

2상유동장 내 3차원 밀도 분포 재건을 위한 토모그래피 기법의 성능 비교 분석

Comparison and Analysis of Tomography Methods for Reconstruction of Three-dimensional Density Distributions in Two-phase Flows

고한서^{*,†}, 김용재^{**}
 Han Seo Ko^{*,†} and Yong-Jae Kim^{**}

초 록 Algebraic reconstruction technique (ART)과 multiplicative algebraic reconstruction technique (MART)이라는 토모그래피 방법을 이용하여 2상유동에서 기포의 거동을 비침투적으로 분석하였다. 먼저, 컴퓨터 합성 영상장으로 환상유동과 기포유동을 제작하여 2차원 단면의 재건을 시도하였다. 2상유동의 보다 정확한 결과들을 얻기 위하여 두가지 토모그래피 방법이 비교되었다. 그리고, 2상유동에서 기포의 거동을 3차원으로 분석하기 위하여 2개와 3개의 기포가 존재하는 3차원 합성 영상장으로부터 2차원 단면에서 보다 정확한 결과를 보인 MART 재건법에 의해서 밀도 분포 해석을 수행하였다.

주요용어 : 토모그래피, 산술재건법(ART), 곱셈 산술재건법(MART), 2상유동, 기포유동, 환상유동

Abstract Bubble behaviors in two-phase flows have been analyzed by tomography methods such as an algebraic reconstruction technique (ART) and a multiplicative algebraic reconstruction technique (MART). Initially, a bubbly flow and an annular flow have been investigated by cross-sectional view using computer synthesized phantoms. Two tomography methods have been compared to obtain more accurate results of the two-phase flows. Then, reconstruction of three-dimensional density distributions of phantoms with two and three bubbles have been accomplished by the MART method which provided the better results for the two-dimensional reconstructions accurately to analyze the bubble behaviors in the two-phase flow.

Keywords: tomography, algebraic reconstruction technique, multiplicative algebraic reconstruction technique, two-phase flow, bubbly flow, annular flow

1. 서 론

2상유동 현상은 보일러, 응축기, 건조기, 히트 파이프 등과 같은 여러 종류의 공기 조화 장치나 냉동 장치 등에서 나타나며, 따라서 기체-액체 2상유동에서 기포의 수, 크기, 위치, 또는 거동 등의 정확한 분석에 대한 요구가

많은 산업 공정에서 증대되고 있다. 2상유동 분석에 있어서 기존의 2차원 해석법으로는 한 단면의 밀도나 온도 분포에 대해서 계산을 수행하였으나 본 연구에서는 3차원 분석법을 개발하여 실제 기포의 움직임을 보다 입체적으로 정확하게 파악하는 데 기여하였다.

토모그래피(tomography) 계산법은 지난 수년간 개발되

어 왔다. 처음에는 의학적으로 이미지 합성에 적용하기 위해 여과 역 투사 기법(filtered back projection technique)과 같은 수학적 변환법[1]이 개발되었고 그 후 Fourier 영역법과 동시에 역 투사 기법(back projection technique)[2]이 계산에 이용되었으며 계속해서 다양한 전환 기법과 그와 관계된 여과 함수(filtered function)[3]가 개발되었다. Santoro 등[4]은 Fourier 영역법과 역 투사 기법을 매탄 제트의 농도(concentration)를 구하기 위해 사용하였다. Fourier 영역법은 단면의 토모그래피(tomography) 방법으로 비교적 효과적이거나 Fourier 변환을 위해 상당히 많은 수의 투사 광선과 각도를 필요로 하며[5] 따라서 실제 실험을 해야되는 실용적인 측면에서 정확한 결과를 얻기가 어려운 경우가 있다. 이 어려움을 극복하기 위해 제한된 각도에서의 토모그래피(tomography) 방법이 개발되어 왔고 그 중에서 가장 많이 쓰이는 방법이 algebraic reconstruction technique (ART)[6] 방법이다.

토모그래피(tomography) 방법은 레이저를 이용하여 열 유동을 비침투적으로 측정하고 그 투사 데이터를 이용하여 정량적으로 온도나 밀도를 계산할 때 효과적인 도구이다[7]. 2상유동의 투사데이터는 디지털 스펙클 시스템(digital speckle system)[8]을 이용하면 Fig. 1에서 보이는 것과 같이 입사 광선에 대한 수직 방향의 굴절률을 입사 광선 방향으로 적분한 것으로 표현된다. Gladston-Dale 관계식[9]을 이용하면 굴절각 α 를 밀도장 구배의 광선 방향 적분으로 얻을 수 있다.

$$\Psi_{SP}(s, \theta) \cong \alpha = G \int \frac{\partial \rho}{\partial s} dt \quad \dots\dots\dots (1)$$

여기서 Ψ_{SP} 는 디지털 스펙클 분석법의 투사데이터, α 는 입사 광선의 굴절각, ρ 는 밀도장, s 는 입사 광선에 수직, t 는 입사 광선에 평행한 축이고 G 는 Gladston-Dale 상수이다.

Mach-Zehnder 간섭계의 투사 데이터인 Ψ_{IF} 는 측정 유동장을 지나지 않는 기준 광선과 지나는 변형 광선 사이의 길이의 차이에 의해 결정된다. 기준 광선으로부터의 기준 fringe와 교란된 fringe의 차이는 밀도장의 광선 방향 적분으로 표현된다[10].

$$\Psi_{IF} = \frac{1}{\lambda} \int (n - n_{ref}) dt = \frac{G}{\lambda} \int (\rho - \rho_{ref}) dt \quad \dots\dots\dots (2)$$

여기서 λ 와 n 은 레이저의 파장 길이와 굴절률을 나타

낸다. 따라서, Mach-Zehnder 간섭계는 움직인 fringe가 밀도 자체의 적분에 의해 결정되고, 반면에 디지털 스펙클 시스템의 굴절각은 밀도 구배의 광선 방향 적분에 의해 표현된다는 차이가 나타난다. 식 (1)과 식 (2)를 결합하면 디지털 스펙클 시스템과 간섭계 사이의 관계를 나타낼 수 있다[11].

$$\frac{\partial \Psi_{IF}}{\partial s} = \frac{G}{\lambda} \frac{\partial}{\partial s} \int (\rho - \rho_{ref}) dt = \frac{G}{\lambda} \int \frac{\partial \rho}{\partial s} dt = \frac{1}{\lambda} \Psi_{SP} \quad \dots\dots\dots (3)$$

따라서, 투사 평면에서 s 축 방향으로 식 (3)을 적분하면 디지털 스펙클의 투사 데이터로부터 간섭계의 투사 데이터를 얻을 수 있다.

$$\Psi_{IF} = \frac{1}{\lambda} \int \Psi_{SP} ds \quad \dots\dots\dots (4)$$

식 (4)는 디지털 스펙클에서 s 방향으로의 광선 굴절각 Ψ_{SP} 의 적분은 간섭계의 fringe 이동량 Ψ_{IF} 과 같음을 보여준다. 그러므로 fringe 이동량과 같은 Mach-Zehnder 간섭계로부터의 결과들은 굴절각과 같은 디지털 스펙클에서의 결과들과 비교될 수 있다.

