韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 457-475.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 457-475.

종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용[1)]

신 현 용 (한국교원대학교)
한 인 기 (경상대학교)
서 봉 건 (한국교원대학교 대학원)
최 선 희 (한국교원대학교 대학원)

수학사를 통해 볼 때 눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용한 작도 가능성의 문제는 여러 면에서 의미가 있었다. 종이 접기는 수학과는 무관하게 나름대로 많은 흥미를 끌어 왔다. 그러나 종이 접기가 기하학적 작도와 흥미 있는 관련이 있음이 알려지면서 수학적으로도 연구되었고 더 나아가 수학 학습에의 유의미한 활용 가능성이 제안되었다. 본 글에서는 종이 접기에서 괄목할 만한 수학적 성질을 고전적인 작도 가능성의 문제와 다항식의 거듭 제곱근에 의한 가해성 등과 관련하여 고찰한다. 또, 초·중등 학교에서 활용 가능한 가상의 수업 프로토콜도 제시한다.

I. 서 론

수학은 어떤 학문인가? 수학의 특성은 무엇인가? 라는 아주 평범하면서도 간단한 질문에 대한 답변은 의외로 쉽지 않다. 대부분의 학생들이 수학에 대해 어려워하는 만큼이나 수학이라는 과목은 한 마디로 무엇이다라고 정의하기도 어렵고, 수학 속에 담겨져 있는 본질적인 측면을 일상의 언어로 표현하기 힘든 만큼 아직 수학 속에는 밝혀지지 않은 숨겨진 보물과 같은 요소들이 무궁무진하게 존재한다. 집합론의 창시자이자 독창적인 대각선 논법의 아이디어로 무한의 세계를 과감히 수학의 본 무대로 진출시켰던 칸토어의 유명한 '수학의 본질은 자유다'라는 그 짧은 말속에는 수학의 본질적인 특성을 아주 간결하면서도 또한 결코 수학은 끝이 없음을 잘 암시해 주고 있다. 우리 주변 곳곳에서 숨겨져 있는 재미있는 수학적 의미들이 꾸준히 밝혀져 왔다. 그러한 것들은 우리의 일상과 비교해 보았을 때 매우 흥미롭기도 하고, 신비롭기도 하고 때론 친숙하기도 하다. 예를 들어 A4용지 속에도 수학적 의미가 담겨져 있고, 우리의 인체 속에도 아름다운 황금비라는 수학적 의미가 있으며, 누구나 손쉽게 경험하는 사다리 타기 게임이나 화투 게임 속에도 수학적 의미가 존재한다. 한편, 잠시 물리 영역으로 시선을 돌리면 20세기의 최고의 과학자로 칭송 받는 아인슈타인의 상대성 원리 속에도 비유클리드 기하 (특히, 리만기하)가 그 원리를 설명하는 뼈대로 등장한다. 이처럼 수학의 대상과 다른 것과의 관련성들은 셀 수 없이 많다. 어릴 적 무심코 접어 날렸던 종이 비행기 속에도 대칭이라는

1) "이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음"(KRF-2001-030-D00020)

수학의 매력적인 특성이 자리잡고 있다.

본 연구에서는 우리에게 너무나 친숙한 종이접기 속에 담겨있는 수학적 특히, 대수학적 의미를 살펴보고자 한다. 종이접기는 그 자체로써도 의미가 있겠지만 수학적으로 볼 때 작도가능성의 문제와 매우 관련이 깊다. 이미 수학사를 통해 작도의 수학적 의미는 알려져 왔고, 그로부터 파생된 3대작도 불능의 문제는 추상대수에서 확대체의 개념으로 해결되었다. 그러나, 수학의 발전이 대부분 그래왔던 것처럼 작도 가능성의 문제는 또 다시 재미있는 문제들을 파생시켰다. 예를 들어 많은 연구들을 통해 조건을 달리하면 임의의 각의 삼등분의 문제도 해결할 수 있음이 밝혀졌다(박한식, 1991; 김용운, 1991; 김상렬, 2001). 아울러 본 연구에서 제시할 종이접기는 작도가능성과 관련지어 볼 때 작도 불가능했던 문제들을 해결해주고 있다는 점과, 작도 가능성의 문제를 보다 확장하면서 새롭고 흥미로운 수학적 사실들을 제공하고 있다는 점에서 수학적으로 또는 교수학적으로 시사하는바가 크다. 따라서 본 연구에서는 Scimemi(2001)의 전개 방식을 따라 종이 접기의 9가지 방법을 먼저 제시 한 후 작도 가능성의 문제와 관련 맺으면서 종이접기의 대수학적 의미를 살펴보고자 한다. 작도 가능한 점들의 집합이 체(field)를 이룬다라는 점, 작도 가능한 점의 제곱근 역시 작도 가능하다는 점등은 자연스럽게 종이접기에서도 성립함을 보인다. 또한, 임의의 각의 삼등분이 종이접기 가능함을 보이는 등 3대 작도 불능문제중 2문제가 종이접기에서는 가능함을 살핀다. 아울러 고전적 작도에서는 불가능했던 3차 방정식의 실근(계수가 종이접기 가능할 때)이 종이접기 가능함을 세제곱근이 종이접기 가능하다는 것으로부터 유도해내고, 그것으로 거듭제곱근 확대체의 구성의 예에서 확대체가 위로 올라갈수록 작도가능한 점들은 그 차수가 1또는 2였지만, 종이접기에서는 확대체가 위로 올라갈수록 그 차수가 3까지 가능함을 보여준 후, 정다각형의 작도 가능성과 종이접기 가능성에 대해서 증명없이 비교하고자 한다.

마지막으로 본 연구에서는 종이접기 활동의 초·중·고등학교에서의 교수학적인 측면에서 활용 가능한 예들을 제시한 후, 10학년 (가)의 연산단원과 관련지어서 작도와 종이접기 가능한 점들의 대수적 구조에 관한 수업프로토콜을 제시할 것이다.

Ⅱ. 종이접기의 대수학적 의미[2)]

1) 종이접기의 9가지 방법

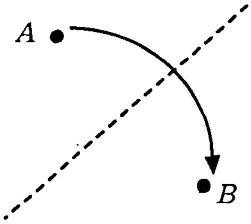
작도에서 자를 가지고 직선을 그리는 것은 종이접기에서 종이를 접는 것과 같다. 즉 종이접기에서 직선의 의미는 종이를 접어 자국을 내는 것이다. 또한 종이를 접는다는 것은 어떤 점을 다른 점 위에 겹치게 할 수 있으므로 점대칭을 의미한다.

2) 이 장의 전개는 Scimemi (2001)의 전개를 따른다. 여기서 소개되는 정리들은 이미 알려진 사실일 수 있으나, 여기에서의 증명은 저자들에 의한 것이다.

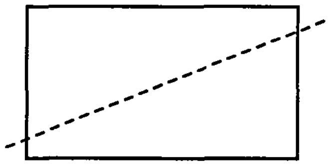
방법1) 주어진 한 점이 다른 점과 포개어 지도록 접을 수 있다<그림 1>.

방법2) 주어진 한 직선을 접을 수 있다(접힌 직선의 양 끝점이 서로 만나게 접으면 주어진 한 직선의 수직이등분선을 생성할 수 있다)<그림 2>.

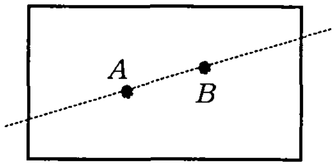
방법3) 주어진 두 점을 지나는 직선을 접을 수 있다(작도에서의 자의 기능)[그림3].



