

논문

오목벽면이 있는 밀폐공간에서 자연대류

박 태 선*

Natural Convection from the Concave Wall in a Square Enclosure

T. S. Park

The effect of concave curvature on the natural convection has been numerically studied using the higher-order finite difference method. The heating wall in a enclosure is approximated by a cosine function. The heat transfer coefficient is analyzed for three Rayleigh numbers and five amplitudes. For $Ra=10^8$ the separation and reattachment are observed on the adiabatic walls. The wall heat transfer are slightly changed by the increasing curvatures.

Key Words : 자연대류(Natural Convection),

고차정확도 유한차분법(Higher-Order Finite Difference Method)

1. 서 론

밀폐공간에서의 자연대류는 실내 공기조화, 태양열 집열판, 원자로의 단열벽 등의 많은 응용분야를 가지고 있기 때문에 지금까지 많은 연구가 이루어져 왔다. 이러한 응용기기에서 부력은 자연대류에 의한 유동의 구조를 특징짓는 가장 중요한 요소이다. 일반적으로 유동은 Rayleigh수, 형상조건 그리고 열 경계조건에 의하여 영향을 받는다. Rayleigh수가 작을 경우 정상상태의 대류열 전달이 관찰되고 임계값을 넘어서면 비정상 상태로 되는데 더욱더 커질 경우 유동은 완전난류로 발달한다[1].

열전달을 증가시키는 방법을 이해하기 위하여 고온벽에 표면 거칠기 있는 형상에 몇몇 연구자들은 관심을 가져왔다[2-4]. 이들의 연구를 살펴

보면 표면은 핀(fin)의 형상을 의도적으로 배열하거나 삼각함수를 이용하여 물결모양의 형상으로 변화시킨다. Watson과 Poots[2]은 수직벽에서 자연대류에 대한 삼각함수 형태의 벽면효과를 보고하였고, Rathish Kumar 등[4]은 다공물질로 가득찬 밀폐공간에서 물결표면의 자연대류를 분석하였다. 그들은 Rayleigh수를 다양하게 변화시키면서 한 개의 재순환 유동에서 여러개의 재순환 유동으로 변화되는 현상을 보여주었다. 이들 연구는 물결모양의 형상에 의해서 밀폐공간내에 존재하는 재순환 유동을 변화시킬수 있음을 지적한다.

본 연구는 고온벽의 형상변화에 따른 열전달 변화를 살펴보기 위하여 물결모양의 기본단위인 오목곡면을 선택하였다. 벽면의 형상은 cosine 함수의 1/2주기를 이용하여 진폭의 변화를 주었다. 수치해석 방법은 최근 난류유동 모사에 많이 사용되는 부분단계법(fractional step method)을 이용하였고 Lele[5]의 4차 compact 차분법을 이용하여 이산화하였다.

* 2002년 1월 9일 접수

* 정희원, 한국항공우주연구원 로켓엔진연구그룹

2. 지배방정식

모든 물성치가 상수인 비정상 비압축성 유체에 대한 무차원화된 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{1/2} \nabla^2 U_i + \theta \delta_{2i} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta U_j}{\partial x_j} = \left(\frac{1}{RaPr}\right)^{1/2} \nabla^2 \theta \tag{3}$$

여기서 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 이고 무차원화된 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau &= t(RaPr)^{1/2}x/L^2 \\ U_i &= u_i(RaPr)^{-1/2}L/x \\ \theta &= \frac{T - T_C}{T_H - T_C} \\ P &= \frac{(\rho + \rho g\nu)L^2}{\rho x^2 RaPr} \end{aligned} \tag{4}$$

Rayleigh수는 $Ra = \beta g(T_H - T_C)L^3/\nu\alpha$ 로 정의되고 Prandtl수는 $Pr = \nu/\alpha$ 로 표현된다. 여기서 t 는 시간, u_i 는 속도벡터, ρ 는 밀도, g 는 중력 가속도, β 는 열팽창계수, x 는 열확산계수, L 은 밀폐용기의 높이를 나타낸다.

3. 수치해석 방법

지배방정식의 차분화는 압력과 속도의 연결성이 우수한 엇갈림 (staggered) 격자계에서 수행하였다. 2차미분의 경우 대류항에 비해 미치는 영향이 작으므로 2차 정확도의 중심보간법을 사용하였다. 대류항은 Morinishi[6]의 에너지 보존원리와 Lele[5]의 compact차분법을 이용하여 차분화하였다.

