韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 13집, 2002. 2. 425-455.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 13, Feb. 2002. 425-455.

수학적 추론 능력 평가 기준에 관한 연구

전 평 국 (한국교원대학교)
김 은 희 (한국교원대학교 대학원)
김 원 경 (한국교원대학교 대학원)

본 연구는 수학교육에서 강조되고 있는 수학적 힘의 구성 요소 중의 하나인 수학적 추론 능력에 대한 교사들의 구체적인 이해를 돕고, 문제 해결 과정에서 학생들의 추론 능력을 분석하고 평가하는 데 도움을 주기 위해 문헌 연구 및 학생반응 분석결과에 기초하여 귀납적, 유비적, 연역적 추론능력에 대한 평가기준을 개발하였다. 또한, 개발된 평가기준을 구체적인 문제에 적용하였으며 이를 기초로 문제점을 수정·보완한 후, 전문가의 타당성 검증과 동일한 학생반응에 대한 채점결과의 일치도를 알아봄으로써 신뢰도 검증을 실시하였다.

I. 서 론

수학 교육의 중요한 목표 중의 하나는 일상 생활에서 접하는 여러 가지 문제를 수학적으로 이해하고 해결하기 위해 조직적이고 합리적으로 처리하고 생각하는 수학적 사고력을 길러주는 것이라 할 수 있다. 수학적 사고력은 학자에 따라 수학의 내용적 특성과 방법적 특성에 강조점을 달리 두어 여러 가지 하위 요소들로 분류되지만, 공통적으로 중요한 사고 과정은 주어진 문제의 요소를 체계적이고 분석적인 방법으로 이해하고 그들 간의 관계를 발견하며 일반화하거나 타당한 결론을 이끌어 내기 위하여 명확한 추론을 활용하는 논리적인 사고력이라고 볼 수 있다. 즉, 수학적 사고란 아이디어들을 이해하고, 그들 사이의 관계를 발견하여 문제를 해결하기 위하여 수학적으로 풍부한 사고 기술을 사용하는 것이며, 증거를 모으고 추측하고 일반화하여 논거를 세우고 논리적 결론을 이끄는 것을 포함한 수학적 추론은 수학적 사고의 중요한 요소이다(O'Daffer and Thornquist, 1993). 따라서 수학적 사고력 신장은 문제해결을 위한 추론 능력에 기초함을 알 수 있다.

최근 수학 교육에서 추론을 강조하는 입장은 여러 문헌에서 나타나고 있다. NCTM(1989, 2000)은 수학은 곧 추론하는 것이며 추론 없이는 수학을 할 수 없다고 진술하면서 수학이 논리적이고 의미있으며, 그들이 이해하고, 생각하고, 정당화하고, 평가할 수 있는 것이라는 신념을 촉진시키기 위해서는 추론을 강조하는 교실이 필수적이라고 말하고 있으며, NCTM(1991)은 모든 학생들을 위한 수학적 힘의 개발을 1990년대 수학 교육의 목적으로 제시하고, 논리적으로 탐구하고 추측하고 추론하는 능력을 수학적 힘의 구성요소 중의 하나로 강조하고 있다. 또한, 우리나라 제 7차 교육과정에서도 수학과의 목표를 '수학적 힘의 신장'으로 압축하면서 추론을 강조하고 있다(교육부, 1997).

이처럼 수학 교육에서 강조되고 있는 학생들의 추론 능력을 향상시키기 위해서 무엇보다 중요한

것은 교사들의 역할이라 할 수 있다. 즉, 교사들은 추론에 대한 구체적인 이해와 함께 그 중요성을 인식하고 학생들의 추론 능력을 분석할 수 있는 능력을 가지고 있어야 한다. 그리고, 이를 기초로 수학적인 추론을 요구하는 풍부한 과제를 개발하여 학생들에게 제공하고, 과제의 인지적인 요구를 유지시킬 수 있는 다양한 교수학적 전략을 사용할 수 있어야 한다.

이러한 교수-학습에서의 변화와 함께 평가에 있어서도 변화가 요구된다. 수학과의 평가는 학습 목표에 대한 학생들의 성취와 진전 정도를 다양한 방법으로 파악할 뿐 아니라, 학생들의 문제에 대한 접근법, 해결과정에서의 오류 등을 파악하여 피드백을 줌으로써 수학에 대한 태도를 향상시키고, 이를 통해 교수-학습 방법을 개선하는 것이다(Kulm, 1994). 즉, 교육과정은 같은 맥락에서의 평가가 수반될 때 효율적으로 운영될 수 있으며, 새로운 교육과정에 맞추어 새로운 교육자료들이 개발되어야 하듯이 교육과정이 결정되면 그에 맞추어 새로운 평가 전략과 규준이 개발되어야 한다(MSEB, 1990).

위에서 제시한 추론을 포함한 방법적 측면의 사고 기능의 강조와 그에 따른 평가의 필요성에 따라 최근 들어 학습자의 기억 암기에서 비롯되는 정보적, 사실적 지식의 습득 여부를 판정하는 기존의 결과 중심의 선택형 평가가 학생들의 동기, 흥미, 고등 사고 능력 등을 저해한다고 지적되면서 수업 활동의 연속적이고 확장적 의미로서 학생들의 학습 과정 및 구성적 반응을 강조하는 보안적이고 대안적인 평가방법으로 수행평가가 도입되고 있다. 우리나라에서도 최근 열린교육을 실시하는 초등학교를 중심으로 수행평가 방식이 확산되기 시작했으며, 교육부는 수행평가 방식을 일선 초·중·고 학교 현장에 적극 권장하는 정책을 펴고 있다. 또한 한국교육개발원에서는 미국 Vermont주의 수행평가 기준을 참고로 하여 문제의 이해, 문제해결 방법, 자기 논평, 수학 용어, 수학적 표상, 풀이 설명의 여섯 가지 범주를 중심으로 수행평가 기준을 설정하고 있다(황혜정 외, 1997).

그러나, 방법적 측면의 사고기능과 전략인 문제해결 능력, 의사소통 능력, 추론 능력, 수학적 연결성 등에 관한 교사들의 이해 부족과 구체적인 평가 기준이 제공되고 있지 않음으로 인해 평가의 객관성에서 많은 문제점이 있으며 오히려 교사의 업무를 과중시키고 있는 것이 현실이다. 이러한 현실을 개선하기 위해서는 방법적 측면의 사고기능과 전략에 관련된 연구와 그에 따른 평가 기준, 평가 도구에 대한 연구가 활발히 이루어져 이에 대한 교사들의 구체적인 이해를 높이는 것이 필요하다고 할 수 있다. 황혜정(2000)은 수학 교과에서 활용 가능한 여러 가지 평가 방법들은 학생들의 가시적인 행동 변화 및 상태를 평가 대상으로 하는 데 그치지 말고 수학적 사고 기능과 같은 정신적 조작 활동을 대상으로 해야 하며, 그럼으로써 수업이나 평가 상황에서의 문제해결 활동을 통하여 학습자의 수학적 사고 과정을 자연스럽게 그리고 정확하게 측정하는 데 활용할 수 있을 것이며, 새로운 평가의 방향에 발맞추기 위해서는 사고 과정 관련의 평가 기준의 탐색이 필요하다고 말하고 있다.

이러한 점을 고려하여 본 연구는 기초적 연구의 성격으로 방법적 사고 기능의 하나인 수학적 추론 능력을 귀납적, 유비적, 연역적 추론 능력으로 나누어 각각의 평가 기준을 제시하고자 하며, 이를

통해 추론에 대한 교사들의 구체적인 이해와 문제해결 과정에서 학생들의 추론 능력을 분석할 수 있는 시각을 길러주며 더 나아가 사고력 함양을 위한 지도 및 평가에 기여하는 데 그 목적이 있다.

Ⅱ. 연구 방법 및 절차

본 연구는 문제 해결 과정에서 학생들의 수학적 추론 능력을 평가하기 위한 일반적인 기준을 마련하기 위한 연구로서, 문헌 연구 및 학생 반응 분석 결과에 기초하여 평가 기준을 설정[1]하고 설정된 평가 기준을 구체적인 문제에 적용함으로써 수정·보완 및 검증하는 것으로 이루어진다.

첫째, 문헌 연구는 크게 수학적 추론과 수학 교육에서의 평가로 나누어 이루어졌다. 먼저 수학적 추론을 사고 기능의 본질에 따라 크게 귀납, 유비, 연역적 추론으로 나누었다. 그 각각의 의미, 본질적인 사고 기능, 일반적인 추론과정, 문제상황 및 문제해결을 위한 핵심 능력, 관련된 발달 심리학적 연구를 검토하여 수학적 추론에 대한 기본적인 이해와 평가 기준 설정의 이론적 기초를 마련하였다. 그리고 평가의 새로운 방향, 수학적 추론의 평가, 서술형 반응의 평가 기법을 검토하여 평가 기준 설정의 기본 방향에 대한 시사점을 마련하였다.