<그림 1>



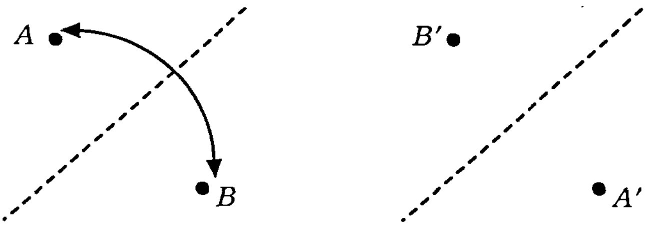
<그림 2>



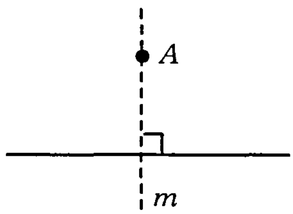
<그림 3>

방법4) 주어진 서로 다른 두 점이 포개어 지도록 접을 수 있다(방법1과 유사)[그림4].

방법5) 주어진 한 점과 직선에 대하여 그 점을 지나면서 직선에 수직인 직선을 접을 수 있다[그림 5].



<그림 4>

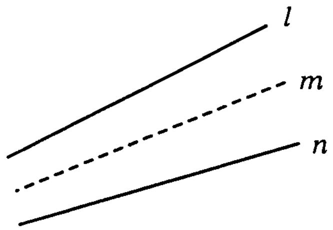


<그림 5>

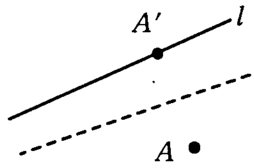
방법6) 주어진 서로 다른 두 직선이 포개어 지도록 접을 수 있다(두 직선이 평행이면 두 직선들을 절반으로 접으면 되고, 평행이 아니라면 접힌 새로운 직선은 주어진 두 직선의 각의 이등분선이다) [그림6].

방법7) 주어진 한 직선과 그 직선 위에 있지 않은 점에 대하여, 그 점이 주어진 직선 위에 포개어 지도록 접을 수 있다(이렇게 접을 수 있는 것은 무수히 많은데 이 과정을 계속 반복하면 자국들의

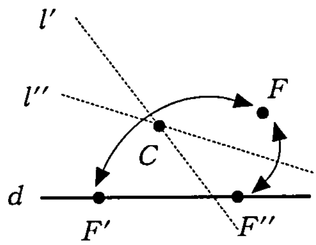
외곽선의 형태가 바로 포물선을 이룬다)[그림7].



<그림 6>



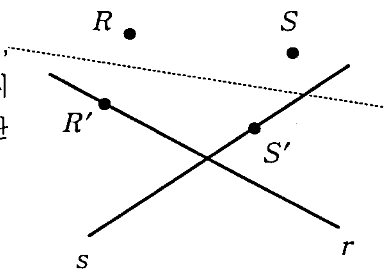
<그림 7>



<그림 8>

방법8) 주어진 서로 다른 두 점 C, F와 한 직선 d 대하여, 그 중 한점 F가 주어진 직선 d위에 있지 않을 때, 점 C를 고정한 상태에서 점 F가 직선 d위에 포개어 지도록 접을 수 있다. 그 점을 F'이라 하자(이때 점 C가 점 F를 초점으로 하고 직선 d를 준선으로 하는 포물선의 외부에 있을 때 F'은 2개이고, 포물선의 내부에 있으면 그러한 F'은 존재하지 않는다. 또한 이 방법은 $\overline{CF}=\overline{CF'}$이므로 점 C를 중심으로 점 F를 지나는 원으로 해석할 수 있다. 따라서 작도에서의 컴퍼스의 기능 대체 가능)<그림 8>.

방법9) 주어진 서로 다른 두 점 R, S와 두 직선 r, s에 대하여, 점 R이 직선 r위에 포개어 지도록, 점 S가 직선 s위에 포개어 지도록 접을 수 있다(이 방법은 대수적으로 3차방정식의 실근과 관련이 있다)<그림 9>.



<그림 9>

2) 고전적인 작도 가능성의 문제와 종이접기 가능성의 대수학적 비교

종이접기 가능한 점들의 대수적 의미를 고찰하기 위하여 작도에서 규칙 3가지를 가지고 작도하였듯이(작도 규칙은 정리 3)의 증명과정에서 다시 언급) 종이접기에서도 다음과 같은 규칙을 생각하기로 한다.

[규칙1] 종이접기에서는 일직선 상에 있지 않는 세 점과 직선들이 주어졌다고 하자. 이들 세 점은 종이접기 가능한 점이라고 본다.

[규칙2] 두 점이 종이접기 가능할 때, 이들 두 점을 지나는 직선을 접을 수 있다(방법 3). 이 직선

을 종이접기 가능한 직선이라고 본다.

[규칙3] 종이접기 가능한 직선과 주어진 직선과의 교점을 종이접기 가능한 점으로 본다.

이러한 절차들을 유한 번 시행해서, 새롭게 얻어진 종이접기 가능한 점들은 서로 다른 종이접기 가능한 직선들의 교점에 의해 생성되거나(규칙 3), 종이접기 가능한 직선에 의해 종이접기 가능한 점이 다른 점으로 옮겨진 점(대칭점)에 의해 생성된다. 한편, 새롭게 얻어진 종이접기 가능한 직선은 종이접기 가능한 두 점을 지나는 직선에 의해 생성되거나, 종이접기 가능한 두 점들이 종이접기 가능한 두 직선위에 오도록 접은 직선에 의해 생성된다(이는 방법 9)와 같다. 그러나 두 종이접기 가능한 직선이 서로 평행인 경우는 허용하지 않는다).

이상과 같이 종이접기 규칙과 새롭게 얻어진 종이접기 가능한 점들과 종이접기 가능한 직선들이라고 가정하면, 종이 접기 방법 중 1), 2), 7)은 무수히 많은 해들을 가질 수 있으므로 종이 접기 가능한 점들을 논의하는 데 있어서는 제외하도록 하겠다.

이러한 가정으로부터, 작도문제와 마찬가지로 종이접기에서도 평면해석기하의 방법을 사용하면 좌표평면을 만들 수 있고, 원점 (0,0)과 단위점 (1,0)은 종이 접기 가능하다.

[정의1] 실수 u에 대하여 $\overline{AB} = |u|$ 인 두 점 A, B가 종이 접기가능할 때, u를 종이접기 가능한 실수라고 한다.

정의 1)에 의해 모든 정수는 종이 접기 가능하다.

[정리2] 점 $P(u, v)$에 대하여, 두 실수 u, v가 종이접기 가능할 때 그리고 이때에만 점 P는 종이접기 가능하다.

증명) 점 $P(u, v)$가 종이접기 가능하면 P를 지나 x축과 y축에 수선을 접어(방법 5) 수선의 발 $A(u, 0)$, $B(0, v)$를 구할 수 있고, 이때 $\overline{OA} = |u|$, $\overline{OB} = |v|$이므로 실수 u, v가 종이접기 가능하다. 역으로, 실수 u, v가 종이접기 가능하면 방법 4)와 방법 5)와 방법 8)을 이용하여 $\overline{OA} = |u|$, $\overline{OB} = |v|$인 점 $A(u, 0)$와 $B(0, v)$를 각각 x축, y축위에 구할 수 있고, 또 이 A, B에서 각각 x축, y축에 수선을 접을 수 있으므로 그 교점인 점 $P(u, v)$는 종이 접기 가능하다.

[따름정리3] 실수 u에 대하여 다음이 성립한다.

실수 u는 종이접기 가능하다. $\Leftrightarrow$ 점 $(u, 0)$은 종이접기 가능하다.

$\Leftrightarrow$ 점 $(0, u)$는 종이접기 가능하다.

정의 1)과 정리 2)와 따름정리 3)은 작도에서의 정의와 정리를 동일하게 적용시킨 것이다.

이제 작도가능한 수들의 집합과 종이접기 가능한 수들의 집합사이의 포함관계에 대해 살펴보자.

[정리4] 모든 작도가능한 수들은 종이접기 가능한 수들이다.

증명) 임의의 원소 u가 작도가능한 수라고 가정하면, 점 $(u, 0)$이 작도가능하다. 점 $(u, 0)$이 작도가능하다는 말은 점 $(u, 0)$이 작도에서의 규칙 3가지를 유한 번 시행해서 얻어진 점이다. 작도에서의 규칙은 다음 3가지이다.