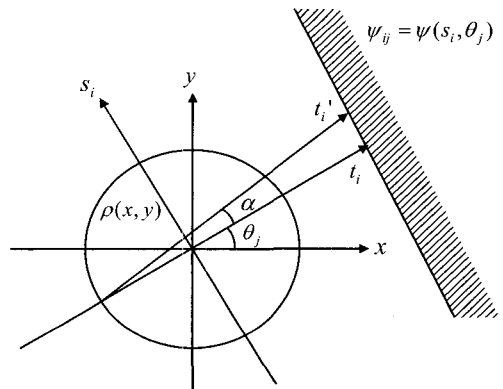


Fig. 1 Cross-sectional density field $\rho(x,y)$ and its projection Ψ_{ij} for digital specklegram

식 (1)과 식 (2)의 굴절각 Ψ_{SP} 과 fringe 이동량 Ψ_{IF} 은 토모그래피 변환법[12]에 의해 비대칭 모양의 실제 밀도장 $\rho(x, y)$ 으로 재건될 수 있다. 본 연구에서는 토모그래피 방법중 하나인 algebraic reconstruction technique (ART)과 multiplicative algebraic reconstruction technique (MART)[13]이 단면의 2상유동을 계산하기 위해 시행되고

비교되었다. 식 (1)의 투사 데이터와 밀도장과의 관계는 대수적이지 않기 때문에 종래의 ART 또는 MART 방법으로 식 (1)을 밀도장을 계산하기 위해 변환할 수 없다. 따라서 비대수적인 디지털 스펙클 데이터들은 식 (4)에 의해 대수적인 간섭계 데이터로 변환되어서 ART나 MART에 의해 계산될 수 있도록 투사면에서 수치적으로 적분되어야 한다. 본 연구에서는 단면의 2상유통에 대해서 더욱 정확한 결과를 보인 MART 방법을 선택하여 제한된 각도에서 3차원 기포 유통을 분석하기 위하여 이용하였다.

2. 토모그래피 재건 알고리즘: Algebraic Reconstruction Technique (ART)과 Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique (MART)

3차원 밀도장은 계산된 변수들에 의해서 기초함수의 연속으로 표시될 수 있으며, 토모그래피는 각각의 기초함수가 하나의 변수 (통상 고정된 간격에 대한 높이)에 의해 정의되는 선형적인 경우에 결과를 구하기 위한 최적화 작업을 수행한다. 각각의 기초함수의 위치는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{f}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{JKL} O_i b(x-x_i, y-y_i, z-z_i) \quad \dots\dots (5)$$

여기서 \hat{f} 는 재건될 장을 나타내는 함수이고, b 는 고정된 위치인 (x_i, y_i, z_i) 에 위치한 기초함수의 일반형이며 O_i 는 (x_i, y_i, z_i) 에 중심을 둔 i 번째 기초함수의 높이 상수이다. (x_i, y_i, z_i) 는 x 방향으로 같은 간격을 갖는 J 개의 점들과 y 방향의 K 개의 점들, 그리고 z 방향의 L 개의 점들을 포함하는 3차원 육면체 배열을 형성한다. 그러므로, 재건 알고리즘에 의해서 구해질 수 있는 상수들의 총수는 $J \times K \times L$ 개이다. Cubic B-spline 함수와 같은 부드러운 기초함수를 사용하면 square-pixel 기초함수보다 적은 수의 미지상수를 가지고도 상대적으로 부드럽고 정확한 재건을 할 수 있다. 이들 미지상수들의 최적화된 해는 계산 중간 과정의 목표함수 \hat{f} 의 가상 투사 데이터 $\hat{\Psi}$ 와 실제장 f 의 투사 데이터 Ψ 의 편차를 최소화함으로써 구해야 한다.

기초함수의 선택에 대한 비교 연구[14]는 x 변수에 대해 다음과 같이 표현할 수 있는 cubic B-spline의 사용을 제안하고 있다.

$$b_x(x-x_i) = \begin{cases} \frac{(2\Delta_x - |x-x_i|)^3 - 4(\Delta_x - |x-x_i|)^3}{4\Delta_x^3} & \text{for } |x-x_i| < \Delta_x \\ \frac{(2\Delta_x - |x-x_i|)^3}{4\Delta_x^3} & \text{for } \Delta_x \leq |x-x_i| < 2\Delta_x \\ 0 & \text{for } |x-x_i| \geq 2\Delta_x \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

여기서 Δ_x 는 격자 간격이다. b_x 는 $x = x_i$ 일 때 1, $x = x_i \pm 4x$ 일 때 0.25, 그리고 $x = x_i \pm 2\Delta_x$ 와 그 이후에서 0이다. y 와 z 방향 변수도 이와 같고, 따라서 3차원 기초 함수는 이 셋의 곱, 즉 $b(x-x_i, y-y_i, z-z_i) = b_x(x-x_i) \times b_y(y-y_i) \times b_z(z-z_i)$ 이다.

투영된 데이터 Ψ_{PQZR} 는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\Psi_{PQZR} = \sum_{j=1}^{JKL} O_j \int b(x-x_i, y-y_i, z-z_i) dt \quad \dots\dots (7)$$

여기서 $PQZR = 1, 2, 3, \dots, PQZR$ 은 한 평면에서 투사 데이터의 각도수가 P , 상하로 다른 각도를 주었을 때 투사 각도수가 Q , z 방향 평면의 수가 Z , 그리고 한 각도에서 광선의 수가 R 일 때 전체 광선의 총수이다. 식 (7)은 다음과 같은 행렬 형태로 표현될 수 있다.

$$\Psi = WO \quad \dots\dots (8)$$

여기서 Ψ 는 측정된 투사 데이터이고 W 는 투사 행렬이며 O 는 재건될 벡터이다. $PQZR$ 개의 선형 방정식 (각 방정식당 한 개의 측정된 투사 광선)을 계산하는 것이 JKL 개의 미지수에 대한 ART나 MART와 같은 급수 전개 기법의 목표이다.

ART 알고리즘은 기본적으로 결과 벡터 O 를 얻기 위한 토모그래피 재건의 특수한 문제에 적용되는 선형 방정식 (식 (8)) 시스템의 반복적인 해법이다. ART는 측정된 투사 데이터와 계산된 가상의 투사 데이터와의 편차의 피드백 정보를 사용하여 결과 상수 벡터 O 를 다음과 같은 대수적 갱신을 통해 반복적으로 최적화한다.

$$O^{q+1} = O^q + \frac{\Psi_i - \langle w_i, O^q \rangle}{\left(\sum_{j=1}^{JKL} w_{i,j} \right)^2} w_i, \quad \sum_{j=1}^{JKL} w_{i,j} \neq 0 \quad \dots\dots (9)$$

여기서 $\langle x, y \rangle$ 는 x 와 y 의 내적을 나타내고 q 는 반복횟수를 가리키며 w_i 는 투사 행렬의 i 번째 열을, w_{ij} 는 투사 행렬의 i 번째 열과 j 번째 행 요소를, 그리고 Ψ_i

는 그에 해당하는 측정된 광선의 투사 데이터를 나타낸다. 만약 $\sum_{j=1}^{M_i} w_{i,j} = 0$ 이면 O_i 는 변하지 않는다. 이 알고리즘은 수렴에 도달할 때까지 각각의 광선에 기초한 반복을 수행한다. 결과 상수들은 반복할 때마다 0보다 작은 상수들은 의미가 없으므로 0으로 바꾸어준다. 본 연구에서 ART를 수행하기 위한 초기 상수 O^0 는 $J \times K \times L$ 차원의 영행렬이다.