둘째, 각 추론의 문제상황에 관한 문헌 연구 결과에 기초하여 귀납, 유비, 연역적 추론 과제를 각각 분류하였다. 이에 근거하여 중학교 2학년 수준에 적합한 서술형 지필 평가 과제를 선정하였으며 예비검사와 전문가 검토를 하여 수정, 보완하였다. 또한, 각 과제에 대한 지필 검사와 면담을 통해 학생 반응을 수집하였다. 구체적인 과제는 [부록 1]에 제시하였다.

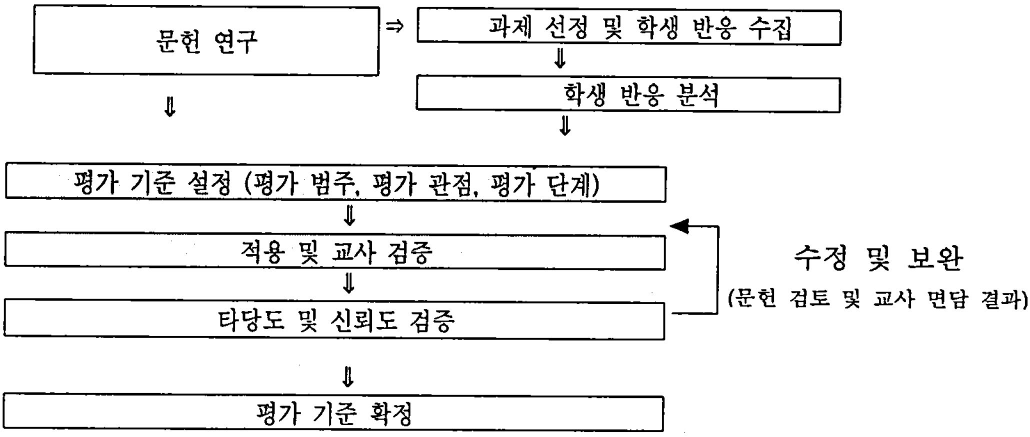
셋째, 문헌 연구와 학생 반응 분석에 기초하여 평가 범주[2], 평가 관점[3], 평가 단계[4]로 구성된 평가 기준을 설정하였다.

넷째, 설정된 평가 기준의 타당도와 신뢰도를 검증하였다.

마지막으로, 평가 기준의 실제 적용에 대한 구체적인 이해를 돕기 위해 각 추론별로 대표적인 학생 반응에 대한 채점 결과와 근거를 제시하였다.

1) 설정(設定): 새로이 만들어 정해둠
2) 문제 해결 과정 중 평가의 중점이 되는 단계
3) 평가 범주별 학생 반응 분석의 관점
4) 학생 반응의 수준

위의 연구 절차를 요약하면 [그림 II- 1]과 같다.



<그림 II-1> 본 연구의 절차

III. 평가 기준 설정

문헌 연구와 학생 반응 분석 결과에 근거하여 다음과 같이 평가 범주, 평가 관점, 평가 단계로 구성된 일반적이고 적용력있는 평가 기준을 마련하였다. 각 추론에 대한 평가 기준은 [부록 2]에 제시하였다.

A. 평가 범주 및 평가 관점

평가 범주는 일반적인 추론 과정과 본질적인 사고 기능에 대한 문헌 검토 결과에 근거하여 선정하였다. 평가 범주별로 학생 반응을 분석하는 시각의 기준인 평가 관점은 각 추론을 요하는 문제 상황에 대한 학생 반응을 각 평가 범주별로 분석하여 반응의 수준을 결정하는 요소를 파악하고 각 추론의 오류에 관한 문헌 연구 결과에 근거하여 결정하였다.

각 추론의 평가 범주 선정의 구체적인 근거는 <그림 III-1>과 같다.

	귀납적 추론	유비적 추론	연역적 추론
본질적인 사고기능	· 규칙 찾기 (자료 분석 능력) · 일반화 능력	· 유사성 인식	· 분석적, 종합적 사고 능력(근거 구상 능력) · 논리성
추론과정	사례수집→규칙찾기→일반화	유사성 인식 →기저 상황의 핵심 파악→대응 및 적용	전제, 결론의 구분→ 근거 구상→근거 종합

<그림 III-1> 각 추론별 평가 범주 선정 근거

B. 범주별 평가 단계 마련

Leitze & Mau(1999)에 따르면 분석적 평가 기준에서 3단계 이하의 평가 단계는 반응의 차이를 충분히 확인하지 못하게 하며 너무 세분화된 평가 단계는 반응의 구별을 힘들게 하는 경향이 있다. 이를 고려하여 각 추론의 평가 범주별 평가 단계는 평가 관점에 중점을 둔 학생 반응 분석 결과에 기초하여 다음과 같이 4단계를 기본으로 하였다.

0 - 시도하지 않았거나 평가 관점과 전혀 관련 없는 반응

1 - 문제 이해가 부족하거나 사고 능력이 부족하여 전반적으로 평가 관점에 적절하지 않으나 부분적 인 능력을 보임

2 - 전반적으로 평가 관점에 적절하나 부분적으로 부족한 면을 보임

3 - 평가 관점과 관련하여 완벽한 반응을 보인 경우 (사소한 실수는 고려하지 않는다)

C. 범주별 점수 부여

평가 범주는 완전히 독립적일 수 없으며 서로 영향을 주고 받음을 고려할 때 구체적인 문제 상황에 대한 평가 기준은 여러 교사와의 협의를 통해 충분한 검토를 거친 후, 문제 상황과 평가의 목적을 고려하여 문제에 따라 중요하다고 판단되는 평가 범주를 선택하여 가중치를 부여해야 할 것이다.

Ⅳ. 적용 및 검증

A. 적용

설정한 평가 기준을 다음과 같은 절차에 따라 [부록 1]에 제시된 귀납 추론 과제「홀수의 합」, 연역 추론 과제「이등변 삼각형」, 유비 추론 과제「삼각형과 사면체」에 각각 적용하여 구체적인 학생 반응으로 구성된 평가 기준을 마련하였다. 구체적인 평가 기준은 [부록 2]에 제시하였다.

① 평가 문항을 직접 풀어봄으로써 문제에서 특히 강조되는 사고 기능이 무엇인지 파악하여 핵심적인 평가 범주와 평가 관점을 결정하고 그와 관련된 구체적인 학생 반응을 확인한다.

② 위에서 결정한 내용을 기초로 전체 학생 반응을 총괄적으로 분석하여 어떠한 종류의 반응이 나오는 지 확인한 후, 각 평가 범주별로 평가 단계를 결정하고 각 단계에 해당하는 대표적인 학생 반응을 선정하여 개괄적인 평가 기준을 마련한다.

③ 각 범주별로 선택한 핵심적인 평가 관점에 중점을 두어 학생들의 반응을 분석하여 평가 기준을 상세화한다.

④ 중요한 평가 범주에 비중을 두어 점수를 부여한다.

⑤ 수정 및 마무리하여 확정한다.

B. 타당도 검증

설정한 평가 기준에 대한 현장 교사의 의견을 수렴하였으며 발견된 문제점을 수정 · 보완한 후, 전문가의 타당도 검증을 받았다. 검증 결과는 아래와 같다.

1. 평가 기준의 장점과 현장 적용 가능성

① 설정된 평가 기준은 기존의 평가 기준과 비교하여 각 평가 범주별로 구체적인 평가 관점이 제시되어 있어 각 평가 범주에서 강조하는 사고 기능에 대한 이해와 실제 평가 시 방향을 제시하여 학생 반응 분석에 도움을 주었다.

② 문제해결 과정을 단계별로 구분하여 부분 점수를 주어 왔던 기존의 학교 서술형 평가의 현실을 고려할 때, 구체적인 평가 기준의 제시는 학생들의 문제해결 과정에서 보여주는 사고 과정을 중점적으로 평가할 수 있게 함으로써 학생들의 사고 전략에 대한 교사들의 이해를 도울 것이며 평가의 타당성과 객관성을 높여 서술형 평가의 활성화에 기여할 것이다.

③ 현장 적용을 위해서는 다양한 문제 개발이 우선되어야 할 것이며 수업의 개선을 통해 학생들이 자신의 사고 과정을 표현하는 데 익숙해질 수 있도록 해야 할 것이다. 또한, 평가에 대한 교사의 전문성을 높이기 위해 다양한 연수가 활발히 이루어져야 할 것이다.