[규칙1] 작도를 시작하기 위하여 처음으로 평면 위에 두 점이 주어졌다고 하자. 이들 두 점은 작도가능한 점이라고 본다.

[규칙2] 두 점이 이미 작도되었을 때, 이들 두 점을 지나는 직선을 그을 수 있고, 또 한점을 중심으로 하여 다른 한 점을 지나는 원을 그릴 수 있다. 이때, 이 직선과 원을 각각 작도 가능한 직선, 작도 가능한 원이라고 본다.

[규칙3] 작도된 두 직선, 또는 한 직선과 한 원, 또는 두 원의 교점은 작도 가능한 점이다.

즉, 점 $(u, 0)$은 작도 가능한 직선들의 교점이거나, 작도 가능한 직선과 원의 교점, 작도 가능한 원들의 교점으로 얻게 되는 점이다. 동일한 측면에서 볼 때, 종이접기 가능한 직선들의 교점은 쉽게 얻게 되지만 종이접기에서는 원을 접을 수 없다. 그러나 방법 8)에 의해 주어진 서로 다른 두 점 C, F와 한 직선 d 에 대하여, 그 중 한점 F가 주어진 직선 d위에 있지 않을 때, 점 C를 고정한 상태에서 점 F가 직선 d위에 포개어 지도록 접을 수 있다. 그 점을 F'이라 하자. 따라서 $\overline{CF} = \overline{CF'}$이므로 점 C를 중심으로 점 F를 지나는 원으로 해석할 수 있으므로 작도에서의 원과 직선의 교점을 종이접기에서도 얻을 수 있다. 또한 방법 8)의 적용은 작도에서의 원과 원의 교점도 얻을 수 있으므로 작도에서의 자와 컴퍼스의 역할은 종이접기의 방법들에 의해 모두 대체된다. 그러므로 임의의 점 $(u, 0)$이 작도 가능하다고 하면 그 점은 종이접기 가능한 점이 되고, 점 $(u, 0)$이 종이접기 가능한 점이면 따름 정리 3)에 의해 u도 종이접기 가능하다. 즉, 모든 작도 가능한 수들은 종이접기 가능한 수이다(그러나 정리 4)의 역은 성립하지 않는다).

이제 종이접기 가능한 수들이 사칙연산에 대해 닫혀있고, 임의의 수 u가 종이접기 가능할 때 $\sqrt{u}$가 종이접기 가능한지를 살펴봄으로써 종이접기 가능한 점들의 집합은 대수적으로 체(field)를 이루고 모든 유리수 또한 종이접기 가능함을 보인다.

[정리5] u, v 가 종이접기 가능한 실수라고 할 때,

(1) $u+v, u-v,\ u\times v,\ \frac{u}{v}(v\neq 0)$ 는 종이접기 가능하다.

(2) $u \geq 0$ 이면 $\sqrt{u}$ 도 종이접기 가능하다.

(증명)

(1) $u+v, u-v$가 종이접기 가능함은 분명하다.

먼저 $u \times v$가 종이접기 가능함을 보이자.

$v>1$인 경우만 보이도록 하겠다[그림10].

1) x축위에 점 $A(u,0)$을 놓고, y축위에 $B(0,1)$, $B'(0, v)$을 놓자(원점 O).

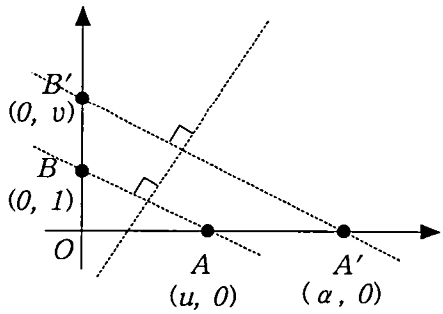
2) 두 점 A, B를 지나는 직선을 접는다(선분①, 방법 3).

3) 선분①의 양 끝점을 접어 수직이등분선을 만든다 (선분②, 방법 4).

4) 점 $B'(0, v)$에서 선분②에 수직이면서 선분①과 평행한 선분③을 접는다(방법 5). 선분③과 x축과의 교점을 $A'(\alpha, 0)$이라 하자.

5) 삼각형의 닮음을 이용하여 비례식을 세우고 계산한다($\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$).

$$1 : u = v : \alpha. \text{ 그러므로 } \alpha = u \times v.$$



<그림 10>

이제 $\frac{u}{v}(v \neq 0)$가 종이접기 가능함을 보이자.

마찬가지로, $v>1$인 경우만 보이도록 하겠다[그림11].

1) x축위에 점 $A(u, 0)$,을 놓고, y축위에 $B(0,1)$, $B'(0, v)$을 놓자(원점 O).

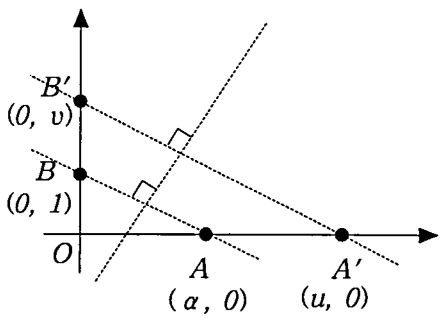
2) 두 점 A, B'을 지나는 직선을 접는다 (선분①, 방법 3).

3) 선분①의 양 끝점을 접어 수직이등분선을 만든다 (선분②, 방법 4).

4) 점 $B(0,1)$에서 선분②에 수직이면서 선분①과 평행한 선분③을 접는다(방법 5). 선분③과 x축과의 교점을 $A'(\alpha, 0)$이라 하자.

5) 삼각형의 닮음을 이용하여 비례식을 세우고 계산한다($\triangle OA'B \backsim \triangle OAB'$).

$$1 : \alpha = v : u. \text{ 그러므로 } \alpha = \frac{u}{v}.$$



<그림 11>

(2) $u>1$ 인 경우만 보이겠다[그림12].

1) x축위에 점 $A(1,0)$를 놓고, 점 A에서 크기가 u인 점 $B(u+1,0)$을 놓자(원점 O).

2) 선분 $\overline{OB}$의 양끝점이 만나도록 절반으로 접는다 (방법 4, x축과의 교점의 좌표는 $A'(\frac{1+u}{2}, 0)$가 되고 절반으로 접힌 직선은 $x=\frac{1+u}{2}$ 이다).

3) 점 A'을 고정한 상태에서 점 B가 직선 $x=\frac{1+u}{2}$ 위에 오도록 접고 그 점을 B'라고 하자 (방법 8, $\overline{A'B}=\overline{A'B'}$).

4) 점 A'을 고정한 상태에서 점 B'이 직선 x=1위에 오도록 접고 그 점을 $C(1, a)$라 하자 (방법 8, $\overline{A'B'}=\overline{A'C}$). 즉, 점 A'를 중심으로 한 원으로 생각해보면 점 O, B, B', C 모두 원 위의 점이다.

5) 두 점 O와 C를 지나는 직선을 접고, 두 점 C와 B를 지나는 직선을 접어서 $\angle OCB=90°$ 임을 보인다 (방법 3, 사실 점 O와 B는 원의 지름의 양 끝점이기 때문에 반원에 대한 원주각의 크기가 90° 임은 자명하다).

6) 삼각형의 닮음을 이용하여 비례식을 세우고 계산한다($\triangle OAC \backsim \triangle CAB$).

$$1 : a = a : u. \text{ 그러므로 } a=\sqrt{u}.$$

이제 P를 종이접기 가능한 실수 전체의 집합이라고 하면, P는 실수체 R의 부분체이고, 모든 유리수는 종이접기 가능하다는 것은 분명하다.