MART는 가상 투사 데이터 $\hat{\Psi}$ 와 측정된 투사 데이터 Ψ 의 편차가 결과 상수들에 분배되는 방법에 있어서만 ART와 다르다. MART는 다음과 같이 곱셈 수정 벡터 C 의 요소 C_i 를 사용한다.

$$O_i^{q+1} = C_i^q O_i^q$$

$$C_i^q = \begin{cases} 1 - 0.5 W_i^q \left(1 - \frac{\Psi_i}{\hat{\Psi}_i} \right) & \text{for } \hat{\Psi}_i \neq 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

여기서 q 는 q 번째 반복을 그리고 W_i 는 가중요소를 나타낸다. MART를 사용하는 장점중의 하나는 음수가 아닌 스칼라를 재건하는 데 있어서 음수가 아닌 결과 데이터를 보장한다는 것이다.

이 알고리즘들의 갱신은 원칙적으로 간섭계와 같이 필드의 값들을 직접 적분해서 투사 데이터를 얻는 대수적인 투사 데이터 값들에 대해서만 가능하다. 따라서, 디지털 스펙클과 같이 장의 기울기를 적분한 투사 데이터 Ψ_{SP} 는 식 (4)에 의해 간섭계의 투사 데이터 Ψ_{IF} 로 변환한 후 ART나 MART를 사용하면 밀도나 온도장과 같은 결과를 재건할 수 있다.

3. 컴퓨터 합성 기준 영상과 재건 오차

3차원 2상유동을 재건하기에 앞서 2차원(단면) 2상유동으로부터 ART와 MART를 비교 분석하기 위하여 두 개의 다른 컴퓨터 합성 영상이 제작되었다. 첫 번째 영상은 환상유동이라고 불리며 다음과 같이 표현된다.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & [x^2 + (y - 0.05)^2]^{1/2} \leq 0.4 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

Fig. 2 (a)에서와 같이 식 (11)은 원형 액체 유동 안에

하나의 큰 기포를 구성하고 있다. 이 표준화된 밀도장 영상에 대해 x 축과 y 축은 -0.5부터 0.5까지 고정되어 있다.

두 번째 영상은 2상유동의 5개의 기포로 구성되어 있으며 각각의 기포의 경계는 다음과 같은 타원으로 표현되어 있다 (Fig. 2 (b)).

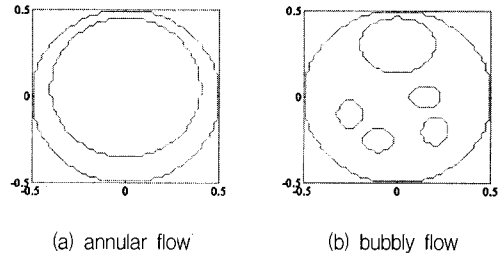


Fig. 2 Computer synthesized two-dimensional two-phase phantom fields

$$f(x, y, A_j) = \begin{cases} 0, & \left(\frac{x - x_j}{a_j} \right)^2 + \left(\frac{y - y_j}{b_j} \right)^2 \leq c_j \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

여기서 $A_j = (x_j, y_j, a_j, b_j, c_j)$ 이고, 이 식의 요소들은 식을 구성하는 타원의 중심의 위치 좌표와 주축, 보조축의 길이에 해당된다. 기준 영상의 A_j 는 다음과 같이 표시된다.

$$A_j^* = (A_1; A_2; A_3; A_4; A_5)$$

$$= (0.0, 0.3, 0.2, 0.16, 1.0;$$

$$-0.25, -0.1, 0.07, 0.08, 1.0;$$

$$-0.1, -0.25, 0.08, 0.07, 1.0;$$

$$0.2, -0.2, 0.07, 0.08, 1.0;$$

$$0.15, 0.0, 0.08, 0.07, 1.0) \dots\dots\dots (13)$$

여기서 위 첨자 *는 기준장을 의미하며 전부 타원으로 합성되었다. 표준장의 임피던스는 기체의 밀도가 액체보다 작으므로 기포 안쪽 구역에서는 0이고 기포 밖 액체에서는 1로 표준화하여 계산하였다. Fig. 3에서 보이는 것과 같이 일반적으로 환상유동은 유속의 고속 2상유동에서, 기포유동은 좌측의 저속 2상유동에서 나타나며, 열이 가해지거나 유속이 증가함에 따라 기포유동은 환상유동으로 바뀔 수 있다.

2차원 2상유동에 대한 토모그래피 계산 후, 3차원으로 도 2상유동 내의 기포의 크기 및 위치 계산을 수행하였다. 3차원 2상유동은 Fig. 4 (a)와 (b)에서 보이는 것처럼 x, y, z 공간에서 기포가 2개일 때와 3개일 때를 다음과 같은 식으로 합성하였다.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0, [(x-0.1)^2 + (y-0.1)^2 + (z-0.1)^2]^{1/2} \leq 0.3 \\ 0, [(x+0.2)^2 + (y+0.2)^2 + (z+0.2)^2]^{1/2} \leq 0.1 \\ 1, \text{ otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (14)$$

여기서 기포는 서로 다른 크기의 2개이며 그 기포의 위치 및 크기는 식 (14)와 같이 표현된다. 같은 방법으로 기포가 3개일 때 컴퓨터 합성 영상을 위한 식은 다음과 같다.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0, [(x-0.15)^2 + (y-0.15)^2 + z^2]^{1/2} \leq 0.25 \\ 0, [(x+0.3)^2 + (y+0.3)^2 + (z+0.1)^2]^{1/2} \leq 0.2 \\ 0, [(x-0.1)^2 + (y+0.3)^2 + (z-0.1)^2]^{1/2} \leq 0.15 \\ 1, \text{ otherwise} \end{cases} \dots\dots\dots (15)$$

본 연구에서는 세 가지의 다른 오차 측정이 사용되었다[15]. 첫 번째는 기준 영상 함수 f 와 재건되는 결과 함수 \hat{f} 에 의해 결정되는 평균 오차이다.

$$\Phi_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^{JKL} |f(x_i, y_i, z_i) - \hat{f}(x_i, y_i, z_i)|}{JKL} \dots\dots\dots (16)$$

여기서 JKL 은 결과 함수를 재건하기 위해 사용하는 기초함수의 총수이다. 두 번째는 평균 제곱 오차이다.

$$\Phi_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{JKL} [f(x_i, y_i, z_i) - \hat{f}(x_i, y_i, z_i)]^2}{\sum_{i=1}^{JKL} [f(x_i, y_i, z_i) - \bar{f}]^2}} \dots\dots\dots (17)$$

여기서 \bar{f} 는 영상장의 평균값이며 이 오차는 재건 과정에서 몇 개의 큰 오차가 있을 때 커지게 된다. 세 번째는 절대 평균 오차이다.

$$\Phi_{abs} = \frac{\sum_{i=1}^{JKL} |f(x_i, y_i, z_i) - \hat{f}(x_i, y_i, z_i)|}{\sum_{i=1}^{JKL} |f(x_i, y_i, z_i)|} \dots\dots\dots (18)$$

이 오차는 작은 오차들의 개수가 많을 때 효과가 증대된다. 이 세 가지 오차는 모두 실제장 또는 기준 합성 영상과 재건장 (결과 함수)간의 비교에 기초해서 계산된다는 점을 주목해야 한다. 실제 실험에서는 실제장을 모르기 때문에 재건의 질은 오직 계산된 가상의 투사 데이터 Ψ 와 측정된 투사 데이터 Ψ' 의 비교에 의해서 계산된다.