2. 평가 기준의 문제점 및 수정 · 보완

① 귀납 추론의 일반화 평가 범주의 단계가 너무 세분화되어 있다. 즉, 「홀수의 합」의 일반화 평가 범주의 2단계(일반화를 시도하였으나 부분적으로 부족함)로 분류된 반응 $1+3+5+\cdots+n=\frac{\text{홀수의 개수}}{2}\times(1+n)$은 일반화를 시도한 반응으로 볼 수 없으며 1단계(문자 사용 능력이 부분적으로 보임)에 해당하는 반응인 $n=(1+3+\cdots+n)-(1+3+\cdots+n-1)$과 같은 단계에 포함시켜야 함을 지적하였다. 이에 근거하여 일반화 범주를 다음과 같이 4단계로 수정하였다.

4 - 수학적 기호, 문자, 수식을 사용하여 일반식으로 정확히 나타냄
3 - 수학적 기호, 문자, 수식 사용에서 사소한 실수를 함
2 - 일반화를 시도하였으나 부분적으로 부족함
1 - 문자 사용 능력이 부분적으로 보임
0 - 시도하지 않았거나 규칙과 전혀 관련 없이 단순히 문자를 나열함

↓

3 - 수학적 기호, 문자, 수식을 사용하여 일반식으로 정확히 나타냄

2 - 일반화를 시도하였으나 부분적으로 부족함
1 - 문자 사용 능력이 부분적으로 보임
0 - 시도하지 않았거나 규칙과 전혀 관련 없이 단순히 문자를 나열함

② 연역 추론의 근거 종합 범주에서 수학적 용어 사용 능력이 평가의 관점으로 고려되어야 한다. 즉 논리적인 진술 능력과 함께 적절한 수학적 용어를 사용하여 자신의 사고 과정을 보다 간결하게 나타낼 수 있는 능력 또한 수학에서 중요하며 고려되어야 할 것으로 지적되었다. 이에 근거하여 근거 종합 범주의 평가 관점으로 '수학적 언어사용' 능력을 첨가하였다.

③ 유비 추론의 경우 접근 과정에서 두 상황의 구조적 유사성을 인식하지 못하였더라도 자신이 생각한 근거와 일관성있게 적용한 반응에 대해 사용 능력을 부분적으로 인정하여 점수를 부여하는 것이 타당하다. 예를 들어, 삼각형에서 성립하는 부등식 $\overline{AB}+\overline{AC} > \overline{BC}$의 좌변을 A에서 시작하는 변의 길이의 합으로 우변을 B로 시작하는 변의 길이로 파악하고 사면체에 부등식 $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD} > \overline{BC}+\overline{BD}$을 대응시킨 경우, 접근 과정에서 삼각형과 사면체의 구조적 유사성 파악 및 기저 상황의 핵심 파악은 올바르게 이루어지지 않았으나 자신이 생각한 근거와 일관성있는 적용을 하였다고 할 수 있다. 이에 근거하여 사용 과정 범주의 평가 관점으로 '대응의 일관성'을 첨가하였다.

C. 신뢰도 검증

[부록 4]에 제시된「홀수의 합」, 「이등변 삼각형」, 「삼각형과 사면체」의 평가 기준에 근거하여 각 추론별로 동일한 학생 반응 30개에 대한 교사 2명의 채점을 실시하였으며, 채점 결과에 대한 일치도를 알아봄으로써 평가 기준의 신뢰도를 검증하였다.

본 연구에서는 Nitko(1983)에서 제시한 채점자간의 신뢰 계수를 채점 결과의 일치도로 적용하였다. 채점자간의 신뢰 계수를 구하는 방법은 다음과 같다.

동일한 학생 n명에 대한 두 채점자 A, B의 채점 결과가 아래와 같을 때, 채점자간의 신뢰 계수는 다음과 같이 구할 수 있다. 이 때, C는 채점 결과의 일치 정도를 나타내는 지수가 된다.

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot y'_i}{n}$$

	채점자 A		채점자 B	
	원점수	표준화점수	원점수	표준화점수
반응1	x_1	$\dfrac{x_1 - M_x}{\sigma_x} = x'_1$	y_1	$\dfrac{x_1 - M_y}{\sigma_y} = y'_1$
반응2	x_2	$\dfrac{x_2 - M_x}{\sigma_x} = x'_2$	y_2	$\dfrac{x_2 - M_y}{\sigma_y} = y'_2$
…	…		…	
반+응n	x_n	$\dfrac{x_n - M_x}{\sigma_x} = x'_n$	y_n	$\dfrac{x_n - M_y}{\sigma_y} = y'_n$
평균	M_x		M_y	
표준편차	σ_x		σ_y	

각 추론 과제에 대한 평가 범주별 채점의 평균 일치도는 [표 Ⅳ-1]과 같다.

<표 Ⅳ-1> 각 추론 과제에 대한 평가 범주별 채점의 평균 일치도[5]

과 제	홀수의 합			이등변 삼각형		삼각형과 사면체	
평가범주	자료수집	규칙찾기	일반화	근거제시	근거종합	접근과정	사용과정
평균일치도	0.9126	0.8900	0.9157	0.9383	0.8849	0.9331	0.9053

D. 평가 기준

교사 검증과 전문가 타당도 검증 결과 수정된 각 추론 능력 평가 기준은 다음 <그림 Ⅳ-2>, <그림 Ⅳ-3>, <그림 Ⅳ-4>와 같다.

평가 범주	평가관점	평가 단계	
자료 수집 (Ⅰ)	Ⅰ-1. 자료의 적절성 Ⅰ-2. 자료의 정확성 Ⅰ-3. 자료의 충분성 Ⅰ-4. 자료의 체계성	3	· 일반적인 규칙을 찾기에 적절하고 정확한 자료를 충분히 수집
		2	· 자료의 충분성, 적절성, 정확성에서 부분적으로 부족한 자료 수집
		1	· 문제해결에 적절하지 않지만 규칙을 찾으려는 의도로 자료 수집
		0	· 규칙을 찾으려는 의도 없이 단순히 자료를 나열하였거나 시도하지 않음

5) 표에 제시된 각 평균 일치도는 소수 다섯째 자리에서 반올림한 값이다.

<table>
<tr><th>평가 범주</th><th>평가관점</th><th colspan="2">평가 단계</th></tr>
<tr><td rowspan="4">규칙 추측 (Ⅱ)</td><td rowspan="4">Ⅱ-1. 자료 분석 능력 (비교, 대조, 분류)
Ⅱ-2. 규칙의 정확성
Ⅱ-3. 규칙의 일반성</td><td>3</td><td>· 일반적인 규칙을 정확히 찾음</td></tr>
<tr><td>2</td><td>· 규칙의 일반성, 정확성이 부분적으로 부족함
· 문제해결과 관련 없지만 변수 사이의 관계를 일반화할 수 있는 규칙을 정확히 찾음 (자료 분석 능력)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>· 자료 분석 능력을 부분적으로 보여주는 규칙을 정확히 찾음</td></tr>
<tr><td>0</td><td>· 시도하지 않았거나 자료 분석 능력과 관련 없는 단순한 규칙을 찾음</td></tr>
<tr><td rowspan="4">일반화 (Ⅲ)</td><td rowspan="4">Ⅲ-1. 일반성 도출
Ⅲ-2. 수학적 기호, 문자, 수식 사용
Ⅲ-3. 정확성
Ⅲ-4. 간결성</td><td>3</td><td>· 수학적 기호, 문자, 수식을 사용하여 일반식으로 정확히 나타냄</td></tr>
<tr><td>2</td><td>· 일반화를 시도하였으나 부분적으로 부족함</td></tr>
<tr><td>1</td><td>· 일반식으로 나타내지 못하였으나 수학적 기호, 문자, 수식 사용 능력이 부분적으로 보임</td></tr>
<tr><td>0</td><td>· 시도하지 않았거나 규칙과 전혀 관련 없이 단순히 문자를 나열함</td></tr>
</table>