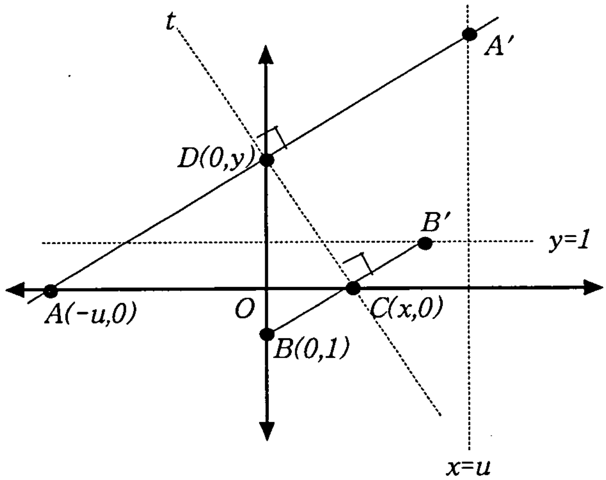
이번에는 작도에서 불가능했던 세제곱근의 종이접기 가능성에 대해 살펴보자.

[정리6] $u \in P$ ($u>0$) 이면 $\sqrt[3]{u} \in P$이다[그림13].

증명)

1) x축 위에 점 $A(-u,0)$, y축 위에 점 $B(0,-1)$을 놓는다 (원점 O).

2) 방법 9)를 이용하여 점 A를 직선 $x=u$ 위에, 점 B를 직선 y=1위에 포개어 지도록 직선 t를접는다. 포개어진 점을 A',B'이라고 하면 직선 t는 선분 $\overline{AA'}$과 선분 $\overline{BB'}$에 수직이등분선이어야 한다. 그 직선 t와 x축과의 교점을 점 $C(x, 0)$, y축과의 교점을 점 $D(0, y)$라고 하자.



<그림 13>

3) 삼각형의 닮음을 이용하여 비례식을 세우고 계산한다.

$\triangle OAD \backsim \triangle ODC \backsim \triangle OCB$이다

($\angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$).

$\frac{y}{u} = \frac{x}{y} = \frac{1}{x}$ 문자 y를 소거하여 x 와 u 에 관한 식으로 정리하면

$x^3 = u$. 그러므로 $x = \sqrt[3]{u} \in P$

(x는 직선 t와 x축과의 교점의 좌표이므로 종이접기 가능).

정리 6)을 이용하면 자연스럽게 3대 작도 불능문제 중 하나가 종이접기에서 해결 가능함을 보일 수 있다. 즉, 주어진 정육면체의 부피가 2배가 되는 새로운 정육면체의 한 모서리의 길이는 종이접기 가능하다. 이는 또한 정리 4)의 역이 성립하지 않는 반례를 제공하기도 한다.

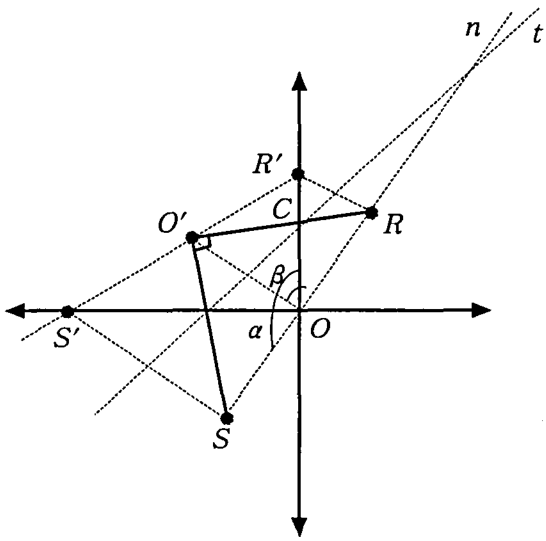
이제 3대 작도 불능 문제중 마지막 문제인 임의의 각의 삼등분이 종이접기에서 가능함을 방법 9)를 이용하여 해결해 보자.

[정리7] 임의의 각의 삼등분은 종이접기 가능하다 [그림14].

증명)

1) 원점 O와 제 1사분면 위의 임의의 점 R을 종이접기 가능한 점으로 놓자(점 R은 편의상 제 1사분면 위의 점으로 설정).

2) 이제 원점 O와 점 R을 지나게 종이를 접어 접힌 직선을 n이라고 놓자(방법 3). 그 직선 위의 점 R과 원점에 대칭인 점을 접어 S라고 하자.



<그림 14>

3) 방법 9)를 적용하여 점 R이 y축에 겹쳐지게, 점 S는 x축위에 겹쳐지도록 종이를 접어 그 직선을 t라고 하자. 이때 R이 겹쳐진 y축상의 점을 R', S가 겹쳐진 x축상의 점을 S'라 놓고, 원점 O를 중심으로 점 R을 선분 $\overline{R'S'}$을 지나는 직선 위에 겹쳐진 점을 O'라 하자(방법 8). 그리고 선분 $\overline{OO'}$의 중점을 B라 하고(중점 B는 직선 t위의 점이 된다), 직선 t와 y축과의 교점을 C 라고 하자.

4) $\angle O'OR'$를 β라고 놓고, $\angle SOR'$을 α라고 놓는다.

5) $\angle S'OR'=90°$ 이고, $\angle SO'R'=90°$ 이다(점 R과 S는 원의 지름의 양끝점이고, $\angle SO'R$은 반원에 대한 원주각이므로 $90°$ 임이 자명하다. 또한 점 R,S,O'은 중심이 O인 원 위의 점들이다). 따라서 $\triangle O'OR$은 $\angle OO'R= \angle O'RO$ 인 이등변 삼각형이다.

6) 또한 $\triangle O'BC \equiv \triangle OBC$ 이므로 $\angle BO'C=\angle BOC=\beta$. 따라서 $\angle O'OR'=\angle OO'R=\angle O'RO=\beta$.

7) $\triangle O'OR$에서 점 O의 외각은 $\triangle O'OR$의 두 내각의 합과 같으므로,

$$\angle SOO'= \angle OO'R+\angle O'RO=\beta+\beta=2\beta\text{이다.}$$

$$\alpha=\angle SOR'=\angle SOO'+\angle O'OR'=2\beta+\beta=3\beta.$$

따라서 선분 $\overline{OO'}$은 각 α를 삼등분한 선이므로 임의의 각 α의 삼등분은 종이접기 가능하다.

정리 7)의 성립에 의해 종이접기는 작도 가능성과 비교해 볼 때 보다 확장된 내용들을 얻을 수 있다. 작도 가능성에서는 임의의 각의 삼등분이 불가능하여 $3°$ 의 삼등분인 $1°$ 의 작도가 불가능하였다. 그러나 종이접기에서는 각의 삼등분이 허용되므로 $1°$ 는 종이접기 가능하다. 즉, 작도 가능성에서는 양의 정수 n에 대하여, 크기가 $n°$ 인 각이 작도가능하기 위한 필요충분조건은 n이 3의 배수일 때이지만 종이접기에서는 다음과 같은 사실을 알 수 있다: 양의 정수 n에 대하여, 모든 $n°$ 는 종이접기 가능하다.

이번에는 종이접기와 3차방정식의 실근과의 관계에 대해 살펴보도록 하겠다. 이는 마치 작도 가능성에서 이차 방정식의 실근들을 작도할 수 있는 것과 같다(방정식의 계수가 작도 가능할 때). 이미 언급한 u가 종이접기 가능할 때 $\sqrt[3]{u}$ 가 작도 가능하다는 성질과 방법 9)를 잘 적용하여 삼각형의 닮음을 이용하면 3차 방정식의 실근을 종이접기 가능함을 보일 수 있다.

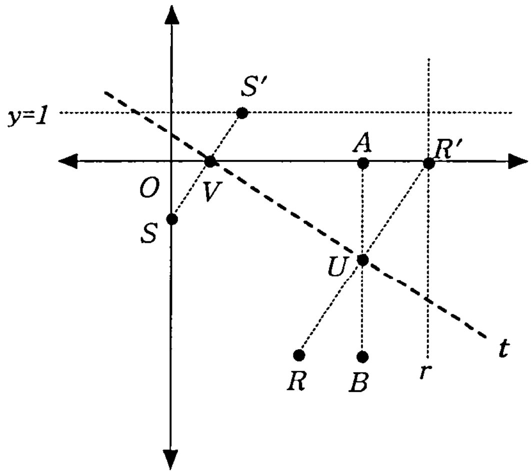
[정리8] 실수계수 3차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0(a,b,c\in P)$의 실근은 종이접기 가능하다[그림15].

