했어요. 그럼 한번에 놓을 수 있는 바둑돌의 수를 잘 생각해보자. 하나씩 놓을 때는 짝수, 홀수로 승패가 결정되고, 두 개까지 놓을 때는 3의 배수냐 아니냐에 따라 승패가 결정되고, 세 개까지 놓을 때는 4의 배수냐 아니냐에 따라 승패가 결정됐어요. 왜 그렇지?

종현 : 한번에 두 개까지 놓는다고 하면, 한번씩 했을 때, 최소 2개 최대 4개까지 놓을 수 있는데, 내가 승리하려면 다른 사람이 만들지 못하게 해야 하니까 세 개씩 칸을 나눈다고 생각하면 되겠네요. 상대가 하나놓으면 두 개 놓고 두 개 놓으면 하나놓고, 이런 식으로 가면 마지막에 세 칸이 남게 할 수 있겠네요. 한번에 3개까지 놓는다고 할 때도 같은 방법으로 설명할 수 있을 것 같은데요.

봉건 : 그럼 한번에 4개까지 놓을 때는?

미애 : 바둑판이 개수가 5의 배수냐 아니냐에 따라서 결정되겠지. 5의 배수이면 B가 승리하고, 아니면 A가 승리하겠다.

교사 : 내가 묻고 싶던 것까지 봉건이가 다 해버렸네.

봉건 : 제가 좀 하잖아요. 헤헤.

민정 : 바보 아냐.

교사 : 그러면 누구 다른 규칙을 생각해볼 사람 있니? 또 새로운 규칙을 생각해보면 재미있을 것 같은데.

종현 : 한번에 놓을 수 있는 바둑돌의 수가 1, 2, 4개이면 어떨까요? 2, 3, 4이면 또 어떨까요?

미애 : 처음 문제에서 두 사람이 놓은 바둑돌의 수가 합해서 4개가되면 안된다고 하면 어떨까요? 아니면 앞사람 놓은 것만큼은 놓지 못한다고 해보면 어떨까요?

봉건 : 선생님! 그런데 앞에서 차례대로 꼭 놓아야 하나요? 놓고 싶은데 놓으면 어떨까요?

민정 : 마지막 칸을 놓는 사람이 진다고 하면 어떨까요?

교사 : 모두 다 좋은 생각이네요. 그 규칙을 적용해서 각자 게임을 해 봅시다. 어떤 규칙이 발견되나요. 누군가 반드시 이기는 방법이 있나요?

(각자 자기가 생각한 규칙을 적용해서 게임을 해본다. 서로 의견을 교환한다)

봉건 : 제 경우에는 승패에 아무런 관계가 없는 것 같아요. 뒤로부터 놓아도, 놓고 싶은데 놓아도 항상 결과가 같게 나와요.

종현 : 그림을 그려서 생각해봤는데, 1, 2, 4개를 놓을 수 있는 경우는 1, 2개를 놓는 경우하고 결과가 같은데요. 그리고 2, 3, 4개를 놓는 경우에는 6의 배수하고 6의 배수보다 1 큰 수일 때는

B가 승리하고 나머지 경우에는 A가 승리합니다.

미애 : 좀 복잡한데. 결과는 비슷하네요. 두 가지 모두 처음 게임하고 결과가 항상 같아져요.

민정 : 상대방이 마지막 칸을 채우게 만들려면, 난 바로 앞칸을 채우면 될 것 같아요. 그러니까 한 칸 적은 바둑판을 생각해서 오늘 공부한 내용을 적용시키면 될 것 같아요.

교사 : 다 잘했어요. 그럼 다른 사람의 규칙도 한번 더 생각해볼까요. 잘 모르면 서로 설명해주면서 이해해 봅시다.

(서로 자기 규칙을 적용한 결과를 설명하고, 다른 사람의 결과를 듣는다. 이해가 안 되는 경우에는 그림이나 표를 이용하기도 한다. 활기찬 논의가 진행된다)

교사 : 다들 이해가 됐나요?

학생들 : 예.

교사 : 그럼 몇 가지 도전문제를 낼께요. 함께 생각해 보면 재미있을 것 같아요. (도전문제를 제시한다) 오늘 수업은 여기서 마칩니다. 수고하셨습니다.