<그림 Ⅳ-2> 귀납적 추론 능력 평가 기준

<table>
<tr><th>평가 범주</th><th>평가관점</th><th colspan="2">평가 단계</th></tr>
<tr><td rowspan="4">접근 과정 (Ⅰ)</td><td rowspan="4">Ⅰ-1. 유사성 인식
· 유사관계의 근거 (구조적 · 표면적 유사성)
· 문제해결과의 관련
Ⅰ-2. 기저 상황의 핵심 파악</td><td>3</td><td>· 두 상황의 구조적 유사성에 기초하여 기저 상황의 핵심을 완전히 파악함</td></tr>
<tr><td>2</td><td>· 두 상황의 구조적 유사성과 기저 상황의 핵심 파악이 다소 부족함</td></tr>
<tr><td>1</td><td>· 두 상황의 비교가 이루어졌으나 구조적 유사성을 인식하지 못함</td></tr>
<tr><td>0</td><td>· 두 상황의 구조적인 비교가 이루어지지 않았으며 기저 상황의 핵심을 파악하지 못함</td></tr>
<tr><td rowspan="4">사용 과정 (Ⅱ)</td><td rowspan="4">Ⅱ-1. 대응의 타당성 (기저, 표적 상황의 핵심 요소의 대응)
Ⅱ-2. 적용의 유연성 (수학적 조작 능력, 표적 상황의 특수성 고려)
Ⅱ-3. 대응의 일관성</td><td>3</td><td>· 타당한 대응을 통해 표적 상황을 유연성있게 해결함</td></tr>
<tr><td>2</td><td>· 타당한 대응을 하였으나 적용 과정의 유연성이 다소 부족함</td></tr>
<tr><td>1</td><td>· 대응, 적용이 부분적으로 이루어짐
· 타당하지 못하지만 근거와 일관된 적용을 함</td></tr>
<tr><td>0</td><td>· 시도하지 않았거나 타당하지 않은 대응 및 적용이 이루어져 문제를 올바르게 해결하지 못함</td></tr>
</table>

<그림 Ⅳ-3> 유비적 추론 능력 평가 기준

평가범주	평가관점	평가 단계	
근거 제시 (증명의 구상) (Ⅰ)	Ⅰ-1. 근거의 타당성 (분석적, 종합적 사고, 보조 요소 수집) Ⅰ-2. 근거의 일반성	4	· 결론을 정당화하기에 타당하고 일반적인 근거를 정확히 제시함 (사소한 실수나 관련 없이 제시된 옳은 근거는 고려하지 않음)
		3	· 결론을 정당화하기 위한 일반적인 근거를 구상하였으나 중요한 추론 단계에서 부분적으로 타당하지 못한 근거를 제시함
		2	· 타당하지만 일반적이지 못한 근거를 제시함
		1	· 전반적으로 타당하지 않은 근거를 제시하였지만 근거 수집을 시도함
		0	· 전혀 타당하지 않은 근거를 제시하였거나 시도하지 않음
근거의 종합 (Ⅱ)	Ⅱ-1. 논리성 (이유제시, 진술의 일관성, 추론 규칙) Ⅱ-2. 추론 단계 Ⅱ-3. 수학적 언어 사용	3	· 모든 추론 단계를 논리적으로 기술함
		2	· 추론 단계가 부분적으로 생략되었거나 기술의 논리성이 다소 부족함
		1	· 부분적으로 논리성을 보임
		0	· 결론과 관련 없는 근거를 단순히 나열하였거나 시도하지 않음

<그림 Ⅳ-4> 연역적 추론 능력 평가 기준

위 평가 기준은 다음과 같은 단계에 따라 구체적인 문제 상황에 적용하여야 할 것이다.

① 먼저 평가 문항을 교사가 직접 풀어봄으로써 문제에서 강조하는 사고 과정이 무엇인지 파악하여 핵심적인 평가 범주와 평가 관점을 결정하고 해당하는 구체적인 내용을 확인한다.

② ①에서 결정한 내용을 기초로 전체 학생 반응을 총괄적으로 분석하여 어떠한 종류의 반응이 나오는 지 확인하여 대표적인 학생 반응으로 이루어진 개괄적인 평가 기준을 마련한다.

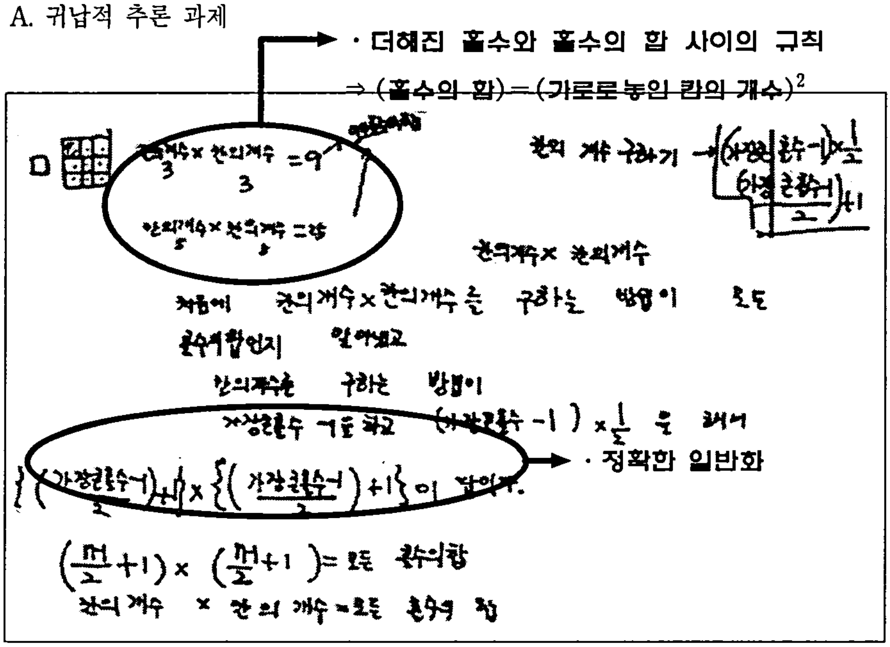
③ 각 범주별로 학생들의 반응을 중점적으로 분석하여 평가 기준을 상세화하고 점수를 부여한다.

④ 수정 및 마무리하여 확정한다.

Ⅴ. 채점의 예시

평가 기준의 실제 적용에 대한 구체적인 이해를 돕기 위해 각 추론별로 대표적인 학생 반응에 대한 채점 결과와 근거를 제시하였다.

A. 귀납적 추론 과제



<그림 Ⅴ-1>「홀수의 합」에 대한 학생 반응 예

(자료 수집)- 3

그림을 이용하여 홀수의 합과 가로로 놓인 칸의 개수에 대한 규칙을 찾으면서 더해진 홀수와 홀수의 합에 대한 자료를 수집하였다.

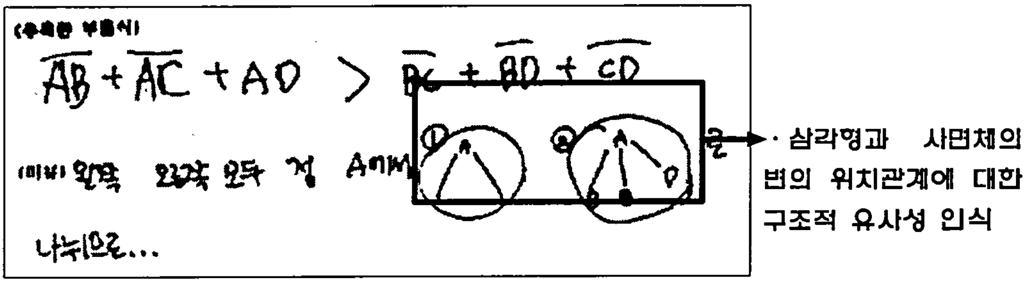
(규칙 찾기) - 6

홀수를 나타내는 각각의 그림을 차례로 합하면 정사각형 모양이 되며 이 때 홀수의 합은 정사각형의 넓이인 (가로로 놓인 단위 사각형의 개수)^{2}이 된다는 규칙을 정확히 찾았다. 또한, 각 경우에 가로로 놓인 사각형의 개수는 마지막으로 더해진 홀수와 관련이 있음을 파악하였다. 즉, 문제해결과 관련된 규칙을 정확히 찾았음을 알 수 있다.

(일반화) - 6

'칸의 개수= $\dfrac{(\text{가장 큰 홀수}-1)}{2}+1$'에서 알 수 있듯이 마지막 홀수 n과 가로로 놓인 칸의 개수 사이의 관계에서 일반성을 도출하였으며 홀수의 합을 n에 관한 일반식으로 정확히 나타내었다.

B. 유비적 추론 과제



<그림 V-2>「삼각형과 사면체」에 대한 학생 반응 예

(접근 과정) - 6

삼각형과 사면체의 변의 위치 관계에 대한 구조적인 유사성을 인식하였으며, 이를 근거로 삼각형에서 성립하는 부등식의 좌변 $\overline{AB}+\overline{AC}$는 꼭지점 A에서 시작하는 두 변의 길이의 합으로 우변 $\overline{BC}$는 나머지 변 또는 밑변으로 파악하여 사면체의 여섯 개의 변 사이의 관계식을 찾기 위한 근거를 마련하였다.