대류항 $f = \partial f/\partial x_j$ 에 대하여 우선 1/2점에서 미분을 구한다음 자신으로 보간한다. 균일격자

의 계산영역 ($\Delta\xi=1$)에 대하여 3대각 행렬을 이용하는 compact차분법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &af_{i-1/2} + f_{i+1/2} + af_{i+3/2} \\ &= A(f_{i+1} - f_i) + B(f_{i+2} - f_{i-1})/3 \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 6차정확도인 경우 $\alpha = 9/62$, $A = 3(3 - 2\alpha)/8$, $B = (22\alpha - 1)/8$ 이고, 4차정확도에서는 $\alpha = 1/22$, $A = 3(3 - 2\alpha)/8$, $B = 0$ 이다. 이렇게 구한 $f_{i+1/2}$ 은 4차 중심보간법을 이용하여 i 점으로 보간한다.

$$f_i = \frac{1}{16}(-f_{i-3/2} + 9f_{i-1/2} + 9f_{i+1/2} - f_{i+3/2}) \tag{6}$$

시간에 대한 적분은 3차 Runge-Kutta법을 이용한다. 대류항은 외재적으로 처리하고 확산항은 내재적으로 처리한다. 본 연구의 수치해석은 고온벽이 곡면이기 때문에 직교좌표계에서 수행할 수 없다. 따라서 일반좌표계로 방정식을 전환하여야 한다. 일반좌표계에서의 엇갈림 격자계를 이용할 경우 종속변수의 선택이 매우 중요한데 본 연구는 Choi와 Moin[7]의 연구를 바탕으로 반변속도 (contravariant velocity) 성분과 관계가 있는 체적 유속을 (volume flux, $q^j = \gamma^j U_k$) 사용한다. x^j 가 cartesian좌표이고 y^j 가 일반좌표계를 나타내면 $C_k^j = \partial x^j/\partial y^k$, $\gamma_k^j = J(C_k^j)^{-1}$, $J = \sqrt{\|C_k^m C_k^m\|}$ 이 성립한다. 시간에 대한 적분방법은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{q}_i^k - q_i^{k-1}}{d\tau} &= \beta_k(\tilde{I}^k + I^{k-1}) \\ &+ \gamma_k E^{k-1} + \zeta_k E^{k-2} - 2\beta_k \nabla p^{k-1} \end{aligned} \tag{10}$$

$$q_i^k - \tilde{q}_i^k = -2\beta_k d\tau \nabla p^k \tag{11}$$

$$\nabla^2 p^k = \frac{\nabla \tilde{q}_i^k}{2\beta_k d\tau} \tag{12}$$

여기서 k 는 3차 Runge-Kutta법의 단계를 나타내고 $p^k = p^k - p^{k-1}$ 이다. I 는 내재적으로 처리되는 수직확산항을 나타내고 E 는 외재적으로 처리되는 교차확산항, 부력항 및 대류항을 나타낸다. $k=1$ 일 때 $k-1$ 은 이전시간을 의미하고

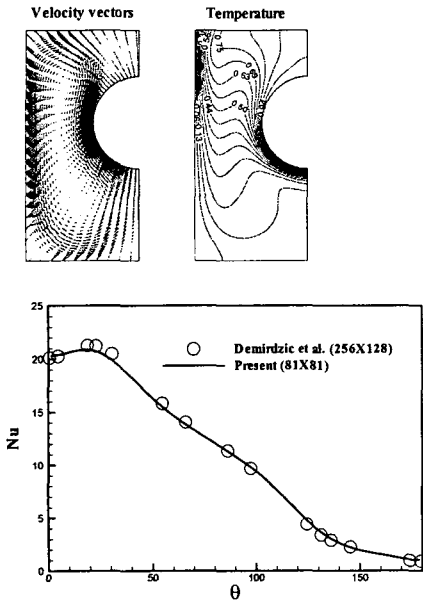


Fig. 1 Predicted velocity vectors, isotherms and Nu.