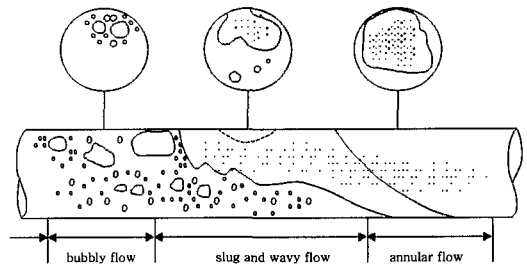


Fig. 3 Schematic of two-phase flows in horizontal pipe

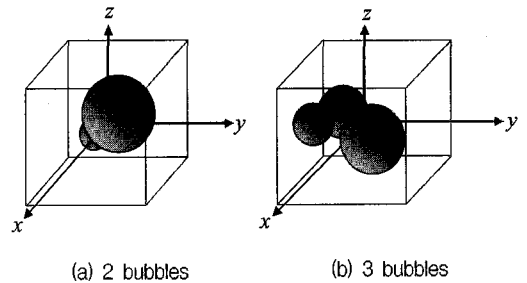


Fig. 4 Computer synthesized three-dimensional two-phase phantoms fields

4. 결과 및 고찰

토모그래피를 이용한 비침투적 재건 방법인 ART와 MART에 의해 2상유동의 2차원 영상장과 3차원 영상장이 계산되었다. 재건에 이용된 투사 데이터는 디지털 스펙클 투사 데이터도 식 (4)에 의해 간접계 투사 데이터로 변환될 수 있으므로 간접계 데이터가 사용되었다. 즉, 2차원 단면의 환상유동에 대해서는 컴퓨터 합성 영상장으로부터 각 프로젝션 당 300개의 광선 ($R=300$)을 계산하고 그 광선들로부터 ART와 MART에 의해 밀도 분포를 재건하는데, 이 때 재건장은 50×50 cubic B-spline 기초함수 ($N=2500$)로 표현되었다. 2차원 기포유동에 대해선 각 프로젝션이 500개의 광선 ($R=500$)으로 이루어졌고 기

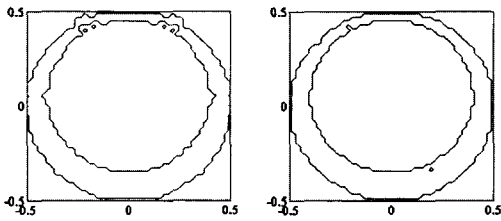
초함수의 수는 $N=50 \times 50=2500$ 이다. 토모그래피의 반복횟수가 최적 반복 단계를 넘어서면 영상은 점진적 오차의 누적으로 인해 오히려 결과가 나빠질 수가 있으므로[16] 컴퓨터 합성 영상장과 재건된 장 사이의 차이가 최소에 도달할 때 계산이 중단되어야 한다. 재건 계산은 환상 유동에서는 180° 로부터 등간격 각도로 나누어진 3개와 5개 ($P=3, 5$)의 투사 데이터 각도, 그리고 기포유동에서는 같은 방법으로 나누어진 4개와 7개 ($P=4, 7$)의 투사 데이터 각도를 이용하여 수행하였다.

Fig. 5 (a)와 (b)에서 보이는 것과 같이 ART와 MART가 3개의 투사 데이터 각도 하에서는 환상유동을 재건하는 데 있어 약간의 오차를 보여주었지만 5개의 투사각도 하에서는 Fig. 5 (c)와 (d)에서 보이는 것과 같이 유동 형태의 간단함으로 인해 환상유동을 완벽하게 재건하였다. 비대칭 장을 재건하는 데 있어서 그 장이 아무리 단순한 형태이더라도 최소로 요구될 것이라고 예상되는 3개의 투사 데이터 각도 하에서는 Table 1에서 보이는 것처럼 MART의 결과가 ART의 결과보다 더 좋은 재건을 보여주고 있다. 곱셈 재건 방식인 MART의 갱신 방법이 ART보다 2상유동에 대해 더 적합하기 때문에 MART는 기체와 액체같이 두 개의 밀도 값만을 갖는 2상유동에 대해 장점을 보여주고 있다. Table 1에서 환상유동의 경우 MART와 ART의 오차 결과가 이미 5개의 투사 데이터

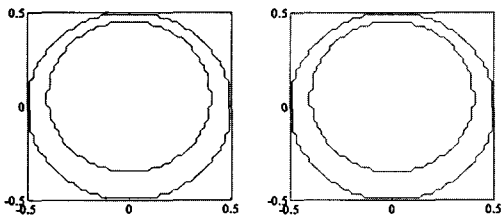
각도에서 완벽하므로 이런 간단한 모양의 비대칭 유동에서는 정확한 결과를 얻기 위해 요구되는 투사 데이터의 각도가 5보다 작을 수 있다는 것을 나타내주고 있다.

기포유동의 경우에도 Fig. 6에서 보이는 것과 같이 MART가 ART보다 정확한 재건 결과를 제공하고 있다. Fig. 6 (a)와 (b)에서 보이는 것처럼 4개의 투사각도 하에서는 기포의 형상을 제대로 재건하지 못하고 있으므로 ART와 MART의 결과가 모두 허용되기 어려우나 7개의 투사각도 하에서는 ART 결과가 여전히 정확한 기포의 형상을 재건하는 데 어려움이 있는 반면에 MART 결과는 5개의 기포들을 정확하게 재건하고 있다. 그러므로 투사 데이터의 숫자가 증가할수록 더욱 정확한 재건 결과가 나타날 수 있다는 것을 예측할 수 있다. Table 1에서도 확인할 수 있듯이 7개 투사 각도의 ART가 어느 정도 오차를 갖고 있는 것에 비해, MART의 경우는 오차가 완벽한 0 퍼센트로 나타났다. 따라서, 상대적으로 복잡한 형상을 가진 기포유동의 경우에는 7개 각도 이상의 투사 데이터를 가진 MART가 적당한 재건 방법이라고 할 수 있다.

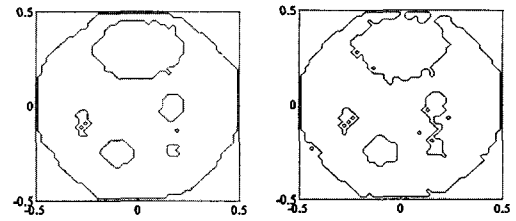
Table 1은 2차원 재건 결과에 대한 세 가지 오차들 (식 (16-18))의 계산 결과들을 제시한다. 여기서 보여지는 평균 오차, 평균 제곱 오차, 절대 평균 오차는 환상유동과 기포유동에 대한 재건 정확도의 다양한 측정법인데



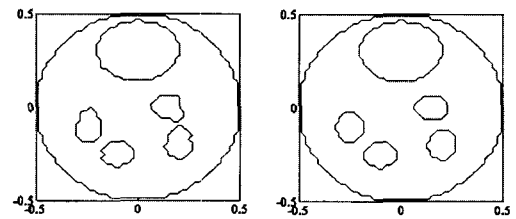
(a) ART under 3 projections (b) MART under 3 projections



(c) ART under 5 projections (d) MART under 5 projections



(a) ART under 4 projections (b) MART under 4 projections



(c) ART under 7 projections (d) MART under 7 projections

Fig. 5 Reconstructed fields of two-dimensional annular flow using ART and MART

Fig. 6 Reconstructed fields of two-dimensional bubbly flow using ART and MART

이 오차들은 컴퓨터 합성 영상장과 같이 이미 알고 있는 기준장과 토모그래피에 의해 재건된 장을 비교할 때 중요하다. 실제로 실험을 하는 경우에는 실제장이 알려져 있지 않기 때문에 가상 투사 데이터 Ψ 와 측정된 투사 데이터 Ψ' 의 비교를 통해서만 재건 정확도를 판단할 수 있으며 이 방법이 토모그래피 재건법의 한 부분이 된다. 본 연구에서는 시험된 모든 2차원 경우에 대해 MART의 재건 오차가 ART보다 작으므로, 3차원 2상유동 재건을 위해서 MART가 사용되었다.