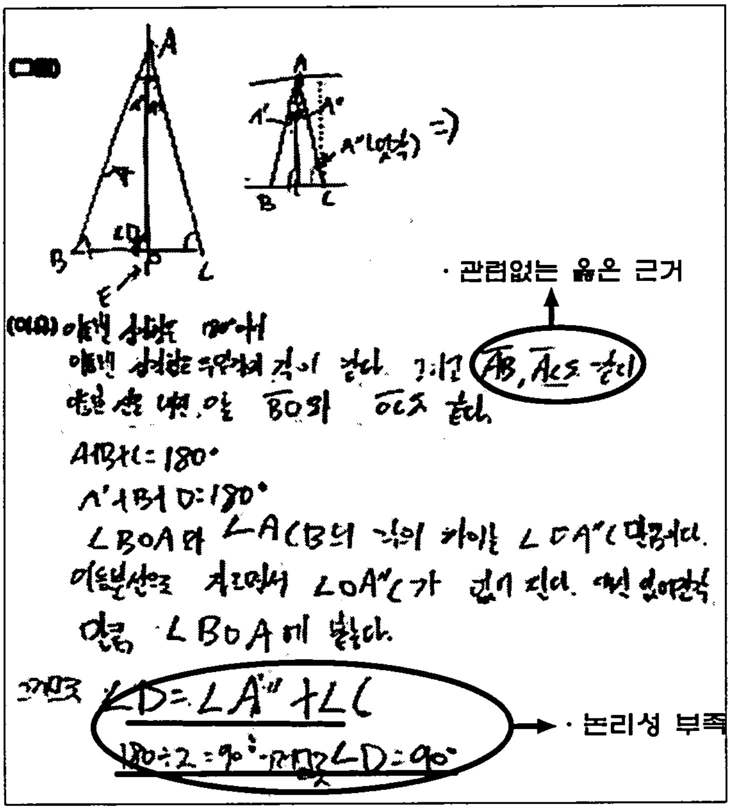
(사용 과정) - 2

먼저 변의 위치 관계에 대한 구조적 유사성과 부등식 $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$이 의미하는 것에 기초하여 두 상황의 핵심 요소들을 아래와 같이 올바르게 대응시켰다. 이에 근거하여 사면체의 여섯 개의 변 사이에 성립하는 부등식으로 $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD} > \overline{BC}+\overline{BD}+\overline{CD}$을 추측하였으나, 삼각형과 사면체의 변의 개수 사이의 차이점을 고려할 때 추측한 부등식 $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD} > \overline{BC}+\overline{BD}+\overline{CD}$의 좌변에 어떤 상수가 곱해져야 함을 생각하지 못하였다.

삼각형 ABC	사면체 ABCD
$\overline{AB}+\overline{AC}$	$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$
$\overline{BC}$	$\overline{BC}+\overline{BD}+\overline{CD}$

즉, 두 도형의 변의 위치 관계에 대한 구조적 유사성을 인식하고 그에 기초하여 사면체의 여섯 개의 변 사이의 관계를 하나의 부등식으로 나타내었으나, 삼각형과 사면체의 변의 개수를 고려한 유연성있는 적용이 이루어지지 못했다.

C. 연역적 추론 과제



<그림 V-3>「이등변 삼각형」에 대한 학생 반응 예

(근거 제시) - 8

타당하고 일반적인 근거인 삼각형의 내각의 합을 이용하여 구하고자 하는 각을 찾으려는 분석적이고 종합적인 사고를 하였다. 즉, △ABC의 내각의 합과 ∠A'+∠B+∠D이 180° 임을 근거로 하여 $\triangle ACO$에서 $\angle D= \angle A'' + \angle C$이 성립함을 이끌었다.

또한, △ABC의 내각의 합이 180° 임과 $\angle A' = \angle A''$을 이용하여 $\angle A'' + \angle C$ = 90° 을 이끌어 냈음을 학생 반응 **'이등변 삼각형은 180° 이다. 이등변 삼각형은 두 밑각의 각이 같다'**에서 추측할 수 있다

(근거 종합) - 2

대체적으로 사고의 과정에 따라 논리적으로 진술하였으나, **'∠D=∠A''+∠C, 180÷2 = 90 그러**

므로 $\angle D=90^{\circ}$ '의 구체적인 이유인 '**이등변 삼각형은 180° 이다. 이등변 삼각형은 두 밑각의 각이 같다**'를 추론 규칙에 맞게 제시하지 않아 채점자에게 사고의 과정을 명확히 전달하지 못하였다.

Ⅵ. 결론 및 논의

현 수학 교육은 학생들의 수학적 사고력 신장을 중요한 목표로서 강조하고 있으며 특히, 방법적 측면의 고차적 사고 기능인 수학적 추론은 수학적 힘의 중요한 구성 요소 중의 하나로서 그 중요성이 부각되고 있다. 같은 맥락에서 평가 또한 학생들의 수학적 사고 방법을 다양한 방법으로 진단하여 교수-학습 과정에 반영하는 지속적이고 역동적인 과정으로 그 방향이 변화하고 있다. 그러나, 현장 적용에 있어 방법적 측면의 사고 기능과 전략에 대한 교사들의 이해 부족과 구체적인 평가 기준의 부족으로 인해 평가의 객관성에 많은 문제점이 있으며, 이로 인해 실제의 목적에 부합하는 방향으로 평가가 제대로 이루어지고 있지 않은 것이 현실이다.

이러한 현실을 개선하기 위해 본 연구에서 설정한 귀납, 유비, 연역적 추론 평가 기준의 특징 및 현장 적용 시 유의점을 논의하고 마지막으로 몇 가지 제언을 하고자 한다.

먼저, 본 연구에서 설정한 평가 기준은 크게 다음과 같은 세 가지 특징이 있다.

첫째, 문제에 포함된 수학적 내용과 관련 없이 각 추론을 요하는 문제 상황을 해결하는 일반적이고 공통적인 문제해결 과정 및 본질적인 사고 기능에 초점을 둔 독립적인 평가 범주를 단계별로 제시함으로써, 구체적인 문제에 적용 시 학생 반응을 보다 여러 시각에서 분석적으로 평가할 수 있는 일반적인 기준을 제공할 것이다.

둘째, 평가 범주만을 제시한 기존의 평가 기준과 달리 각 평가 범주별로 구체적인 평가 관점을 제시함으로써, 각 평가 범주에서 강조하는 사고 기능에 대한 구체적인 이해를 돕고 실제 평가 시 학생 반응 분석의 방향을 제시하여 보다 적용력 있는 평가 기준으로서의 역할을 할 것이다.

셋째, 다음과 같은 이유로 「문제 이해」를 독립적인 평가 범주에서 제외하였다. 실제로 학생들의 문제 이해 정도는 독립적인 명확한 평가 관점에 근거하기보다는 해결 과정 전반에서 보여주는 학생들의 반응에 의해서 유추되는 경우가 많으며 객관적인 평가가 매우 어려운 범주라고 할 수 있다. 예를 들어, Polya가 제시한 문제 이해 정도에 대한 척도인 문제에 주어진 것과 구하고자 하는 것, 용어를 모두 이해하였으나 해결의 실마리를 찾지 못해 백지의 반응을 보인 경우, 문제 이해의 정도를 평가하기란 매우 곤란하다고 할 수 있다. 즉, 문제 이해는 문제해결 과정 전반을 통해 주로 평가되므로 독립적인 평가 범주로 고려했을 때 다른 평가 범주와 중복으로 평가될 우려가 있다. 따라서, 본 평가 기준에서는 「문제 이해」를 독립적인 평가범주에서 제외하였다.

이와 같은 특징을 고려할 때 설정된 평가 기준을 구체적인 문제에 적용할 때 다음과 같은 사항에 유의하여야 할 것이다. 즉, 설정된 평가 기준의 일반적인 평가 범주 및 평가 관점에 기초하여 각 과제에서 강조하는 평가 범주와 평가 관점을 선택하고, 이에 기초하여 수정·보완되어 활용되어야 할

것이다. 또한, 학생들이 평가하고자 하는 방향으로 사고 기능을 최대한 발휘할 수 있도록 평가에 앞서 각 추론의 일반적인 사고 과정에 대한 학생들의 이해를 도와주어야 할 것이다.

마지막으로, 본 연구에서 설정한 귀납, 유비, 연역적 추론 능력에 대한 평가 기준이 수학적 추론에 대한 교사들의 구체적인 이해를 돕고 학생들의 다양한 문제해결 과정에서 나타나는 추론 활동을 분석, 평가할 수 있는 시각을 길러줌으로써, 기존의 평가가 가진 문제점을 개선하고 평가의 진정한 목적을 달성하는 데 도움이 되리라 기대하며 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 수학적 추론 이외의 사고 기능에 관한 전략 및 그에 따른 평가 기준, 평가 도구에 대한 지속적인 연구가 함께 이루어져야 할 것이다.

둘째, 학생들의 사고 기능을 평가할 수 있는 다양한 문제 개발이 우선되어야 할 것이다.