증명)

1) 종이접기 가능한 점 R과 S를 점 $R(-a+c,-b)$, $S(0,-1)$이라고 놓고, 직선 r은 $x=-a-c$, s는 $y=1$이라 하자.

2) 방법9)에 의해 점 R이 직선 r위에 포개어 지도록, 점 S는 직선 s위에 포개어 지도록 하는 직선 t를 접을 수 있다. 포개어진 그 점들을 R',S'이라고 놓자. 이제 직선 t와 x축과의 교점의 좌표를 $V(v,0)$라고 하고, 직선 t와 $x=-a$와 교점의 좌표를 $U(-a,u)$라 하자. 그리고 점 $A(-a,0)$, $B(-a,-b)$를 놓으면 삼각형 $\triangle SOV$, $\triangle VAU$, $\triangle UBR$은 닮은 삼각형이 된다. 그러면 닮음의 성질에 의해

$\frac{v}{1}=\frac{u}{a+v}=\frac{-c}{u+b}$이 성립한다. 이제 이 방정식들에서 u를 소거하면 이러한 방정식 $v^3+av^2+bv+c=0$이 유도된다. 따라서 v는 3차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0(a,b,c\in P)$의 실근이 되고 점 $V(v,0)$은 직선 t와 x축과의 교점의 좌표이므로 종이접기 가능하다.



<그림 15>

이번에는 다항식의 거듭제곱근에 의한 가해성과 관련하여 작도 가능한 점들의 집합과 비교하여 종이접기 가능한 점들의 집합에 대해 살펴보자.

[정의9](김응태・박승안, 2000) F를 체라하고 K를 F의 확대체라고 할 때, 다음을 만족시키는 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_r \in K$가 존재하면 K를 F의 거듭제곱근 확대체(radical extension field)라고 한다.

(i) K = $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

(ii) 적당한 양의 정수 $n_1, n_2, \cdots, n_r$에 대하여

$$\alpha_1^{n_1}\in F,\ \alpha_2^{n_2}\in F(\alpha_1),\ \alpha_3^{n_3}\in F(\alpha_1,\alpha_2), \cdots, \alpha_r^{n_r}\in F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1})$$

위의 정의에서 $F_0=F$, $F_i=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i),(1\le i < r)$이라 할 때,

$F=F_0\subseteq F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_{r-1}\subseteq F_r=K$ 이고 $\alpha_i^{n_i}\in F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1})=F_{i-1}$ 이므로

$\alpha_i^{n_i}=a_i$ 라고 하면 $a_i\in F_{i-1}$ 이며 α_i는 다항식 $x^{n_i}-a_i\in F_{i-1}[x]$의 근, 즉 a_i의 n_i제곱근이다. 따라서 $F_i=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)$는 $F_{i-1}=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1})$의 유한차원 확대체이다. 그러므로 F의 거듭제곱근 확대체는 F에서부터 시작하여 F의 원소의 n_1제곱근, F_1의 원소의 n_2제곱근, F_2의 원소의 n_3제곱근, $\cdots$, F_{r-1}의 원소의 n_r제곱근을 차례로 첨가함으로써 얻어지는 유한차원 대수적 확대체이다.

이러한 거듭제곱근 확대체의 좋은 예로서 작도 가능한 점들의 집합과 종이접기 가능한 점들의 집합을 고려해 볼 수 있다.

[예] 작도 가능한 점들의 집합과 종이접기 가능한 점들의 집합은 거듭제곱근 확대체이다.

모든 유리수 전체의 집합은 작도 가능할 뿐만 아니라 종이접기 가능함은 이미 앞에서 밝혔다. 그리고 유리수 전체의 집합은 대수적으로 체를 이루므로 여기에서는 거듭제곱근 확대체의 기저체로서 유리수체로 설정하겠다. 그러면 작도 가능한 점들의 집합(C)은 유리수체에서 시작하여 다음과 같이 구성할 수 있다.

$Q = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n = C$ [그림16]

실수 u가 작도 가능하기 위한 필요충분조건은 다음 조건을 만족시키는 양의 실수 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$이 존재하는 것이다.

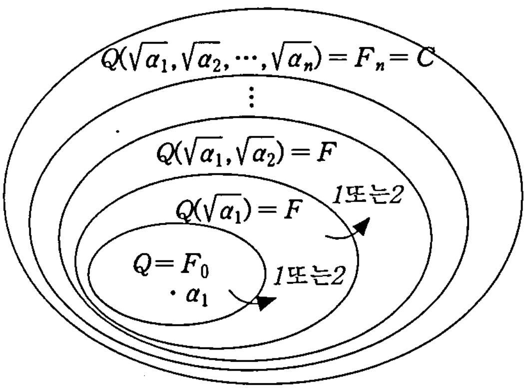
$\alpha_1 \in Q,\ \alpha_2 \in Q(\sqrt{\alpha_1}), \cdots, \alpha_i \in Q(\sqrt{\alpha_1}, \cdots, \sqrt{\alpha_{i-1}}), \cdots$

$\alpha_n \in Q(\sqrt{\alpha_1}, \cdots, \sqrt{\alpha_{n-1}}), \quad u \in Q(\sqrt{\alpha_1}, \cdots, \sqrt{\alpha_n})$

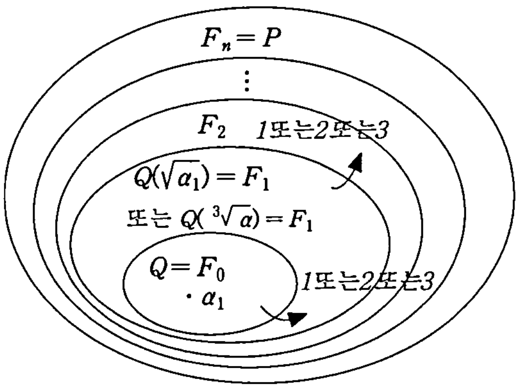
그러면 $F_1 = Q(\sqrt{\alpha_1}),\ F_2 = Q(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}), \cdots, F_n = F_{n-1}(\sqrt{\alpha_n}) = Q(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \cdots, \sqrt{\alpha_n})$이 되고 각 i에 대하여 $[F_i : F_{i-1}] = [F_{i-1}(\sqrt{\alpha_i}) : F_{i-1}] = 1$ 또는 2 이므로

$\alpha_i^{n_i} \in Q(\sqrt{\alpha_1}, \cdots, \sqrt{\alpha_{i-1}})$ (n_i 는 1또는 2)로 표현가능하므로 작도 가능한 집합 C는 거듭제곱근 확대체이다 (각 i에 대하여 $\sqrt{\alpha_i} = \beta_i$이라고 치환하면 거듭제곱근 확대체의 정의를 만족한다).

유사한 방식으로 종이 접기 가능한 점들의 집합(P) 역시 거듭제곱급 확대체로 표현할 수 있다. 다만 차이점이 있다면 작도에서는 확대체가 위로 올라갈수록 그 차수가 1또는 2씩 올라가지만 종이접기에서는 정리 5)와 정리 6)에 의해 임의의 수 α가 종이접기 가능하면 그의 제곱근 뿐만 아니라 세제곱근도 종이접기 가능하므로 그 차수가 1또는 2만 되는 것이 아니라 3까지 올라가므로 보다 확장된다 [그림17].