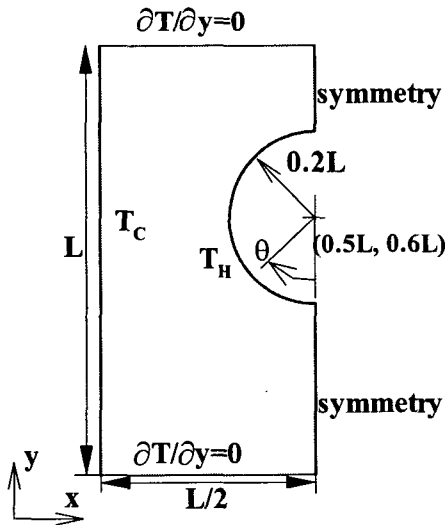


Fig. 2 Geometry and boundary conditions.

$k=3$ 일 때 다음시간에서의 해가 얻어진다. ∇ 는 1차 미분을 의미하며 사용된 계수는 $\beta_{1-3}=4/15, 1/15, 1/6,$ $\gamma_{1-3}=8/15, 5/12, 3/4$ 과

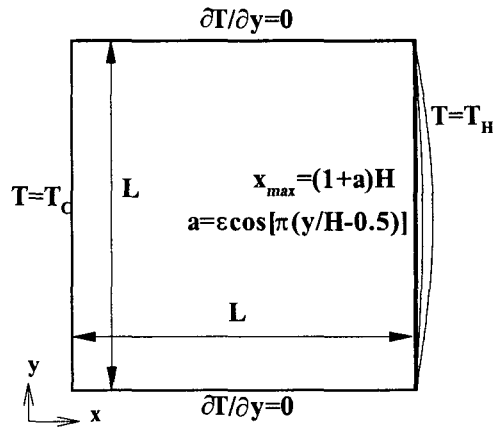


Fig. 3 Flow configuration and boundary conditions.

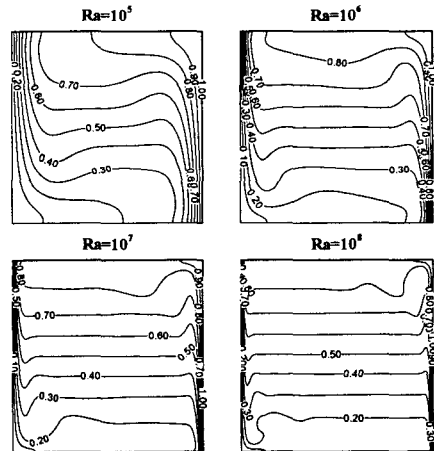


Fig. 4 Temperature fields with Rayleigh number.

$\xi_{1-3}=0, -17/60, -5/12$ 의 값을 가진다. 압력방정식의 2차원 포아송방정식은 V-cycle을 이용한 다중격자법으로 수렴을 가속화시켰다.

4. 검증 해석

본 해석을 수행하기에 앞서 개발된 코드를 검증하기 위하여 일반적인 형상조건에서 자연대류

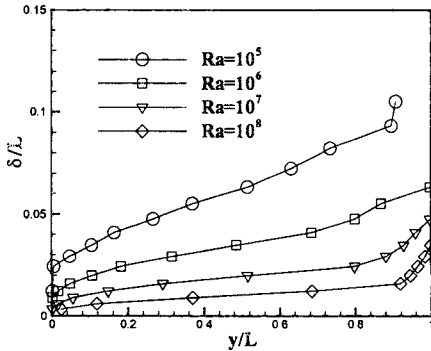


Fig. 5 Predicted thickness of boundary layer along the hot wall.

와 고온벽이 평면인 경우 Ra수에 따른 열유동 변화에 대한 수치해석을 수행하였다. 일반적인 형상 조건은 Demirdzic등[8]의 연구와 비교하였다. 비직교좌표계에서 자연대류 현상은 Demirdzic등[8]의 연구에서 Fig. 1과 같은 형상을 선택하였다. 계산조건은 반원형의 고온벽을 가진 형상으로 $Ra=10^6$ 과 $Pr=0.1$ 이다. 격자수는 81×81 에서 수행된 결과를 Fig. 2에 나타내었다. 반시계방향의 거대와유동이 생김을 알수 있고 열전달계수의 비정상성은 발견되지 않았다. 예측된 열전달계수 또한 Demirdzic등[8]의 연구결과와 잘 일치하고 있다. 이 결과는 고차정확도 차분법을 이용한 현재코드가 비직교좌표계에서 올바른 예측능을 보여주는 것으로 생각된다.