셋째, 수학적 사고력을 평가할 수 있는 다양한 비형식적 평가 기법에 대한 연구가 함께 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 중학교 교육과정 해설(III)-수학, 과학, 기술, 가정-, 서울: 대한교과서 주식회사.

황혜정・김홍원・박경미・김수환 (1997). 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법 연구, 서울: 서울시 교육청.

황혜정 (2000). 수학적 사고 과정 관련의 평가 요소 탐색. 한국 교육과정 평가원, http://kice2.kice.re.kr/kdata/ver3/wkice100.html

Kulm, G. (1994). *Mathematics assessment: What works in the classroom.* San Fransisco: Jossey-Bass.

Leitze, A.R. & Mau, S.T. (1999). Assessing problem-solving thought, *Mathematics Teaching in the middle school* **4(5)**, pp.304-311.

MSEBNRC. (1990). Reshaping school mathematics: A philosophy and framework curriculum. Washington, D. C. : National Academy Press. 구광조, 강 완(공역) (1996). 학교 수학의 재구성: 교육 과정의 철학과 골격. 한국수학교육학회.

NCTM (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 구광조, 오병승, 류희찬(공역) (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울: 경문사.

______. (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

______. (2000). *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nitko, A.J. (1983). *Educational tests and measurement: An introduction.* NY: Harcourt Brace Jovanovich, Inc.

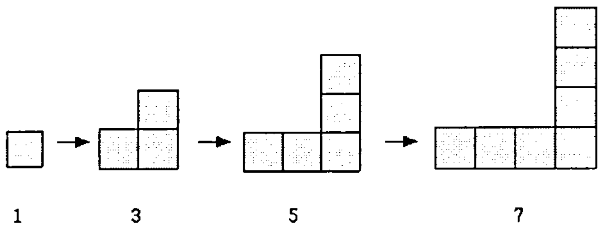
O'Daffer, P.G., & Thornquist, B. A. (1993). Critical thinking, mathematical reasoning, and proof. In P. S. Wilson(Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics.* NY: Macmillan Publishing Company.

[부록 1] 각 추론 유형별 본과제

1. 귀납적 추론 과제

♣ 홀수의 합 ♣

1. **1부터 임의의 홀수 n까지의 모든 홀수의 합인 1+3+5+⋯+n을 n에 관한 식**으로 나타내고자 한다. 먼저 아래 그림을 참고하여 1부터 홀수를 차례로 더해 가면서 다양한 규칙을 찾아보자.



♣ 규칙을 찾는 과정을 기록해보자.

♣ 자신이 찾은 규칙을 이용하여 $1+3+5+\cdots+n$**을** n**에 관한 식으로 나타내어라.(**n**은 임의의 홀수)**

2. 연역적 추론 과제

♣ 이등변 삼각형 ♣

이등변 삼각형 ABC의 꼭지각의 이등분선이 밑변과 이루는 각은 얼마인가?

문제의 조건에 맞는 그림을 그리고, 자신의 결정에 대한 이유를 주어진 조건과 자신이 알고 있는 수학적인 근거(정의, 성질, 법칙,…)를 들어 논리적으로 설명하여라.

(그림)

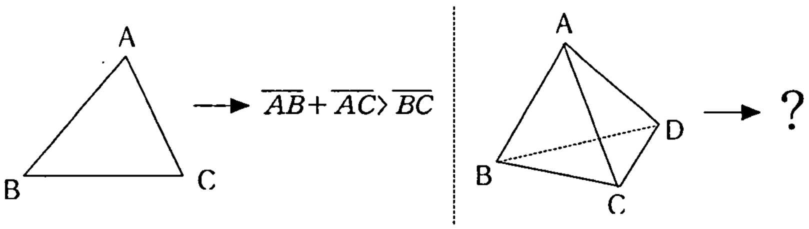
(이유)

***자신이 사용한 수학적인 근거는?**

3. 유비적 추론 과제

♣ 삼각형과 사면체 ♣

삼각형 ABC에서 부등식 $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$ **이 의미하는 것에 기초하여 오른쪽 사면체 ABCD의 여섯 개의 변 사이에 성립하는 부등식을 결정**하고자 한다.



자신의 결정에 대한 **이유를 삼각형 ABC에서 부등식** $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$

이 의미하는 것에 기초하여 설명하여라.

(이유)

[부록 2] 수학적 추론능력 1차 평가 기준

1. 귀납적 추론능력 평가 기준

평가범주	평가관점	평가 단계	
자료수집 (Ⅰ)	Ⅰ-1. 자료의 적절성 Ⅰ-2. 자료의 정확성 Ⅰ-3. 자료의 충분성 Ⅰ-4. 자료의 체계성	3	·일반적인 규칙을 찾기에 적절하고 정확한 자료를 충분히 수집
		2	·자료의 충분성, 적절성, 정확성에서 부분적으로 부족한 자료 수집
		1	·문제해결에 적절하지 않지만 규칙을 찾으려는 의도로 자료 수집
		0	·규칙을 찾으려는 의도 없이 단순히 자료를 나열하였거나 시도하지 않음
규칙추리 (Ⅱ)	Ⅱ-1. 자료 분석 능력 (비교, 대조, 분류) Ⅱ-2. 규칙의 정확성 Ⅱ-3. 규칙의 일반성	3	·일반적인 규칙을 정확히 찾음
		2	·규칙의 일반성, 정확성이 다소 부족함 ·문제해결과 관련 없지만 변수 사이의 관계를 일반화할 수 있는 규칙을 정확히 찾음 (자료 분석 능력)
		1	·자료 분석 능력을 부분적으로 보여주는 규칙을 정확히 찾음
		0	·시도하지 않았거나 자료 분석 능력과 관련없는 단순한 규칙을 찾음
일반화 (Ⅲ)	Ⅲ-1. 일반성 도출 Ⅲ-2. 수학적 기호, 문자, 수식 사용 Ⅲ-3. 정확성 Ⅲ-4. 간결성	4	·수학적 기호, 문자, 수식을 사용하여 일반식으로 정확히 나타냄
		3	·수학적 기호, 문자, 수식 사용에서 사소한 실수를 함
		2	·일반화를 시도하였으나 부분적으로 부족함
		1	·문자 사용 능력이 부분적으로 보임
		0	·시도하지 않았거나 규칙과 전혀 관련 없이 단순히 문자를 나열함

2. 유비적 추론능력 평가 기준

평가범주	평가관점	평가 단계	
접근 과정 (Ⅰ)	Ⅰ-1. 유사성 인식 1) 유사관계의 근거 (구조적·표면적유사성) 2) 문제해결과의 관련 Ⅰ-2. 기저 상황의 핵심 파악	3	·두 상황의 구조적 유사성에 기초하여 기저 상황의 핵심을 완전히 파악함
		2	·두 상황의 구조적 유사성과 기저 상황의 핵심 파악이 다소 부족함
		1	·두 상황의 비교가 이루어졌으나 구조적 유사성을 인식하지 못함
		0	·두 상황의 구조적인 비교가 이루어지지 않았으며 기저 상황의 핵심을 파악하지 못함
사용 과정 (Ⅱ)	Ⅱ-1. 대응의 타당성 (기저, 표적 상황의 핵심 요소의 대응) Ⅱ-2. 적용의 유연성 (수학적 조작 능력, 표적상황의 특수성 고려)	3	·타당한 대응을 통해 표적 상황을 유연성있게 해결함
		2	·타당한 대응을 하였으나 적용 과정의 유연성이 다소 부족함
		1	·대응, 적용이 부분적으로 이루어짐
		0	·타당하지 않은 대응이 이루어져 문제를 올바르게 해결하지 못함

3. 연역적 추론능력 평가 기준

평가범주	평가관점	평가 단계	
근거 제시 (증명의 구상) (Ⅰ)	**Ⅰ-1. 근거의 타당성**(분석적, 종합적 사고, 보조 요소 수집) **Ⅰ-2. 근거의 일반성**	4	· 결론을 정당화하기에 타당하고 일반적인 근거를 정확히 제시함 (사소한 실수나 관련 없이 제시된 옳은 근거는 고려하지 않음)
		3	· 결론을 정당화하기 위한 일반적인 근거를 구상하였으나 중요한 추론 단계에서 부분적으로 타당하지 못한 근거를 제시함
		2	· 타당하지만 일반적이지 못한 근거를 제시함
		1	· 전반적으로 타당하지 않은 근거를 제시하였지만 근거 수집을 시도함
		0	· 전혀 타당하지 않은 근거를 제시하였거나 시도하지 않음
근거의 종합 (Ⅱ)	**Ⅱ-1. 논리성** (이유제시, 진술의 일관성, 추론 규칙) **Ⅱ-2. 추론 단계**	3	· 모든 추론 단계를 논리적으로 기술함
		2	· 추론 단계가 부분적으로 생략되었거나 기술의 논리성이 다소 부족함
		1	· 부분적으로 논리성을 보임
		0	· 결론과 관련 없는 근거를 단순히 나열하였거나 시도하지 않음