<그림 16>



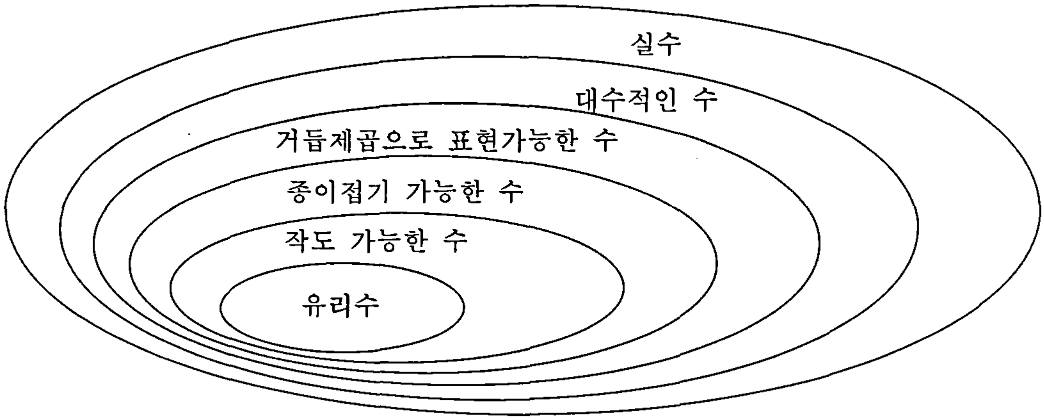
<그림 17>

즉, 각 i에 대하여 $[F_i : F_{i-1}] = [F_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ 또는 $F_{i-1}(\sqrt[3]{\alpha_i}) : F_{i-1}] = 1$ 또는 2 또는 3.

이제 각 i에 대하여 ($\sqrt{\alpha_i}$ 또는 $\sqrt[3]{\alpha_i}$) $=\beta_i$ 로 치환하면 $\beta_i^{n_i} \in F(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{i-1})$ (n_i는 1또는 2또는 3)이 된다. 따라서 종이접기 가능한 점들 역시 거듭제곱근 확대체의 형태로 구성가능하다.

이제, 유리수, 작도 가능한 수, 종이접기 가능한 수, 거듭제곱으로 표현가능한 수, 대수적인 수, 실수사이의 포함관계는 그림 [18]과 같다.

이제 실수를 다음과 같이 정리할 수 있다.



<그림 18>

마지막으로, 정다각형의 작도 가능성과 관련지어 정다각형의 종이접기 가능성에 대하여 살펴보자. 가우스는 정다각형의 작도 가능성에 대하여 정 n각형이 작도가능함을 $n=2^m$ 또는 $n=2^r p_1 p_2 \cdots p_k$ 단, $m \geq 2$, $r \geq 0$, $k \geq 1$이고 $p_1, p_2, \cdots, p_k$는 서로 다른 Fermat ($p_i = 2^{2^n}+1$, $n \geq 0$) 소수일 때와 동치임을 보였다. 따라서 정3각형, 정4각형, 정5각형, 정8각형, 정17각형 등이 작도가능하다. 그러나 정7각형, 정9각형, 정13각형, 정19각형등은 작도 불가능하다. 그러나 종이접기에서는 각의 이등분뿐만 아니라 각의 삼등분이 가능하고, 세제곱근이 종이접기 가능하므로 다음에 나올 정리에 의해 작도에서 불가능했던 정7각형, 정9각형, 정13각형, 정19각형등이 종이접기 가능하다. 다음도 잘 알려진 사실이다.

[정리10] 정 n각형이 종이접기 가능한 필요 충분 조건은 $n= 2^g 3^h p_1 p_2 \cdots p_m$
(단, $n \geq 3$, p_i 는 $2^k 3^l+1$ 형태의 서로 다른 소수이고, g와 h는 0을 포함한 자연수 일 때이다).

Ⅲ. 종이접기를 활용한 수업 프로토콜

종이접기는 새롭게 도입된 7차 교육과정에서 작도를 비롯한 도형단원의 이해를 보다 쉽게 도모하기 위하여 수업에서 보조 자료로 활용되어지고 있다. 예를 들면 중학교 1학년에서 각의 2등분을 작도하는 것을 배우기 전에 종이접기를 이용하여 각의 이등분선을 접는 활동이 교과서에 제시되어 있다. 그 외에도 종이접기의 활용은 점차적으로 확대되어질 수 있다. 몇 가지 예를 더 살펴보면 다음과 같다(남호영·박정숙·천정아, 2001; 정현정, 2000; 황정원, 1999).

- 선분의 수직이등분선 접기
- 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 보이기
- 삼각형의 넓이를 종이를 접어 직사각형으로 변환한 후 넓이 공식 이해
- 삼각형의 내심, 외심, 무게중심, 수심을 한 장의 종이에 접는 활동을 통해 수심, 무게중심, 외심이 일직선상에 있음을 보이고 무게중심이 늘 가운데에 있음을 쉽게 유추하기
- 삼각형의 외심을 종이를 접어 찾은 다음 각 변의 중점을 연결한 작은 삼각형을 접은 후 작은 삼각형의 수심을 찾으면 큰 삼각형의 외심이 바로 작은 삼각형의 수심이 되므로 수심과 외심과의 관련성 맺기
- 정삼각형 속의 정삼각형 접기, 정사각형 속의 정사각형 접기 등을 통해 순환적인 규칙성 고찰과 길이가 $\frac{1}{2}$로 축소되면 넓이는 $\frac{1}{4}$이 됨을 보이기
- 임의의 직사각형을 정사각형이 되도록 종이를 접는 활동을 반복하면 최소 몇 개의 정사각형을 만들 수 있겠는가? 와 같은 문제를 통해 그 해결책의 아이디어가 유클리드 호제법을 이용하는 것임을 알기
- 원의 중심 찾기(일부가 없어도 찾을 수 있음), 반원에 대한 원주각의 크기가 90° 임을 보이기
- 정다각형 접기
- 최단경로 찾기 문제에서 종이접기를 이용하여 대칭점을 찾아 두 삼각형이 합동임을 보이면서 직선으로 연결한 것이 최단경로임을 보이기(이는 한 점에서 직선에 이르는 거리는 그 점에서 주어진 직선에 내린 수선의 발까지의 길이가 됨을 설명할 때에도 활용가능)
- 대칭이동
- A4용지를 절반으로 접는 과정 반복을 통해 닮음비와 경제성 측면 논의
- 종이접기를 이용하여 도형 속의 산술평균과 기하평균의 관련성 이해

이외에도 많은 예들이 초·중등학교에서 교수학적으로 활용가능 할 것이다. 그러나 현재 학교교육에서는 종이접기가 작도를 비롯한 기하단원의 직관적 이해를 돕기 위한 보조 수단으로 활용되어지는데 초점이 맞추어진 것 같다. 예를 들어 각의 이등분선을 배우기 전 종이접기의 도입은 종이접기의

의미보다는 각의 이등분이 작도 가능하다는 것을 배우기 위해 사용된다. 그러나 본 글에서 살펴보았듯이 종이접기속에 숨겨진 대수학적 의미는 작도와 관련하여 함께 병행되어져야 수학적 의미가 보다 풍부해지고, 초· 중등학교에서도 대수단원과 기하단원과의 연결성 측면에서도 매우 유익한 예가 될 수 있다. 따라서 여기에서는 과학 고등학교나 또는 고 1 수학반을 위한 가상의 수업 프로토콜을 연산과 관련하여 작도와 종이접기를 함께 제시하고자 한다.

1) 학습목표:
 · 사칙연산에 대하여 닫혀있는 다양한 집합들을 조사할 수 있다.
 · 작도 가능한 수(점)들의 집합은 체가 됨을 이해한다.
 · 종이접기 가능한 수(점)들의 집합은 체가 됨을 이해한다.
2) 내용: 수학 10-가 (수와 연산)
3) 준비물: 자, 컴퍼스, 종이, 필기구

교사 : 지난 시간까지 집합이 어떤 연산에 닫혀 있다는 것의 의미와, 그 예로써 유리수와 실수 집합에서 사칙연산을 살펴봤어요. 이번 시간에는 여러분들이 지금까지 알고 있는 것 외에 임의의 수의 집합이 사칙연산에 대하여, 특히 유리수와 실수 사이의 집합 중에서 몇 개를 살펴볼 거예요. 혹시 좋은 예를 알고 있는 학생 있나요?