본 연구대상인 사각형 밀폐공간에서 고온벽이 평면인 경우 격자수 Ra수를 변화시켜가면서 81×81 에 대한 수치해석을 수행하였다. Fig. 3에서 보면 왼쪽 벽면은 낮은 온도 T_C 로 유지되고 오른쪽 벽면은 T_H 로 유지된다. 반면에 위 아래 벽면은 단열조건이다. $\epsilon=0.0$ 와 $Pr=0.7$ 에서 Ra수를 $Ra=10^5, 10^6, 10^7, 10^8$ 로 변화시켰다. 계산결과를 Fig. 4에서 보면 기존의 연구결과[10]와 유사한 특징을 보여주고 있다. Ra수가 증가함에 따라서 대류에 의한 열전달의 영향이 강해지고 있고 이에 따른 열경계층의 두께도 감소하고 있음을 알 수 있다. $Ra=10^6$ 일 때 고온

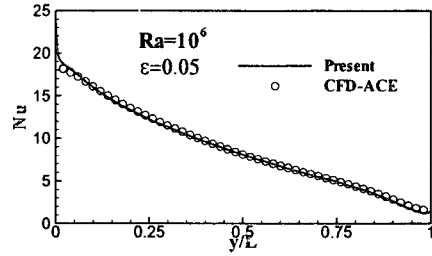


Fig. 6 Predicted Nu along the hot wall ($Ra=10^6, \epsilon=0.05$).

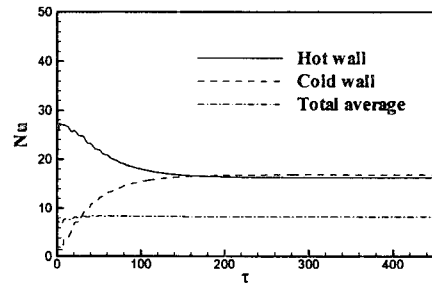


Fig. 7 Time history of the predicted Nu ($Pr=0.7, \epsilon=0.1, Ra=10^7$).

벽에서 면적평균된 Nu수는 8.8226으로서 Kwak과 Hyun[9]의 결과 8.8107와 비슷한 결과를 보여주고 있다. 모든 경우에서 의미있는 비정상적인 유동은 관찰되지 않았으며 기존의 연구결과처럼 초기영역을 지나면 정상상태로 수렴해감을 보여주었다. 계산된 결과를 이용하여 고온벽에서 경계층의 변화를 Fig. 5에 나타내었다. 여기서 δ/L 은 수직방향의 속도가 최대 (V_{max})로 되는 점에 대한 벽면으로부터의 거리이다. Ra수가 증가할수록 대류항의 크기가 증가하기 때문에 경계층의 두께는 감소하고 있고 대략적으로 $\delta/L \sim 1.132/Ra^{0.25}$ 의 관계를 유지하고 있다. 이는 기존의 연구결과[11]와 일치하는 결과로서 본 계산의 타당성을 보여주는 것이다.

5. 결과 및 토론

본 계산에 대한 형상 및 경계조건은 Fig. 3에

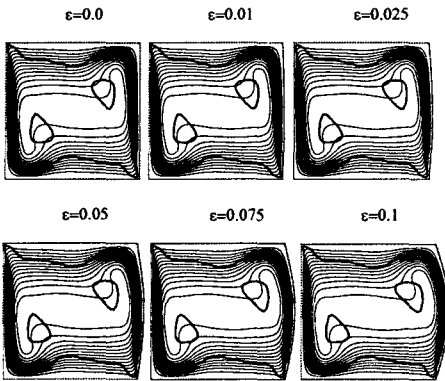
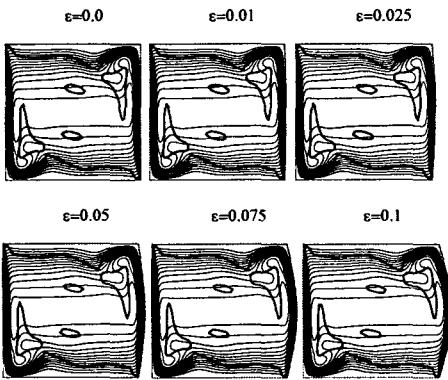
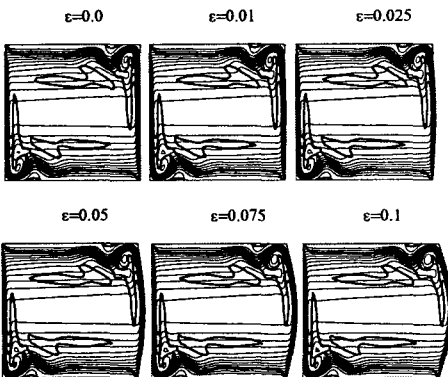
(a) $Ra = 10^6$ (b) $Ra = 10^7$ 