학생들 : 감사합니다.

Ⅲ. 결 론

본 연구에서는 승패가 게임 참여자의 전략 선택 여부에 따라 결정되는 몇 가지 게임의 규칙과 승리 전략을 탐구해 보았으며, 수학게임을 이용한 가상적 프로토콜을 제시하였다. 지금까지 다양한 게임 자료가 소개되었으나 대부분 학습에 사용되기에는 체계성이 부족하였다. 즉, 관련성이 없는 여러 가지 문제나 단순히 하나의 문제만이 제시되었기 때문에 학습자가 해결하고 규칙과 전략을 탐구하기에는 지나치게 어려운 문제가 대부분이었다.

본 연구에서는 단순 반복 훈련이나 연습이 가지는 피로와 지루함을 없애면서 학생들 스스로 학습에 참여하게 할 수 있도록 체계화된 게임 자료를 개발하여 제시하였다. 특히 게임의 승리전략을 탐구하는 과정에서 규칙을 찾는 활동, 규칙을 정교화해 보는 활동, 다양하고 새로운 규칙을 생각해보는 활동, 변화된 규칙에 따라 게임을 진행시켜보는 활동, 규칙에 따른 승패를 예상하고 이를 수학적으로 표현해 보는 활동 등을 자연스럽게 자극할 수 있도록 게임을 제시하고자 하였다. 이밖에도 게임에 나타난 규칙이나 원리를 탐구하는 활동은 평소에 쉽게 지나치던 많은 현상들에 대해 새로운 시각을 갖고 다양하고 주의 깊게 살펴보는 태도를 갖게 할 수 있을 것이다.

본 연구에서 개발한 자료의 이용에서 다음과 같은 사항을 주의할 필요가 있다.

첫째, 본 연구에서 제시된 게임은 그 규칙이 수학적으로 명확하게 설명되어질 뿐만 아니라 게임의 규칙을 변형시킴으로써 보다 풍부한 탐구의 기회를 제공할 수 있다. 문제 제시 방법을 다양하게 제시함으로써 학생들에게 문제의 외형뿐만 아니라 문제의 의미를 생각하여 문제의 유사점과 차이점을 고려하는 활동을 가능하도록 해야 한다.

둘째, 개발된 게임 자료를 수학 수업의 보조 도구로서 활용할 때, 무엇보다도 게임의 수학적 특성에 학생들이 집중하도록 해야 한다. 단순히 게임을 즐기는 수준에서 머문다면 기대한 효과를 얻기가 힘들 것이다.

셋째, 교사의 역할의 중요성이다. 아무리 게임이 흥미 있다고 하더라고 교사가 게임의 규칙이나 승리 전략 등을 일방적으로 제시한다면 게임이 가지는 흥미와 학생들의 탐구 기회를 빼앗을 것이다. 학습자들 스스로 게임에 참여하고, 규칙을 탐구하며, 게임을 확장시키는 활동을 할 수 있도록 돕는 조력자로서의 교사의 역할이 매우 중요하다.

참 고 문 헌

김대식 (2001). 레크리에이션 수학, 서울: 경문사.

송상헌 (1998). 수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구, 서울대학교 박사학위 논문.

이경언 (2001). 창의성 신장을 위한 수학 게임 자료 개발 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 12, pp. 201~210.

이충호 옮김 (1990). 마틴 가드너, 이야기 파라독스, 서울: 사계절출판사.

임승원 옮김 (1995). 다무라 사부로 · 후지무라 고자부로, 퍼즐 · 수학 입문. 서울: 전파과학사.

한인기 (2001). 중학생 수학문제, 한국수학교육학회 뉴스레터, 72, pp.42-43.

__________ 중학생 수학문제, 한국수학교육학회 뉴스레터, 73, pp.21-24.

Gardiner, A. (1987). *Discovering mathematics*, New York: Oxford University Press.

Steven, G. Krantz (1997). *Techniques of problem solving*. 좌준수 · 임중삼 옮김 (2000), 문제 해결의 수학적 전략, 서울: 경문사.