영식 : 지난 시간에 숙제로 내줬던 A = $\{ a+b\sqrt{2} \mid a, b$ 는유리수 $\}$ 는 어떨까요?

교사 : 그래요. 숙제를 아주 열심히 했구나.

병성 : 선생님, 그런데 a, b 가 정수일 때는 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대해서 닫혀있지만 나눗셈은 상당히 곤란한데요.

교사 : 맞아요. 병성이가 아주 좋은 지적을 했어요. 사실 집합 A는 a,b가 유리수이거나 실수일 때에는 사칙연산에 대하여 큰 어려움이 없지만, 자연수일 때는 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀있고, 정수일 때는 나눗셈에 대해 많은 문제가 생깁니다. 다들 숙제를 열심히 한 것 같고 발표한 내용을 보니 연산에 대해 닫혀 있다는 의미를 정확히 이해한 것 같군요. 이제 조금 다른 집합을 생각해 봅시다. 여러분들 중학교 때 작도에 대해 배웠죠?

학생들 : 예.

교사 : 그럼 작도 가능한 수들의 집합은 사칙연산에 대해 닫혀있는지 한 번 생각해 봅시다.

봉희 : 작도 가능한 수들의 집합이라는 의미를 잘 모르겠어요.

교사 : 어렵게 생각할 것 없어요. 먼저 작도의 의미는 눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용한다는 건 알고 있죠. 자에 눈금이 없기 때문에 단위길이 1은 이만큼(손가락으로 조그마한 크기를 보여준다) 잡고, 이 길이를 1이라고 잡으면 되요. 자, 이제 좌표평면 위의 원점을 중심으로 원을 그린 뒤 반지름의 크기를 1로 잡으면 원 위의 모든 점의 크기는 1이 되는 거죠. 우리는 이제 x축의 양의 방향에 있

는 점 (1,0)을 1을 작도할 수 있다는 것과 같은 의미로 해석하면 되고, 음의 방향에 있는 점 (-1,0)을 -1을 작도할 수 있다는 것으로 생각하면 되요. y축 위에 있는 점들도 그렇게 생각하면 되요.

재국 : 그러면 1이 작도 가능한 수니까 모든 자연수는 작도 가능하겠네요. 또 -1이 작도 가능하니까 모든 정수도 작도 가능하고요.

교사 : 그래요. 종이접기도 그러한 의미에서 해석하면 되요. 이렇게 사각형의 종이를 가지고 가로로 절반 접고, 세로로 절반 접어서(직접 종이를 접어서 보여준다) 만나는 교점을 원점이라고 생각하고 출발하면 되요. 가로축의 접힌 절반을 x축, 세로축의 접힌 절반을 y축이라고 놓으면 되죠. 그러면 1과 -1을 접을 수 있나요?

승민 : 그건 쉽죠. 세로로 절반 접은 것을 y축과 평행하게 적당히 접어서 펼치면 1과 -1을 접은 거죠. 따라서 이러한 과정을 반복하면 모든 정수는 종이접기 가능하죠.

교사 : 잘했어요. 하나를 가르쳐 주면 열을 아는 군요. 이제 작도 가능한 점들의 집합에서 임의의 두 원소가 작도 가능하다고 하면 두 원소의 합과 두 원소의 차는 작도 가능한가요?

경남 : 당연한 거 아니에요(앞에 나와서 설명한다). x축위에 양의 방향에 이렇게 두 점을 잡고 왼쪽에 있는 점을 a, 오른쪽에 있는 점을 b라고 하면 왼쪽에 있는 점의 크기를 컴퍼스로 잰 후 b 오른쪽 옆에 같다 붙이면 $a+b$가 작도된 거죠. 빼기도 동일한 방법으로 b왼쪽 옆에 같다 붙이면 $b-a$를 작도할 수 있죠.

교사 : 그러면 종이접기 가능한 점들의 집합에서 두 원소의 합과 차는 종이접기 가능할까요?

형도 : 그것도 작도랑 비슷하게 해결할 수 있을 것 같은데요(종이를 직접 접으며 설명한다). 예를 들어 x축의 양의 방향으로 이렇게 두 점을 잡고 y축과 평행하게 두 점을 접은 다음 왼쪽에 있는 점을 a, 오른쪽에 있는 점을 b라고 해요. 그리고 y축을 $x=b$ 위에 오게끔 접은 다음 a크기만큼 표시한 후 그 점을 y축과 평행하게 접으면 접은 선과 x축과의 교점이 바로 ($a+b$, 0)이 됩니다. 따라서 $a+b$도 종이 접기 가능하죠. ($a-b$도 동일한 방법으로 설명한다).

교사 : 자, 이제 그럼 곱셈에 대해서 작도 가능한 점들과 종이접기 가능한 점들이 닫혀있는지 살펴볼까요? 곱셈은 덧셈과 뺄셈처럼 쉽지는 않지만 그렇다고 어렵지 만도 않아요. 사실 알고 보면 여러분들이 중학교 때 배운 수학지식만으로도 충분히 증명 가능합니다.

대원 : (잠시 후) 아무리 생각해 봐도 좋은 아이디어가 떠오르지 않는데요.

교사 : 그럼, 선생님이 한번 작도문제부터 풀어보겠어요(직접 작도한다). 우리는 단위 길이 1, 작도 가능한 점 a, b를 가지고 시작할 수 있어요. x축 위에 $A(1,0)$, y축 위에 $A'(0,a)$를 잡은 후 b가 1보다 크다고 가정하고(b가 1보다 작거나 1이어도 동일한 방법) x축 위에 $B(b,0)$ 잡아요. 그런 다음 자로 선분 $\overline{AA'}$을 연결한 후, 점 B를 지나면서 선분 $\overline{AA'}$과 평행한 직선을 작도한 후 y축과 만나는 교점을 $B'(0,x)$라고 놓으면 두 삼각형 $\triangle OAA'$과 $\triangle OBB'$은 어떤 삼각형이죠?

학생들 : 닮은 삼각형이에요.

교사 : 맞아요. 그럼 닮음비에 의해 $1:b=a:x$ 이니까 $x=ab$가 되므로 작도 가능한 점들은 곱셈에 대해서 닫혀 있음을 보였어요. 마찬가지로 종이접기 에서도 할 수 있겠죠?

영창 : 작도와 동일한 방법으로 접으면 되요(직접 종이를 접어 보인다).

교사 : 자, 지금까지 작도 가능한 점들과 종이접기 가능한 점들이 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대해서 닫혀 있음을 보였어요. 이제 나눗셈에 대해서 닫혀 있음을 보이면 사칙연산에 대해 모두 닫혀있게 되요.

영식 : 곱셈에서 보였던 방법과 비슷하게 보이면 될 것 같은데요(앞에 나와서 직접 작도한다). 1, a, b가 작도 가능하다고 가정하고 우리가 구해야 할 것은 $\frac{a}{b}$(또는 $\frac{b}{a}$)를 작도하는 것이니까

$1:b=x:a$가 되게 작도하면 되겠죠. 그렇게 하기 위해선 x축 위에 $A(1,0)$, $B(b,0)$를 잡고, y축 위에 $B'(0,a)$를 잡은 다음 선분 $\overline{BB'}$을 자로 연결한 후, 점 A를 지나면서 선분 $\overline{BB'}$에 평행한 직선을 작도한 다음 y축과의 교점을 $A'(0,x)$으로 놓으면 닮음비에 의해 $x=\frac{a}{b}$가 되니까 결국 작도 가능한 점들은 나눗셈에 대해서 닫혀있게 되죠.

병성 : 선생님? 제 생각엔 나눗셈에 대해서 닫혀있다는 성질을 이용하면 곱셈에 대해 닫혀있다는 것도 쉽게 보일 수 있을 것 같은데요.

교사 : 어떻게? 쉽게 설명할 수 있겠니?