Fig. 8 Predicted streamlines and $\omega_z = 0$ line. (c) $Ra = 10^8$

나타내었다. 오목면의 형상은 cosine 함수를 이용하여 $x_{\max} = (1 + \epsilon \cos[\pi(y/H - 0.5)])H$ 로 결정되었다. 오목면의 최대깊이는 Fig. 5의 결과를 이용하여 δ/L 에 대하여 변화량이 심하지 않은 $\epsilon = 0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1$ 로 변화시켰다. 이러한 조건에서 Ra수의 영향을 알아보기 위하여 $Ra = 10^6, 10^7, 10^8$ 로 변화시켰다. 본 계산을 수행하기 앞서 상용코드와의 비교해석을 수행하였다. $Ra = 10^6$ 과 $\epsilon = 0.05$ 에 대해서 CFD-ACE[12]와 현재코드의 결과를 Fig. 6에 비교하였다. 고온벽에서 예측된 열전달계수는 잘 일치하고 있다. 이것은 개발된 코드를 이용하여 오목곡면 해석시 물리적으로 타당한 해를 얻을 수 있음을 보여주는 것이다.

주기적인 비정상성의 존재를 알아보기 위하여 Fig. 7에 시간변화에 따른 벽면에서 면적평균된 열전달계수를 나타내었다. 열전달계수

(Nu)는 $Nu = \frac{1}{A} \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial n} ds$ 로 정의 되었다. 여

기서 n은 벽면의 수직방향이고 s는 벽면의 접선 방향을 나타낸다. 그리고 A는 적분된 전체면적을 표시한다. 그림에서 보듯이 비정상적인 거동은 예측되지 않았고 일정한 열전달계수로 수렴해감을 볼 수 있다. 이러한 거동은 계산에 사용된 모든조건에서 유사하게 나타났다. 계산조건의 Ra수 영역에서 오목곡률에 의한 열전달계수의 주기적인 비정상성은 유도되지 않았지만 내부유동의 변화로 열전달계수는 차이를 보였다.

이런 변화를 자세히 살펴보기 위하여 곡률변화에 따른 유선분포를 $\omega_z = 0$ 위치와 함께 Fig. 8에 나타내었다. $\omega_z = \partial V^*/\partial x - \partial U^*/\partial y$,

$U^* = U/U_o$, $V^* = V/U_o$ 로 정의되는데

$U_o = \sqrt{Ra\nu^2/PrL^2} = \sqrt{RaPr\nu^2/L^2}$ 를 이용하였다.

그림에서 보면 유선의 분포는 곡률에 의해서 좌우로 이완되는 효과와 함께 고온벽의 끝단에서 반시계방향으로의 변화가 약간 증가함을 알 수 있다. 또한 고온벽쪽의 $\omega_z = 0$ 영역을 보면 곡률에 의해서 고온벽쪽으로 이동하지만 기본적인 형태는 Ra수 증가에 따라서 큰 변화를 보이지 않았고 또한 유동의 변화도 $\epsilon = 0.0$ 와 차이가 크지 않게 나타나고 있다. 고온벽에서

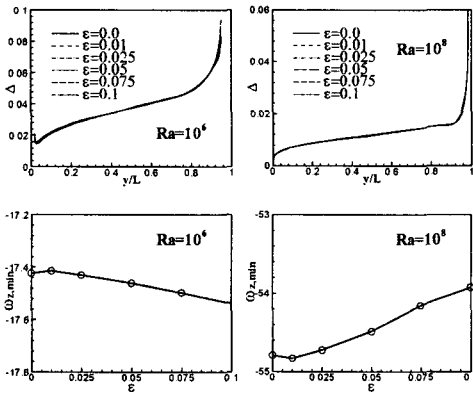


Fig. 9 Normal distance of $\omega_z=0$ from the hot wall and the minimum of vorticity.