반복을 멈추고 장을 재건해야 하는 오차가 최소인 점은 Fig. 7에서 보여지듯이 반복이 진행될 때마다 오차를 계산함으로써 쉽게 찾을 수 있다. 기포유동의 형상이 환상유동보다 더 복잡하기 때문에 최소 오차에 도달하기 위한 기포유동의 반복 횟수가 환상유동보다 더 많고 Fig. 7에서 MART가 ART보다 더 빠르게 최소 오차에 도달하는 것을 볼 수 있다. 따라서, 2차원 2상유동 재건에서 MART가 ART보다 더 나은 정확도와 더 빠른 계산 시간을 보여준다.

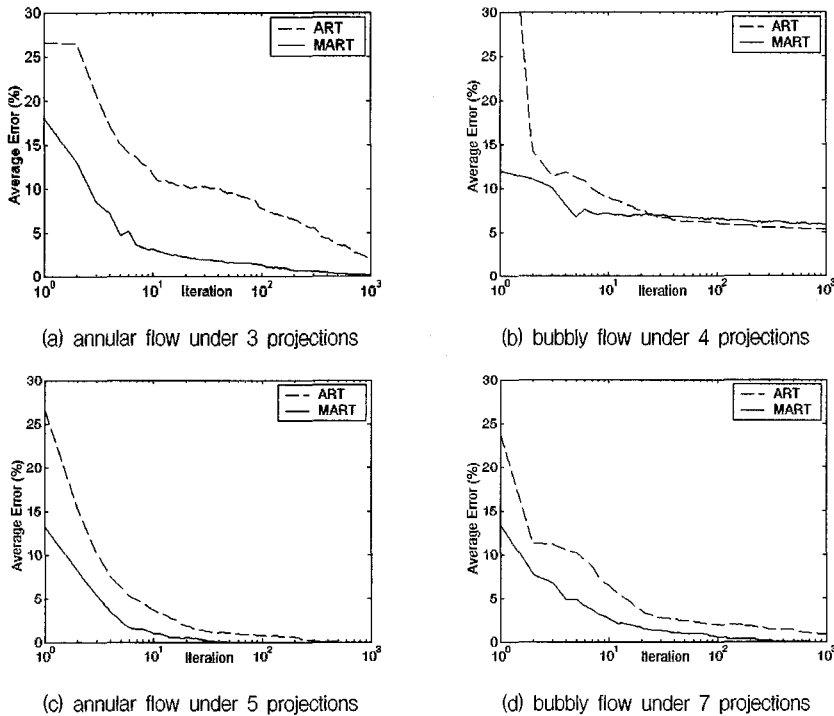


Fig. 7 Average error versus iteration of ART and MART reconstructions for two-dimensional annular and bubbly flows

Table 1 Comparison of reconstruction errors between MART and ART for two-dimensional density distributions

Phantom field	Number of projections	Reconstruction technique	Ψ_{avg} (%)	Ψ_{rms} (%)	Ψ_{abs} (%)
Annular flow	3	ART	2.00	10.04	7.53
		MART	0.16	0.82	0.60
	5	ART	0.00	0.00	0.00
		MART	0.00	0.00	0.00
Bubbly flow	4	ART	5.28	22.22	9.01
		MART	5.80	24.06	9.90
	7	ART	0.80	3.30	1.37
		MART	0.00	0.00	0.00

3차원 2상유동의 경우도 토모그래피 재건을 위해 기포가 2개인 경우와 3개인 경우, 두 가지 컴퓨터 합성 영상장이 사용되었다 (Fig. 4 (a)와 (b)). 3차원의 경우는 한 단면을 재건하는 2차원 계산과 달리 각각의 기포의 형상에 따른 밀도 분포를 입체적으로 계산해야 하므로 정확도를 위해 더 많은 투사 데이터의 숫자가 요구된다. 각각의 컴퓨터 합성 영상장은 전체 광선 숫자가 3150개와 15000개 또는 14400개의 경우로 나누어져서 재건되는데, 광선 숫자가 3150개의 경우는 또 다시 투사 데이터 각도가 한 평면에 등간격으로 3개 ($P=3$), 투사 각도가 한 평면뿐만 아니라 상하로도 3개 (수평면으로부터 $+60^\circ$, 0° , -60°)로 변화시킬 경우와 주지 않은 경우 ($Q=3$, 1), 상하각과는 별도로

재건 평면의 숫자가 2차원일 때 한 개였던 것과는 달리 3차원이므로 높이에 따라 10개와 30개인 경우 ($Z=10, 30$), 그리고 각 각도에서 광선의 숫자가 35개 ($R=35$)로 나누어진다. 즉, 기포의 수가 2개와 3개인 3차원 영상장은 $P \times Q \times Z \times R = 3 \times 3 \times 10 \times 35 = 3150$ 개인 경우와 $P \times Q \times Z \times R = 3 \times 1 \times 30 \times 35 = 3150$ 개인 경우로 구분하여 재건되고 비교된다. 또한 광선 숫자를 늘려서 역시 같은 3차원 영상장에 대해 $P \times Q \times Z \times R = 3 \times 1 \times 50 \times 100 = 15000$ 인 경우와 $P \times Q \times Z \times R = 3 \times 3 \times 40 \times 40 = 14400$ 인 경우를 이용하여 토모그래피 재건법인 MART에 의해 기포 유동의 재건을 시도한다. 여기서 재건장은 2차원장에서 한 평면에 대해 50×50 기초 함수를 사용하였던 것과는 달리 3차원이므로 $15 \times 15 \times$