병성 : a,b가 작도 가능할 때 $\frac{a}{b}$가 작도 가능하므로 $\frac{1}{b}$도 작도 가능하죠. 그러면 $\frac{a}{1/b}$도 작도 가능하므로 ab가 작도 가능하게되죠. 즉, 나눗셈에 대해 닫혀있다는 사실만으로도 곱셈에 대해 닫혀 있다는 것을 쉽게 유도할 수 있죠.

교사 : 맞아요. 다른 학생들도 병성이의 설명을 다 이해했나요? 사실 병성이의 설명이 더 쉽긴 하지만 여러분들이 연산에 대해 생각할 때 보통 덧셈의 성질로부터 뺄셈의 성질을 유도하고, 곱셈의 성질로부터 나눗셈의 성질을 유도하는게 자연스럽기 때문에 먼저 곱셈에 대해 생각을 했던 거예요. 하지만 병성이의 아이디어와 같이 다양한 방법으로 생각하는 것은 수학적으로 매우 의미가 있어요. 자, 그럼 마지막으로 종이접기에서도 나눗셈에 대하여 닫혀 있음을 보여줄 학생 있나요? 곱셈에서 했던 방법을 조금만 이용하면 될 거예요.

재국 : 그건 제가 해볼게요. 우선 작도와 동일한 방법으로 시작해 보면 1, a, b 가 종이접기 가능하다고 가정해서 x축 위에 $A(1,0)$, $B(b,0)$ 두 점을 접고, y축 위에 $B'(0,a)$을 접은 다음, 두 점 B, B'을 지나는 선분을 접어요. 그런 다음 두 점 B, B'을 양 끝점으로 하여 접으면 선분의 수직이등분선을 접는 것과 같죠. 그런 다음 A점을 지나면서 두 점 B, B'을 지나는 선분의 수직이등분선과 수직이 되는 선분을 접어 y축과의 교점을 $A'(0,x)$라고 놓은 후 비례식을 이용하여 풀면 $x=\frac{a}{b}$ 가 되니까 종이접기 가능한 점들 역시 나눗셈에 대하여 닫혀있음을 보인거죠.

교사 : 잘했어요. 이제 지난 시간과 오늘 공부한 내용을 정리해 보면 사칙연산에 닫혀있는 집합들

의 다양한 예를 알게 되었어요. 지난 시간까지는 사칙연산에 대해 닫혀있는 집합을 유리수집합과 실수집합만을 알고 있었는데 오늘 A = $\{ x \mid a+b\sqrt{2}\ a\ , b$는유리수 $\}$ 는 사칙연산에 대해 닫혀 있다는 것과 처음에는 다소 생소했던 작도 가능한 점들의 집합과 종이접기 가능한 점들의 집합들이 사칙연산에 대해 닫혀 있다는 사실까지 알게 되었어요. 또한 모든 정수는 작도와 종이접기 가능하다는 사실로부터 시작하여 임의의 두 정수 a, b에 대하여 $\frac{a}{b}$가 작도와 종이접기 가능하므로 모든 유리수 또한 작도와 종이접기 가능함을 쉽게 유추할 수 있겠죠. 따라서 작도와 종이접기 가능한 점들의 집합은 최소한 유리수를 포함하는 집합이겠죠. 좀더 깊이 들어가면 임의의 원소 a가 작도가능할 때 $\sqrt{a}$는 작도와 종이접기 가능하고, $\sqrt[3]{a}$는 작도 불가능하지만 종이접기에서는 가능하다는 사실도 수학적으로 밝혀졌어요. 따라서 종이접기 가능한 점들의 집합은 작도 가능한 점들의 집합을 포함하고 있죠. 내용이 다소 어렵죠? 사실 이러한 내용들은 다음에 배울 2·3차방정식의 계수와 실근과 밀접한 관련이 있어요. 보다 자세한 내용은 방정식 단원을 배우고 나서 다시 생각해 보도록 하죠. 오늘 수업하느라 수고 많았어요.

Ⅳ. 결 론

지금까지 종이접기의 대수학적인 의미를 작도 가능성의 문제와 관련지어 살펴보았고, 종이접기 활용의 수업 프로토콜으로써 10학년(고 1) 연산단원에서 유리수집합과 실수집합 이외에 작도 가능한 점들의 집합과 종이접기 가능한 점들의 집합을 제시하였다.

종이접기의 대수학적인 의미는 작도 가능성의 문제와 관련지어 유사점과 차이점으로 나누어서 정리해 볼 필요가 있다. 먼저, 유사점은 두 집합모두 체(field)를 이루고 있고, 작도 가능한 점(종이접기 가능한 점)의 제곱근 역시 작도 가능(종이접기 가능)하다는 점이다. 차이점으로는 작도에서는 불가능했던 몇 가지가 종이접기에서 가능하다는 것이다. 종이접기 가능한 점의 세제곱근이 종이접기 가능하고, 그로부터 3차방정식의(계수가 종이접기 가능할 때) 실근이 종이접기 가능하고, 임의의 각의 삼등분이 종이접기 가능하고, 정다각형의 작도에서는 불가능했던 것들이 보다 많이 종이접기 가능하다(예를 들면, 정7각형, 정9각형 등등). 즉, 종이접기 가능한 점들의 집합이 작도 가능한 점들의 집합을 포함하면서 보다 확장되고, 풍부한 수학적 의미를 지니고 있음을 알 수 있다.

종이접기가 교수학적인 측면에서 볼 때, 7차 교육과정에 도입은 되었으나 활발하게 활용되어지지 않는 것 같다. 아직은 작도 가능성의 문제와 동등하게 관련지어 논의되기보다는 작도 가능성의 이해를 돕기 위한 수단으로써 사용되어 지는 것 같다. 그리고 종이접기나 작도는 기하단원이라는 인식이 강하기 때문에 대수적으로 의미가 있음에도 불구하고 대수단원에서의 도입과 활용이 미약한 형편이다. 따라서 본 연구의 수업 프로토콜은 연산 단원과 종이접기 가능한(작도 가능한) 점들의 집합과의 관련성을 맺고자 하였다. 유리수나 실수가 사칙연산에 대해 닫혀있다는 기본적인 성질도 중요하지만,

그것으로만 끝난다면 교수학적으로 별 의미는 없다. 수학적으로 볼 때(특히, 집합론적인 관점에서) 가까운 것 같지만 사실상 멀리 떨어져 있는 유리수나 실수 사이의 집합중에서 적절한 예의 제시와 그들이 사칙연산에 닫혀있는지를 학생들로 하여금 탐구하게 하고, 자유롭게 새로운 집합을 찾게 유도함으로서 보다 확산적인 사고를 할 수 있을 것이다. 또한, 이미 알고 있는 수학적 내용과 새롭게 배운 내용들간의 관련성들을 지속적으로 맺게 함으로써 유명한 프로 수학자만이 누릴 것 같았던 수학의 아름다움과 즐거움을 학생들도 다양하게 경험 할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

김상렬 (2001). 각의 삼등분 작도는 어떤 조건에서 가능한가, 수학교육논문집 1, 서울: 학교수학교육학회.

김용운 · 김용국 (1991). 재미있는 수학여행-기하의 세계, 서울: 김영사.

김응태 · 박승안 (2000). 현대대수학, 서울: 경문사.

남호영 · 박정숙 · 천정아 (2001). 종이접기속에 숨겨진 수학, 서울: 수학사랑.

박한식 (1991). 교직수학 I, 서울: 대한교과서 주식회사.

이강섭 · 김수환 · 임영훈 · 왕규채 · 송교식 · 이동수 · 강영길 (2001). 수학 10-가(교과서 및 교사용지도서), 서울: 지학사.

정현정 (2000). 종이접기를 이용한 삼각형의 내심과 외심지도에 관한 사례연구, 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.

황정원 (1999). 종이접기를 이용한 도형지도, 성균관대학교 석사학위논문.

B. Scimemi (2001). Algebra and Geometry by Paper-Folding, manuscript.