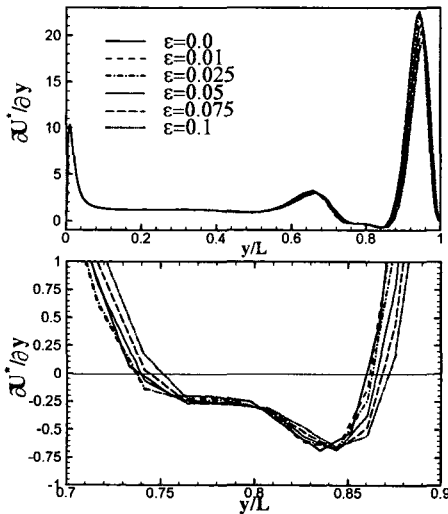


Fig. 10 Predicted velocity gradients along the adiabatic wall ($Ra=10^8$).

의 상황을 자세히 살펴보기 위하여 $\omega_z=0$ 인 위치의 수직거리(Δ)를 Fig. 9에 나타내었다. $Ra=10^6$ 일 때 곡률의 변화에 따라서 거의 변화가 없음을 보여주고 있다. 이것은 곡률의 변화가 심하지 않을 경우 고온벽면에서의 경계층의 발달은 거의 일정하게 나타남을 보여주는 것이다. 이상의 결과는 열유동의 비정상성이 존재하지 않을 경우 오목곡률에 의한 유동의 기본적인 거동은 크게 변화하지 않음을 알 수 있다.

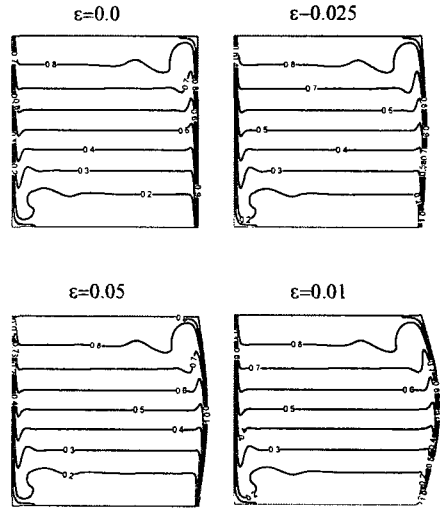


Fig. 11 Predicted isotherms at $Ra=10^8$.

수 있다. 그러나 와도(ω_z)의 최소값은 곡률에 의해서 감소하거나 증가하는 경향을 보였는데 $Ra=10^6$ 일 경우 가열벽의 끝단에서 유동의 변화가 없이 벽면을 따라서 거대 와유동을 형성하지만 $Ra=10^8$ 의 경우 수직벽면에 충돌하여 재순환유동을 형성하기 때문에 나타난 결과로서 Fig. 10에서 보면 재순환유동의 변화를 볼 수 있다. 오목곡률의 증가에 따라서 재순환유동은 고온벽쪽으로 이동하고 있지만 그 크기는 거의 변화가 없음을 알 수 있다. 즉 고온벽의 상층부에서 수직으로 충돌한 후 발달하는 평면인 경우와 달리 곡률이 존재하면 곡률에 의해 결정되는 충돌각도를 가지게 된다. 이것은 평면인 경우에 비하여 단열벽으로 따라서 발달하는 속도와 반시계방향의 와도증가로 인하여 단열벽에서 박리가 빨리 발생하는 것으로 생각된다. 그러나 유동을 발생하는 부력에 의한 운동량 생성량은 Ra 수로 고정되고 형상의 변화정도가 작기 때문에 재순환유동의 크기는 크게 변하지 않게 나타나고 있다.