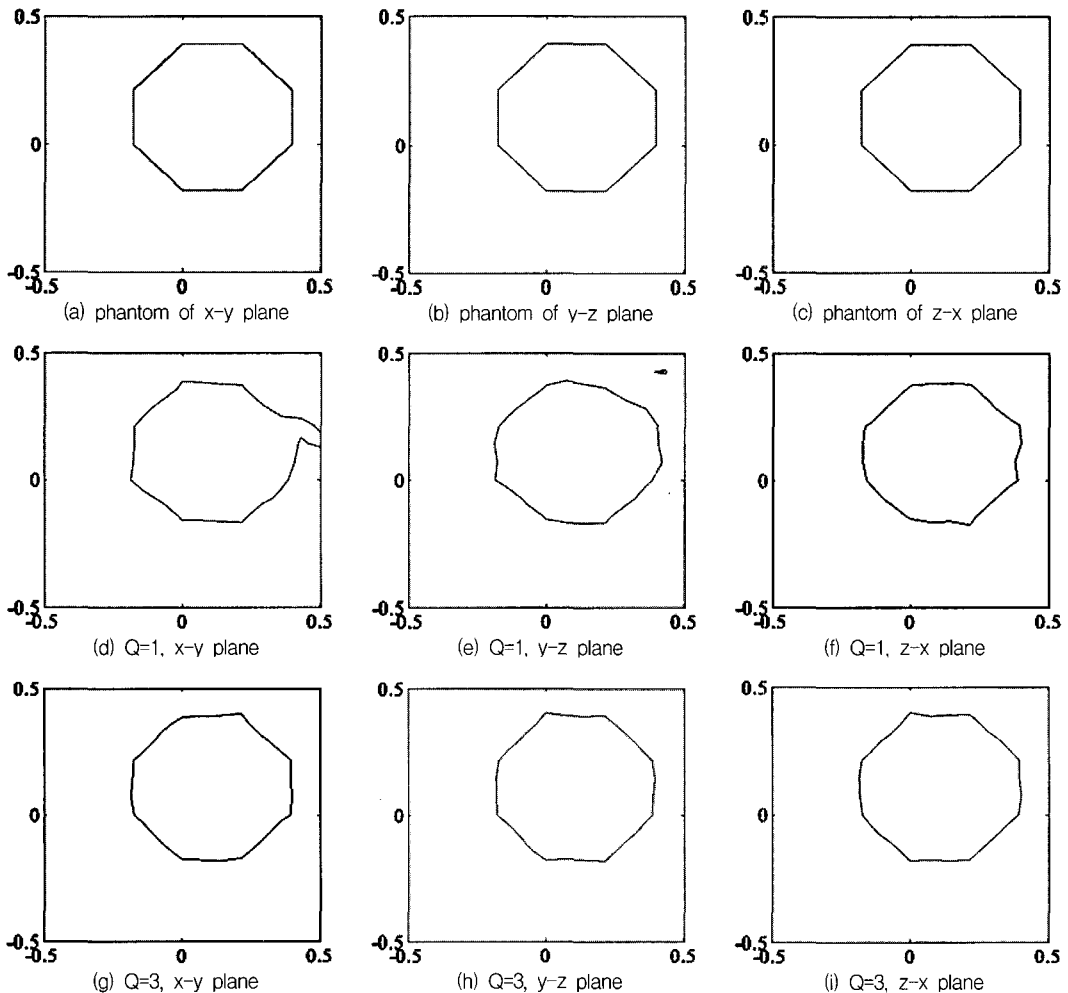


Fig. 8 Reconstructed fields of three-dimensional bubbly flow including two bubbles for 3150 rays

15=3375개의 cubic B-spline 기초함수로 표현된다. 3차원 재건 방법과 2차원 재건에서 단순히 높이를 달리하여 결과들을 합치는 것과의 중요한 차이는 상하로 다른 투사 데이터의 경사각 (수평면으로부터 $+60^\circ$, 0° , -60°)을 주어서 한 평면에서 다른 투사각을 주는 2차원 경우보다 정확하고 광범위한 계산을 가능하게 한다는 점과 상하로 다른 투사각을 주지 않는 경우에도 한 광선이 3차원 재건장의 모든 공간의 기초함수에 영향을 주게끔 토모그래피 재건법을 변환해서 사용한다는 점이다.

3차원 재건장의 첫 번째인 2개의 기포가 있는 경우는 총 광선의 숫자가 3150개일 때 Fig. 8에서 보이는 것처럼 상하로 다른 경사 각도를 주어서 광선을 투사시키고 각각의 경

사각에서 10개씩 높이를 바꾸며 광선을 투사시키는 경우 (Q=3)가 상하로 다른 경사각을 주지 않고 30개의 수평한 평행 광선을 높이를 바꾸며 투사시키는 경우 (Q=1)보다 더 좋은 결과들을 나타낸다. 이 경우의 재건장은 3차원이지만 결과들을 3차원으로 표현하면 컴퓨터 합성 영상장과의 비교에 어려움이 많으므로 각각 면의 중간을 대표 단면으로 나누어 x-y면, y-z면, z-x면에 의해 재건 결과를 나타내었다. Fig. 9에서는 광선의 숫자를 더욱 늘렸을 때의 결과들을 역시 같은 단면 3개로 나누어 보여주고 있는데 재건장과 컴퓨터 합성 영상장과의 차이는 광선의 숫자가 많아서 이 결과들로부터는 구별하기가 어려우며 따라서 Table 2에서 오차들을 비교함으로써 정확도를 검증할 수 있다.

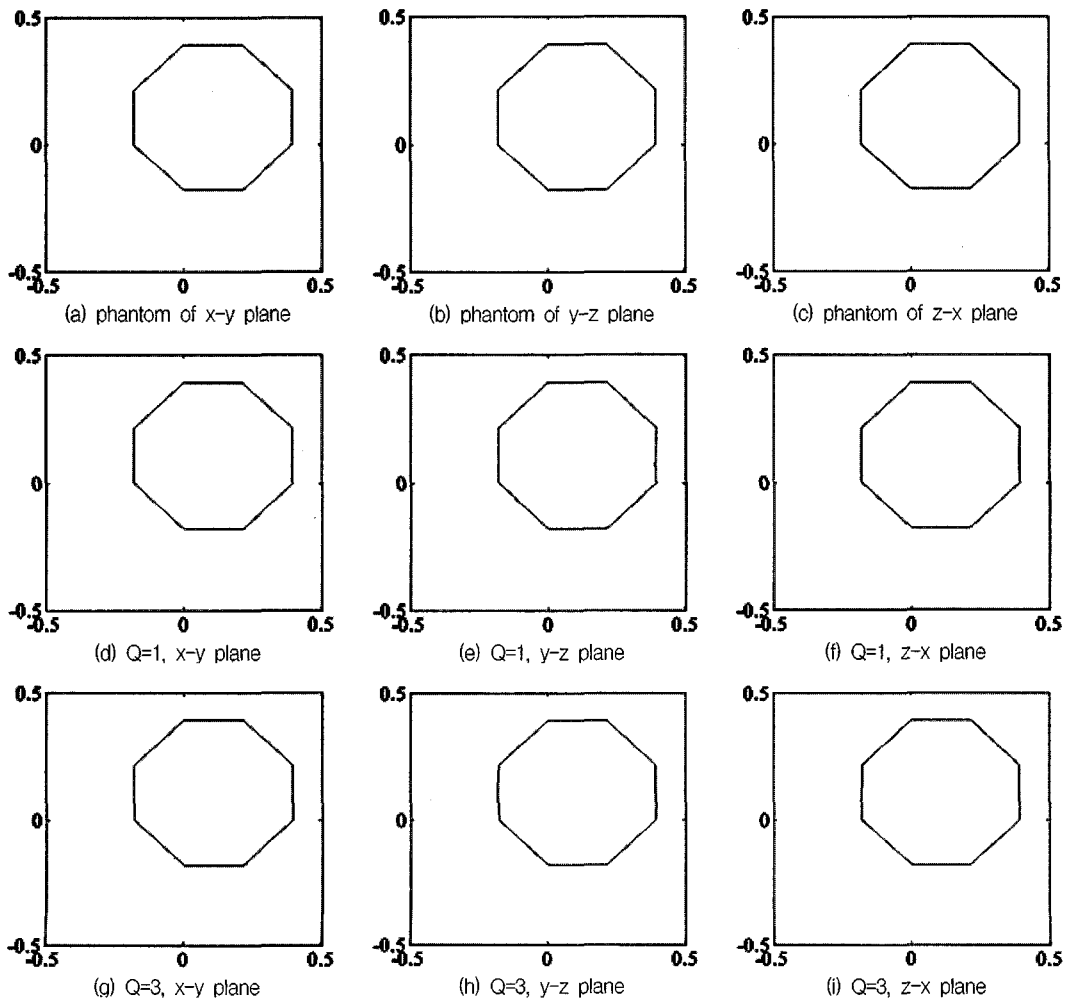


Fig. 9 Reconstructed fields of three-dimensional bubbly flow including two bubbles for 15000 and 14400 rays