[부록 3] 각 추론 과제에 대한 채점 기준(일부만 발췌)

1. 「홀수의 합」 과제에 대한 채점 기준

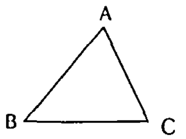
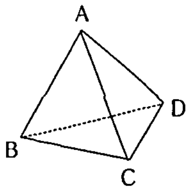
평가범주	평가 단계 및 반응	
규칙 찾기 (II)	· 일반적인 규칙을 정확히 찾음	
	① 더해진 홀수와 홀수의 합 사이의 관계 파악	$1=1^2$, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$, $\cdots$ → (홀수의 합) = (더해진 홀수의 개수)^2 → (홀수의 합) = (마지막 홀수의 순서)^2 → (홀수의 합) = (가로로 놓인 사각형의 개수)^2 → (홀수의 합) = (1에서 마지막 홀수까지의 자연수 중 가운데 수)^2
	② 일정한 합으로 묶여지는 홀수 쌍의 개수와 홀수의 합 사이의 관계 파악	$1+3+5=(1+5)+3=6\times1+3$, $1+3+5+7=(1+7)+(3+5)=8\times2$ $1+3+5+7+9=(1+9)+(3+7)+5=10\times2+5$ $1+3+5+7+9+11=(1+11)+(3+9)+(5+7)=12\times$ → 더해진 홀수의 개수가 짝수인 경우; (홀수의 합) = (1 + 마지막 홀수) × (1 + 마지막 홀수)/4 → 더해진 홀수의 개수가 홀수인 경우; (홀수의 합) = (1 + 마지막 홀수) × (1 + 마지막 홀수)/4의 정수 부분 + 가운데 홀수

평가범주	평가 단계 및 반응	
	· 일반적인 규칙을 정확히 찾음	
규칙 찾기 (II)	③ 더해진 마지막 홀수와 홀수의 합과의 관계 파악(그림과 수치적 조작 이용)	· $1=1^2=(\frac{1+1}{2})^2$, $1+3=2^2=(\frac{3+1}{2})^2$, $1+3+5=3^2=(\frac{5+1}{2})^2 \cdots$ $\rightarrow$ (홀수의 합) $= (\frac{\text{마지막 홀수}+1}{2})^2$ · $1=1^2=(1-0)^2$, $1+3=2^2=(3-1)^2$, $1+3+5=3^2=(5-2)^2 \cdots$ $\rightarrow$ (홀수의 합) $=$ (마지막 홀수 $- \frac{\text{마지막 홀수}-1}{2})^2$
	④기타 · 홀수의 합과 홀수를 순서대로 나열하여 그 둘 사이의 규칙을 찾음	· (2번째 홀수까지의 합) $=(2-1)\times(2+1)+1=4$ (3번째 홀수까지의 합) $=(3-1)\times(3+1)+1=9$ · $1=1^2-0^2 3=(1+3)-1=2^2-1^2$, $5=(1+3+5)-(1+3)=3^2-2^2$ $\rightarrow$ (주어진 홀수) $= (\frac{\text{홀수}+1}{2})^2 - (\frac{\text{홀수}-1}{2})^2$

<table>
<tr><th>평가범주</th><th colspan="2">평가 단계 및 반응</th></tr>
<tr><td rowspan="3">규칙찾기
(II)</td><td colspan="2">· 규칙의 일반성, 정확성이 부분적으로 부족함
· 문제해결과 관련 없지만 변수 사이의 관계를 일반화할 수 있는 규칙을 정확히 찾음 (자료 분석 능력)</td></tr>
<tr><td>①규칙의 일반성 부족 (더해진 홀수의 개수가 짝수인 경우만을 고려한 규칙을 찾음)</td><td>·
$1+3+\cdots+97+99=(1+99)+(3+97)+\cdots+(4$
→ 99까지의 홀수의 개수는 $\frac{1+99}{2}$이며 합이 100으로 일정한 홀수 쌍의 개수는 더해진 홀수 개수의 $\frac{1}{2}$인 $\frac{1+99}{4}$ 이다.</td></tr>
<tr><td>② 자료 분석 능력(문제해결과 관련 없지만 변수 사이의 관계를 일반화할 수 있는 규칙을 정확히 찾음)</td><td>·
$1+3+5+7+9=25,\ 11+13+15+17+19=75$
→
(각 단위의 홀수의 합) $=25+$ (십의 자리 이상의 숫
·
$1+3=4=4\times1,\ 3+5=8=4\times2,\ 5+7=12=4$
→ (인접한 홀수의 합) $=4\times$ (작은 홀수의 순서)</td></tr>
</table>

평가범주	평가 단계 및 반응	
규칙찾기 (II)	**· 자료 분석 능력을 부분적으로 보여주는 규칙을 정확히 찾음**	
	① 홀수의 합에 나타난 규칙을 찾음	· $1=1^2$, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$ → 홀수의 합은 제곱수이다. · $1=1$, $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, … → 홀수의 합인 1, 4, 9, 16은 3, 5, 7, 9의 순서로 증가한다.
	② 앞, 뒤 홀수 쌍들의 합이 일정함을 찾음	· $(1+99)=(3+97)=\cdots=(49+51)=100$
	③ 각 자리수의 홀수의 합이 증가하는 규칙을 찾음	· $1+3+5+7+9=25$, $11+13+15+17+19=75$, … → 각 자리수의 홀수의 합은 50씩 증가
	④ 인접한 두 홀수의 합에 관한 규칙을 찾음	· $1+3=4$, $3+5=8$, $5+7=12$, … → 4의 배수
	⑤ 기타	· $1=1$, $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, … → 더해진 홀수의 개수가 짝수(홀수)개이면 홀수의 합도 짝수(홀수)이다.
	· 시도하지 않았거나 자료 분석 능력과 관련없는 단순한 규칙을 찾음	
	· 홀수에 관한 단순한 규칙	· (홀수)＝(짝수)＋1, (홀수)＋(홀수)＝(짝수) (홀수)＝(바로 앞 홀수)＋2(홀수)=(바로 앞 홀수)+2

2. 「삼각형과 사면체」 과제에 대한 채점 기준

<table>
<tr><th>평가범주</th><th colspan="2">평가 단계 및 반응</th></tr>
<tr><td rowspan="5">접근 과정
(I)</td><td colspan="2">· 두 상황의 구조적 유사성에 기초하여 기저 상황의 핵심을 완전히 파악</td></tr>
<tr><td rowspan="2">①삼각형과 사면체의 <u>변의 위치 관계</u>에 기초하여 부등식이 $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$의 의미하는 것을 완전히 파악

</td><td>ⅰ) 삼각형, 사면체의 변의 위치 관계의 유사성 파악, $\overline{BC}$: 밑변, $\overline{AB}+\overline{AC}$나머지 변으로 부등식 이해

· 삼각형 ABC에서 밑변이 나머지 변보다 작으므로 삼각뿔에서도 밑면의 둘레가 $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$보다 작을 것이다</td></tr>
<tr><td>ⅱ)삼각형, 사면체의 변의 위치 관계의 유사성 파악,
$\overline{AB}+\overline{AC}$A에서 나오는 변, $\overline{BC}$: 나머지 변으로 부등식 이해

· 삼각형에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$는 A에서 그은 선들이므로 사면체에서는 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ 된다. 삼각형 $\overline{BC}$는 그 외의 나머지 선들이므로 사면체에서는 $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$가 된다</td></tr>
<tr><td>② 가상적인 길이를 고려한 변의 위치 관계에 기초하여 $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$의 의미 파악</td><td>삼각형, 사면체의 변의 위치 관계의 유사성 파악, $\overline{BC}$: 밑변이 가장 긴 변이라 가정, $\overline{AB}+\overline{AC}$나머지 변으로 부등식 이해

· 삼각형의 밑변 BC가 가장 긴 변, 사면체의 밑면 BCD의 각 변이 가장 긴 변이라고 가정하면
삼각형 ABC에서 밑변이 나머지 변보다 작으므로 삼각뿔에서도 밑면의 둘레가 $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$보다 작을 것이다</td></tr>
<tr><td>③ 삼각형과 사면체의 <u>도형 구조</u>를 고려한 위치관계에 기초하여 부등식의 의미 파악</td><td>삼각형: 옆변 2개, 사면체: 옆면 3개, $\overline{BC}$: 밑변, $\overline{AB}+\overline{AC}$:

나머지 변으로 부등식 이해

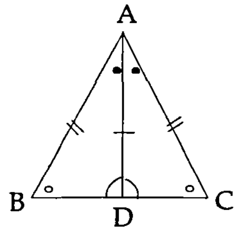
· 사면체에서 일단 밑면을 빼고 분리를 시키면 삼각형 3개로 옆면이 만들어진다. 그러면 각 삼각형마다 밑변이 나머지 두 변보다 길이가 짧아야 하기 때문에</td></tr>
</table>

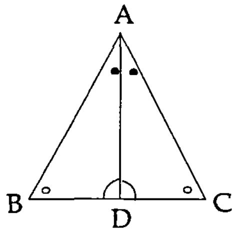
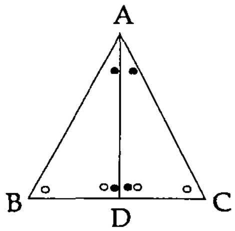
<table>
<tr><th>평가범주</th><th colspan="2">평가 단계 및 반응</th></tr>
<tr><td rowspan="4">접근 과정
(I)</td><td colspan="2">· 두 상황의 구조적 유사성과 기저 상황의 핵심 파악이 다소 부족함</td></tr>
<tr><td>① 시각적인 길이를 고려한 변의 위치관계에 기초하여 부등식의 의미 파악</td><td>i) $\overline{BC}$: 밑변이 가장 길어 보이는 변, $\overline{AB}+\overline{AC}$짧은 두 변

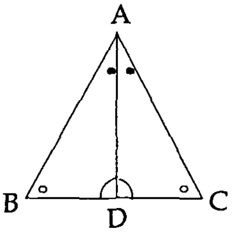
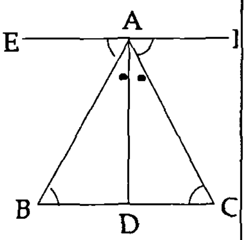
· 삼각형에서 가장 길어 보이는 밑변 BC와 사면체에서 각 변이 가장 길어 보이는 아래면 BCD의 각 변의 합이 나머지 변들의 합보다 더 짧다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">· 두 상황의 비교가 이루어졌으나 구조적 유사성을 인식하지 못함</td></tr>
<tr><td>· 삼각형과 사면체의 겉모양에서 유사성을 파악하였으며
삼각형의 일반적인 성립조건으로 부등식의 의미를 파악함</td><td>사면체를 구성하는 4개의 삼각형에 부등식을 모두 적용함
· △ABC: $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$, △ACD: $\overline{AC}+\overline{AD}>\overline{CD}$
△ABD: $\overline{AB}+\overline{AD}>\overline{BD}$, △BCD: $\overline{CD}+\overline{BD}>\overline{BC}$</td></tr>
</table>

평가범주	평가 단계 및 반응	
접근 과정 (I)	**· 두 상황의 구조적인 비교가 이루어지지 않았으며 기저상황의 핵심을 이해하지 못함**	
	① 길이에 근거하여 삼각형에서 성립하는 부등식의 의미를파악	· 시각적인 변의 길이에 근거하여 사면체의 각 면에 부등식을 적용시킴 $\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{AC}$, $\overline{AC}+\overline{AD}>\overline{CD}$, $\overline{AB}+\overline{AD}>\overline{BD}$, $\overline{BC}+\overline{CD}>\overline{BD}$
	② 삼각형에서 성립하는 부등식의 의미를 파악하지 못함	i) 시작하는 문자를 고려하여 적용의 근거를 찾음 · $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}$를 보면 중복되는 A는 빼고, $\overline{BC}$를 선택해서 작다고 하였으므로 · 꼭지점 A가 들어가는 변을 다 합친 것은 꼭지점 B가 들어가는 변을 다 합친 것보다 크다고 생각해서 사면체에도 적용시켰다
		ii) 부등식의 항의 개수에 근거하여 적용의 근거를 찾음 · $\overline{AB}+\overline{AD}>\overline{AC}$ $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{AD}$ $\overline{AC}+\overline{AD}>\overline{AB}$
	③ 기타	· 사면체는 입체이기 때문에 두 변 $\overline{BC}$와 $\overline{CD}$를 더해 주어야 한다 $\overline{AB}+\overline{AC}>\overline{BC}+\overline{CD}$ · 사면체 4개의 면 중, 앞의 삼각형에 해당하는 면 ABC를 제외한 3개의 면에 부등식을 적용시킴 $\overline{AC}+\overline{AD}>\overline{CD}$, $\overline{AB}+\overline{AD}>\overline{BD}$, $\overline{BC}+\overline{CD}>\overline{BD}$

3. 「이등변 삼각형」 과제에 대한 채점 기준

<table>
<tr><th>평가범주</th><th colspan="2">평가 단계 및 반응</th></tr>
<tr><td rowspan="4">근거제시
(Ⅰ)</td><td colspan="2">· 결론을 정당화하기에 타당하고 일반적인 근거를 정확히 제시함
(사소한 실수나 관련 없이 제시된 옳은 근거는 고려하지 않음)</td></tr>
<tr><td>① 삼각형의 합동과 평각의 성질 이용
</td><td>· △ABD≡△ACD → ∠ADB=∠ADC
↑ ↑
$\overline{AB}=\overline{AC}$ 합동의 성질(대응각의 크기)
∠BAD=∠BCD
$\overline{AD}$(SAS)
(∠ABD=∠ACD(ASA))

→ ∠ADB=∠ADC = 90°
↑
∠BDC=180° (평각)</td></tr>
<tr><td>② 두 삼각형에서 두 각이 같으면 나머지 각도 같다.
</td><td>· △ABD과 △ACD에서
∠ADB = ∠ADC → ∠ADB=∠ADC = 90°
↑ ↑
∠BAD=∠CAD ∠BDC=180° (평각)
∠B=∠C</td></tr>
<tr><td>③ 삼각형의 외각과 내각사이의 관계
</td><td>· △ABD과 △ACD에서
∠ADC = ∠ADB → ∠ADB =∠ADC = 90°
↑ ↑
∠ADC = ∠BAD+∠B ∠BDC=180° (평각)
∠ADB = ∠CAD+∠C</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>평가범주</th><th colspan="2">평가 단계 및 반응</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">· 결론을 정당화하기에 타당하고 일반적인 근거를 정확히 제시함
(사소한 실수나 관련 없이 제시된 옳은 근거는 고려하지 않음)</td></tr>
<tr><td>④ 삼각형의 내각의 합
</td><td>· $\angle ADB = 180^\circ - (\angle BAD + \angle B) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + 2\angle B)$
↑ $\triangle ADB = 180^\circ$ (평각) ↑ $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle A$
$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 90^\circ$
↑
$\triangle ABC = 180^\circ$
$\angle B = \angle C$</td></tr>
<tr><td>⑤ 평행선의 성질과 평각
</td><td>· 점 A를 지나는 $\overline{BC}$에 평행인 직선을 긋는다.
$\angle EAB + \angle BAD = \angle FAC + \angle CAD = 90^\circ$
↑ ↑
$\angle EAB = \angle B$, $\angle FAC = \angle C$ (동위각) $\angle EAF = 180^\circ$
$\angle B = \angle C$
$\angle BAD = \angle CAD$
→ $\angle BDA = 180^\circ - 90^\circ$
↑
동측내각의 합=180°</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>평가범주</th><th colspan="2">평가 단계 및 반응</th></tr>
<tr><td rowspan="4">근거수집
(I)</td><td colspan="2">· 전반적으로 타당하지 않은 근거를 제시하였지만 근거 수집을 시도함</td></tr>
<tr><td>① 시각적이고 직관적인 근거 (이등변 삼각형의 모양)</td><td>· 이등변 삼각형은 두 밑각이 같아서 반으로 접으면 겹쳐지므로 밑변과 수직으로 만난다.

· 이등변 삼각형의 두 변의 길이가 같으니까 밑변의 가운데가 되지 않으면 그 점에 모인 두 변은 길이가 전혀 같지 않다. 따라서 90˚ 가 될 수 밖에 없다.

· 이등분선이란 정 중앙을 가로지르는 선이며 ∠A는 ∠B, ∠C의 한 중앙위에 있다. 따라서 이등분선은 직각이다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">· 전혀 타당하지 않은 근거를 제시하였거나 시도하지 않음</td></tr>
<tr><td>· 결론을 근거로 제시</td><td>· 직선과 직선이 만나서 직각이 되므로 90 °이다
· ∠A를 이등분으로 나눈 선이 밑변 BC와 수직으로 만나기 때문에 90˚ 이다.

· 수직이등분선은 직각으로 이등분하는 거니까 이등분하면 2개의 삼각형은 합동이므로 90도이다

· 이등변 삼각형의 꼭지각의 이등분선은 이등변 삼각형을 이등분하며 삼각형의 내각의 합은 180˚ 이므로 90˚ 이다.

· 꼭지각이 밑변과 수직으로 만나기 때문에</td></tr>
</table>