Fig. 11은 $Ra=10^8$ 에서 곡률변화에 따른 등온선 분포를 보여주고 있다. 앞선 그림에서 보였듯이 유동장의 변화정도가 작기 때문에 온도의 변화는 심하지 않고 단지 고온벽의 상층부

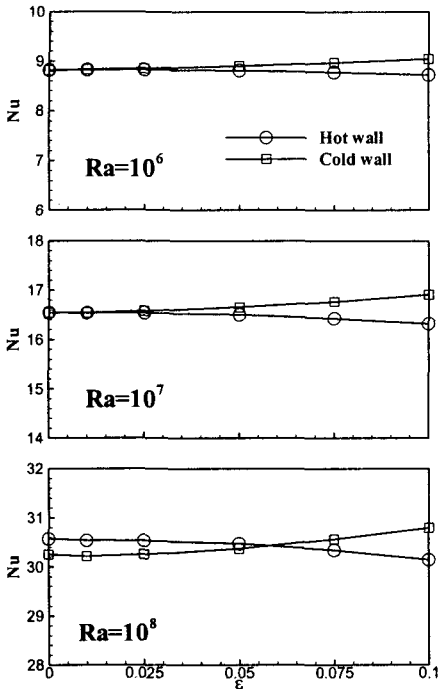


Fig. 12 Effects of Nu on the ϵ variation.

에서만 곡률의 효과에 의한 변화를 보이고 있다. 즉 고온벽의 상층부에서 등온선의 굴곡정도만 약간 차이가 나타나고 있다. 열전달의 영향을 자세히 살펴보기 위하여 고온벽과 저온벽에서 면적평균된 Nu수를 Fig. 12에 나타내었다. 고온벽에서는 오목곡률의 증가에 따라서 Nu수가 감소하고 있지만 저온벽에서는 Nu수가 증가하고 있다. 곡률이 심할수록 그 차이는 커지고 있다. 고온벽에서 보면 오목곡률의 증가는 가열면의 증가를 나타내고 결과적으로 유체가 가열되는 길이의 증가로 온도구배의 감소를 초래하여 열전달계수가 감소하고 있다. 그렇지만 저온벽에서는 오목곡률에 의한 반시계방향의 와도증가로 인하여 유동속도의 증가로 온도구배의 상승과 함께 열전달계수가 증가하고 있다. 이러한 현상은 고온벽 상층부에 재순환 유동이 존재하는 $Ra=10^8$ 인 경우 또한 같은 경향을 보이지만 저온부의 열전달계수가 고온부보다 커지기 위해서는 오목곡률의 진폭이 $\epsilon=0.06$ 이상이 되어야 함을 볼 수 있다.

전체면적에 평균된 열전달계수에 대하여 오목

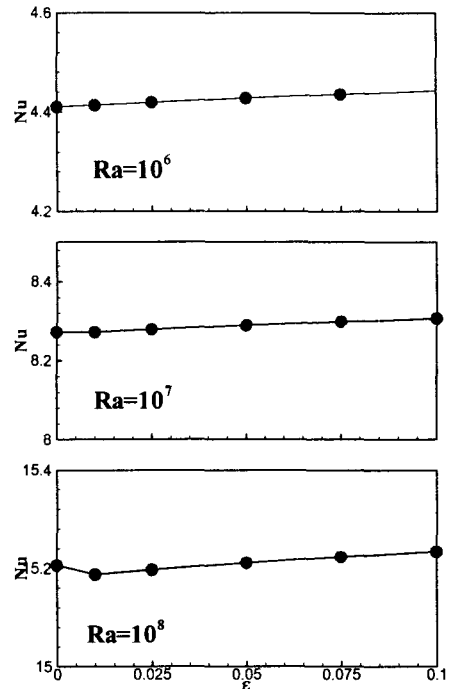


Fig. 13 Effects of the averaged Nu on the ϵ variation.

곡률의 영향을 살펴보기 위하여 Fig. 13에 Nu수를 나타내었다. 열전달계수는 단열벽의 존재로 Fig. 11에 비해서 절반정도의 크기를 보이고 있다. 곡률의 효과는 고온벽과 저온벽에서 열전달에 반대로 영향을 주지만 오목곡률에 의한 전체적인 효과는 열전달계수를 증가시키는 경향을 보이고 있다. 그러나 오목곡면에 의한 공진의 효과가 없기 때문에 그 효과는 아주 작게 나타나고 있다. 최대곡률인 $\epsilon=0.1$ 인 경우 $Ra=10^6$ 일 때 0.8% $Ra=10^7$ 일 때 0.5% $Ra=10^8$ 일 때 0.2%로 나타났다. 이 결과는 열경계층 정도의 크기로 가열벽에 오목곡률이 주어질 경우 열전달은 증가하지만 그 정도는 아주 작음을 보여주는 것이다. 이러한 곡률효과는 블록곡면이나 물결모양의 형상변화를 주고자 할 경우 중요한 정보를 제공할 것으로 생각되며 공진의 효과를 보기 위한 형상변화를 찾는 연구가 추후 계속해서 진행되어야 한다.