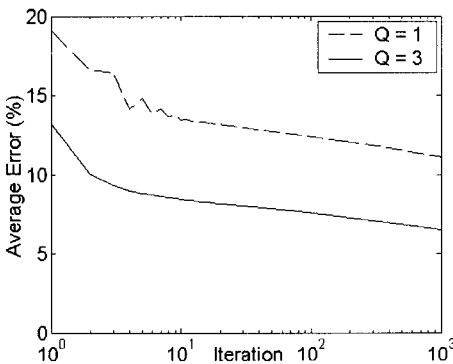
Table 2 Comparison of reconstruction errors using MART for three-dimensional density distributions

PQZR	Phantom field	Number of zenith angle (Q)	$\Psi_{avg}(\%)$	$\Psi_{rms}(\%)$	$\Psi_{abs}(\%)$
3150	2 bubbles	1	11.1090	27.6702	12.2686
		3	6.5267	8.3477	7.2079
	3 bubbles	1	11.5620	34.9245	12.7355
		3	8.7223	14.9994	9.6077
15000	2 bubbles	1	0.4509	0.0891	0.4980
		3	0.1102	0.0027	0.1217
	3 bubbles	1	1.0481	0.2982	1.1545
		3	0.1759	0.0069	0.1938

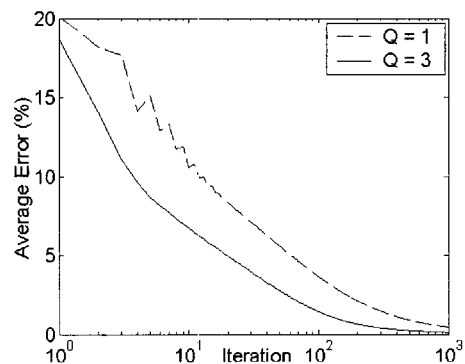
기포가 2개인 3차원 영상장의 경우 Table 2에서 확인할 수 있는 것과 같이 상하의 경사각이 3개 있는 경우가 높이를 바꾼 수평한 평행광선이 3배 더 많은 경우보다 더 작은 오차들을 보여준다. 또한 Fig. 10에서 보이는 것처럼 상하의 경사각이 존재하는 경우 ($Q=3$)가 오차가 더욱 빨리 최소 값에 수렴하고, 더 작은 오차 값을 보여준다. 그러므로, 2차원 환상 및 기포유동에서 확인했듯이 한 평면에서 더 많은 투사 각도를 주어야 결과가 좋아지는 것과 마찬가지로 3차원 2상유동 재건에서도 평면 투사각뿐 아니라 수평으로부터 상하로 다른 경사각을 주는 경우가 더 좋은 결과들을 보여준다. 계산상으로는 투사 각도가 늘어날수록 결과가 좋아지는 것은 하지만 실제 공학 실험에서는 많은 투사각도를 만드는 것이 공간적으로 또는 경제적으로 어려움이 따를 수 있고 계산 시간도 많이 길어지므로 적은 수의 투사 데이터로 보다 정확한 결과들을 얻어내는 것이 토모그래피의 한가지 목적이 될 수 있다. 따라서, 실제 실험에서 수평으로부터 상하로 다른 경사각을 주는 장치를 설치하기가 불가능한 경우에는 높이를 달리하는 수평 투사 데이터 수를 늘려서 실험을

수행하고 허용할 수 있는 정확도를 얻어야 한다.

기포의 수를 3개로 늘려서 3차원 합성장을 만든 경우에도 계산 시간은 늘어났지만 기포가 2개인 경우와 같은 경향을 보여주고 있으며, 그 결과들을 다시 확인할 수 있다. Fig. 11에서는 Fig. 8, 9의 경우와 마찬가지로 상하로 투사각을 3개로 주었을 때 ($Q=3$) 합성 영상장에 보다 가까운 정확한 결과들을 보여주며 Fig. 12에서도 투사각을 늘린 경우가 상하 경사각을 주지 않고 수평 데이터를 높이에 따라 늘린 경우 ($Q=1$)보다 빠르게 더 낮은 오차로 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 총 광선의 수가 3150개인 경우 (Fig. 12 (a))와 15000개나 14400개로 늘린 경우 (Fig. 12 (b))를 비교하면 광선의 수가 늘어난 경우에 보다 작은 오차를 보여주는데, 광선의 수가 늘수록 계산 시간도 늘어나고 오차가 최소값으로 접근하는 반복 횟수도 많아지는 경향을 보인다. Table 2에서는 3가지 오차가 모든 경우에서 상하 경사각이 3개일 때 보다 작은 오차들을 보여준다. 따라서, 2상유동의 하나인 기포유동에서 3차원 밀도 분포는 상하 경사각에 변화를 주면서 MART를 이용해서 재건하는 경우 정확한 결과를 얻을 수 있다.



(a) PQZR=3150



(b) PQZR=15000 and 14400

Fig. 10 Average error versus iteration for three-dimensional bubbly flow including two bubbles