6. 결 론

오목곡면이 있는 밀폐공간에서의 자연대류 현상을 해석하기 위하여 일반좌표계에 고차정확도의 대류항차분법을 적용한 수치해석코드가 개발되었다. 코드는 반원형의 가열벽을 가진 형상에 대하여 적용한 결과 기존의 연구결과와 잘 일치하였다. 곡률의 변화량을 결정하기 위하여 곡률이 없는 경우 Ra수를 변화시켜가면서 열경계층의 변화를 살펴보았다. 오목면의 형상은 cosine 함수에 의해서 결정되었고 오목면의 최대깊이는 $\epsilon = 0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1$ 로 선택하였다. 또한 Ra수는 $Ra = 10^6, 10^7, 10^8$ 로 변화시켰다. 선택된 범위에서 오목곡률에 의한 열경계층의 공진현상은 발견되지 않았지만 와도의 크기는 곡률에 의해서 변화되었다. 곡률의 증가함에 따라서 열전달계수는 저온벽에서 증가하였고 고온벽에서는 감소하였다. 또한 전체적인 열전달계수는 곡률이 최대 ($\epsilon = 0.1$)일 때 Ra수의 증가에 따라서 증가율이 감소하였다. 결과적으로 고온벽에서 오목곡률에 의한 형상변화는 곡률증가에 따라서 열전달계수를 약간 증가시키지만 공진효과가 없기 때문에 그 영향이 아주 작게 나타났다.

참고문헌

- [1] Xin, S. and Le Quere, P., "Direct Numerical Simulations of Two-Dimensional Chaotic Natural Convection in a Differentially Heated Cavity of Aspect Ratio 4," *J. Fluid Mech.*, **304** (1995), p.87-118.
- [2] Watson, A. and Poots, G., "The Effect of Sinusoidal Protrusions on Laminar Free Convection Between Vertical Walls," *J. Fluid Mech.*, **49** (1971), p.33-48.
- [3] Murthy, P.V.S.N., Rathish Kumar, B.V. and Singh, P., "Natural Convection Heat Transfer from a Horizontal Wavy Surface in a Porous Enclosure," *Numerical Heat Transfer. A*, **31** (1997), p.207-221.
- [4] Rathish Kumar, B.V., Murthy, P.V.S.N. and Singh, P., "Free Convection Heat Transfer from an Isothermal Wavy Surface in a Porous Enclosure," *Int. J. Num. Meth. Fluids.*, **28** (1998), p.633-661.
- [5] Lele, S.K., "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution," *J. Computational Phys.*, **103** (1992), p.16-42.
- [6] Morinishi, Y., "Conservative Properties of Finite Difference Schemes for Incompressible Flow," *Annual Research Briefs-1995*, CTR, NASA Ames/Stanford Univ., p.121-132.
- [7] Choi, H. and Moin, P., "Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over Riblets," *J. Fluid Mech.*, **255** (1993), p.503.
- [8] Demirdzic, I., Lilek, Z. and Peric, M., "Fluid Flow and Heat Transfer Test Problems for Non-Orthogonal Grids: Bench-Mark Solutions," *I. J. Numerical Methods in Fluids*, **15** (1992), p.329-354.
- [9] Kwak, H.S. and Hyun, J.M., "Natural Convection in an Enclosure Having a Vertical Sidewall with Time-Varying Temperature," *J. Fluid Mech.*, **329** (1996), p.65-88.
- [10] Ravi, M.R., Henkes, R.A.W.M. and Hoogendoorn, C.J., "On the High-Rayleigh-Number Structure of Steady laminar Natural-Convection Flow in a Square Enclosure," *J. Fluid Mech.*, **262** (1994), p.325-351.
- [11] Patterson, J. and Imberger, J., "Unsteady Natural Convection in a Rectangular Cavity," *J. Fluid Mech.*, **100** (1980), p.65-86.
- [12] CFD-ACE ver.5.0, *CFD Research Corporation*.