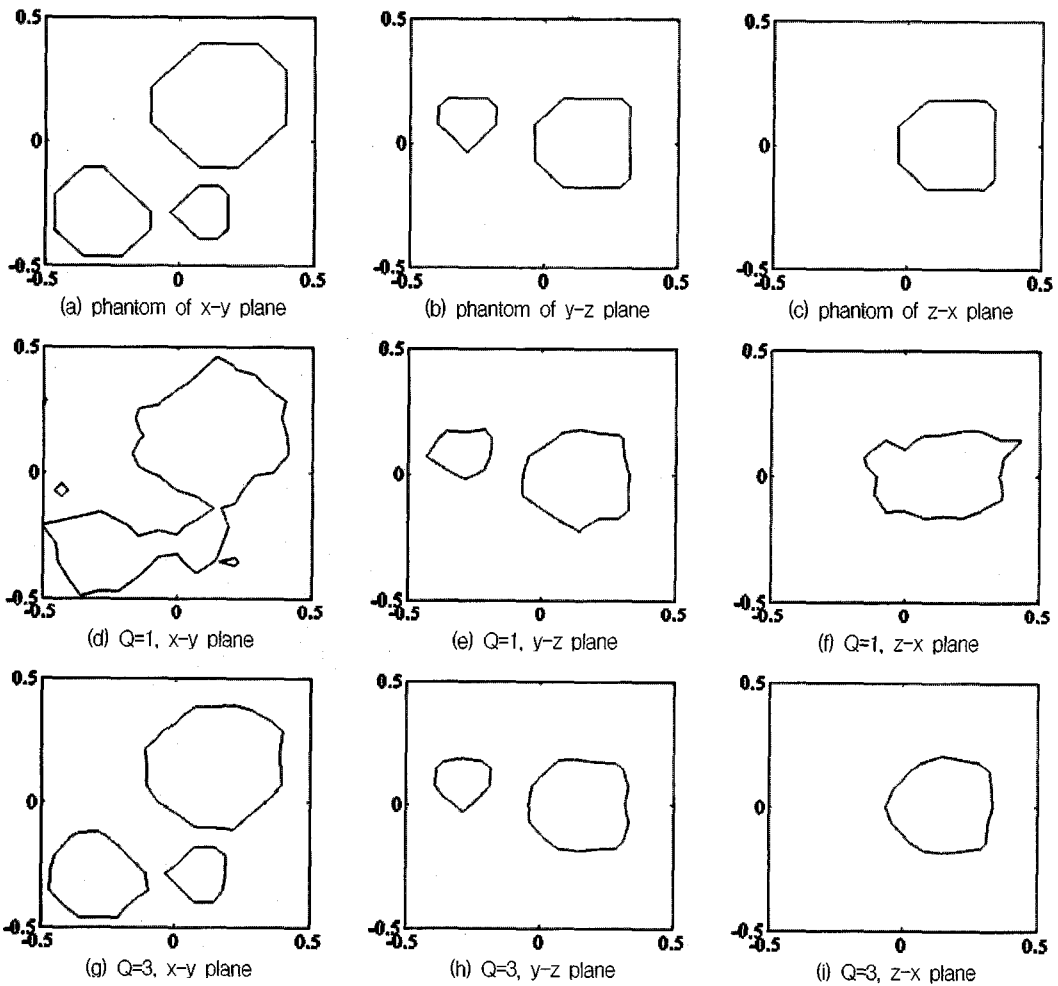


Fig. 11 Reconstructed fields of three-dimensional bubbly flow including three bubbles for 3150 rays

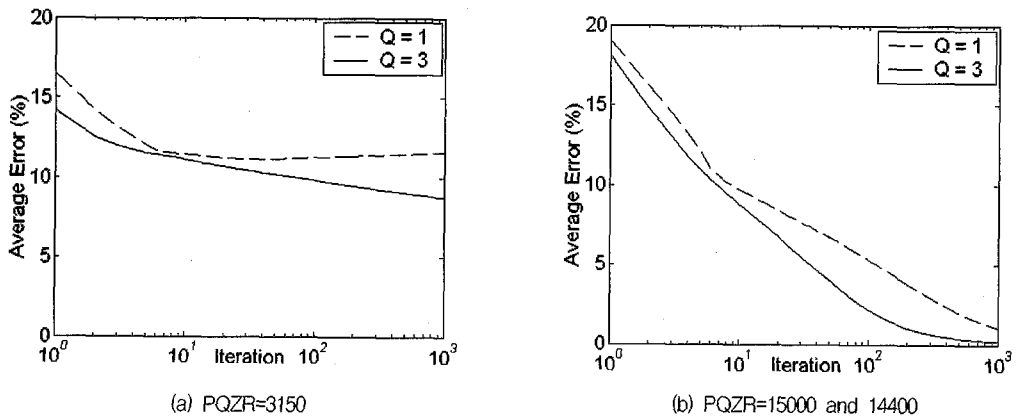


Fig. 12 Average error versus iteration for three-dimensional bubbly flow including three bubbles

5. 결 론

토포그래피를 이용하여 레이저 투사 데이터로부터 2상유동의 밀도 분포를 비침투적으로 재건하기 위하여 algebraic reconstruction technique (ART)과 multiplicative algebraic reconstruction technique (MART)이 계산적으로 연구되었다. 먼저, 2차원 단면의 환상유동과 기포유동의 컴퓨터 합성 영상장으로부터 ART와 MART를 이용하여 재건을 수행하고 그 정확도와 효율성을 분석하였다. ART와의 비교에서 MART는 2차원 2상유동에 대해서 보다 정확한 결과들을 보여주었으며 또한 최소 오차에 도달하기 위한 반복 횟수에서도 더 빠른 수렴을 보여주었다. 따라서, MART를 선택하여 기포가 2개와 3개인 경우의 3차원 2상유동 재건을 수행하였다. 3차원 2상유동 재건에서는 평면에 대한 투사각 뿐만 아니라 상하로도 투사각을 경사있게 제공하는 경우에 보다 정확하고 빠른 수렴을 보여 주었다. 실제 실험에서 레이저로 상하의 투사각을 설치하기가 어려운 경우에는 같은 평면 투사각으로부터 높이에 따른 변화를 주고 변환된 3차원 토포그래피를 이용한다면 허용할 수 있는 오차 범위내의 결과들을 얻을 수 있다.

후 기

본 연구는 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2001-003-E00009).

참고문헌

- [1] M. V. Berry and D. F. Gibbs, "The Interpretation of Optical Projections", *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. A-314, pp. 143-152, (1970)
- [2] H. H. Barret and W. Swindell, "Analog Reconstruction Methods for Transaxial Tomography", *Proc. IEEE*, Vol. 65, No. 1, pp. 89-107, (1977)
- [3] R. M. Lewitt, "Reconstruction Algorithms: Transform Methods", *Proc. IEEE*, Vol. 71, No. 3, pp. 390-408, (1983)
- [4] R. J. Santoro, H. G. Semerjian, P. J. Emmerman, and R. Goulard, "Optical Tomography for Flow Field Diagnostics", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, No. 7, pp. 1139-1150, (1981)
- [5] R. Rangayyan, A. P. Dhawan, and R. Gordon, "Algorithms for Limited-View Computed Tomography: an Annotated Bibliography and a Challenge", *Appl. Opt.*, Vol. 24, No.3, pp. 4000-4012, (1985)
- [6] R. Gordon, "A Tutorial on ART", *IEEE Trans. on Nuclear Science*, Vol. NS-21, pp. 78-92, (1974)
- [7] A. C. Kak and M. Slaney, "Principles of Computerized Tomographic Imaging", *IEEE Press*, New York, pp. 49-112, (1987)
- [8] H. S. Ko, K. Okamoto, and H. Madarame, "Reconstruction of Transient Three-dimensional Density Distributions Using Digital Speckle Tomography", *Meas. Sci. Tech.*, Vol. 12, No. 8, pp. 1219-1226, (2001)
- [9] J. R. Partington, "Physico-Chemical Optics", Vol. IV, *An Advanced Treatise on Physical Chemistry*, Longmans Green, London, pp. 27-31, (1953)
- [10] C. M. Vest, "Holographic Interferometry", *John Wiley & Sons*, New York, pp. 64-103, (1979)
- [11] H. S. Ko and K. D. Kihm, "An Extended Algebraic Reconstruction Technique (ART) for Density-Gradient Projections : Laser Speckle Photographic Tomography", *Exper. Fluids*, Vol. 27, No. 6, pp. 542-550, (1999)
- [12] N. A. Fomin, "Speckle Photography for Fluid Mechanics Measurements", *Springer*, Berlin, pp. 105-146, (1998)
- [13] D. Verhoeven, "Limited-data Computed Tomography Algorithms for the Physical Sciences", *Appl. Opt.*, Vol. 32, No. 20, pp. 3736-3754, (1993)
- [14] K. M. Hanson and G. W. Wecksung, "Local Basis Function Approach to Computed Tomography", *Appl. Opt.*, Vol. 24, No. 23, pp. 4028-4039, (1985)
- [15] K. D. Kihm, H. S. Ko and D. P. Lyons, "Tomographic Identification of Gas Bubbles in Two-Phase Flows with the Combined Use of the Algebraic Reconstruction Technique and the Genetic Algorithm", *Opt. Lett.*, Vol. 23, No. 9, pp. 658-660, (1998)
- [16] A. J. Decker, "Tomographic Methods in Flow Diagnostics", *NASA Report*, No. 106330, (1993)