

# 임의의 사각형 QAM의 일반화된 비트 오류 분석

정회원 윤 동 원\*, 조 경 국\*\*, 서 기 범\*\*\*

## Generalized BER Analysis of Arbitrary Rectangular QAM

Dongweon Yoon\*, Kyongkuk Cho\*\*, Kibum Suh\*\*\* *Regular Members*

### 요 약

무선통신 환경의 한정된 주파수 자원에서 신뢰성 있는 고속의 통신방식이 요구되고 있다. 직교 진폭 변조 (QAM) 는 대역폭의 증가없이 고속의 데이터 처리가 가능한 유용한 변조 방식이다. 이제까지 사각형(rectangular) 직교 진폭 변조 (R-QAM) 신호의 일반화된 BER 식은 유도된바 없다. 이 논문에서는 가산성 백색 가우시안 잡음 환경에서 그레이 부호화된 R-QAM의 일반화된 closed-form 형태의 BER식을 유도하고 분석한다. 먼저 I-ary PAM 신호에 대하여 I 가 4, 8, 16 일 때의 BER 식을 유도하고 이 결과들로부터 유도 과정의 규칙성을 찾아내며, 그 규칙성들로부터 임의의 I-ary PAM 신호에 대한 일반화된 BER 식을 유도한다. R-QAM 신호는 각각 독립적인 동상 성분의 I-ary PAM 과 직교 성분의 J-ary PAM으로 구성되기 때문에 I-ary PAM의 일반화된 BER 식으로부터 R-QAM 신호에 대한 일반화된 BER 식을 구한다. 또한 SNR이 높을 때에 지배적인 항을 고려한 간단한 근사식도 유도한다.

### ABSTRACT

Reliable high-speed data communications over insufficient channel bandwidth is one of the major challenges of harsh wireless environments that push the achievable spectral efficiency far below its theoretical limits. A Quadrature amplitude modulation (QAM) scheme is a useful modulation technique for achieving high data rate transmission without increasing the bandwidth of wireless communication systems

The exact general bit error rate (BER) expression of arbitrary rectangular quadrature amplitude modulation has not yet been derived. In this paper, a generalized closed-form expression for the BER performance of rectangular QAM with Gray code bit mapping is derived and analyzed in the presence of additive white Gaussian noise (AWGN) channel. First we analyze the BER performance of an I-ary PAM scheme. Regular patterns in the k-th bit error probability are observed while developing the BER expression. From these patterns we provide the exact and general closed-form BER expression of an I-ary PAM. Then we present a general closed-form expression for BER of an arbitrary IXJ rectangular QAM by considering that this signaling format consists of two PAM scheme, i.e., I-ary and J-ary PAM. A simple approximate BER expression for rectangular QAM is given as well.

### 1. 서 론

현대의 통신 환경이 점점 고속화, 광대역화 되어 감에 따라 이를 수용할 수 있는 주파수 스펙트럼 효율이 매우 우수한 변조 방식들이 요구되고 있다.

이들 변조 방식중에 직교진폭변조(Quadrature Amplitude Modulation)는 부가적인 대역폭의 증가 없이 고속의 데이터 전송이 가능하며 이러한 통신 환경에서 매우 효율적인 변조 방식이다. QAM변조의 신호 배치에 있어서 가장 현실적이며 일반화된

\* 대전대학교 컴퓨터정보통신공학부 (e-mail: dwyoon@dju.ac.kr)

\*\* LG전자 CDMA시스템연구소 무선방식그룹 (e-mail: kyongkuk@lge.com)

\*\*\* 우송대학교 컴퓨터전자정보공학부 (email : kbsuh@lion.woosong.ac.kr)

논문번호 : 020302-0716, 접수일자 : 2002년 7월 16일

형태가 사각형(rectangular) 신호 배치이며 이는 정방형(square) 신호배치를 포함하게 된다.

변조 방식들간에 성능을 비교할 때 가장 기준이 되는 것이 BER(bit Error Rate)이다. 이제까지는 M-ary square QAM 신호에 대하여 M이 16 일 때와 64 일 때 이에 대한 비트 오류 확률은 참고문헌 [1], [2] 등에서 찾을 수 있다. 일반화된 M에 대한 BER 근사식은 참고문헌 [3]-[5] 등에서 찾을 수 있다. 가장 최근에는 임의의 M에 대하여 일반화된 하나의 BER 표현식이 [6] 에서 구하여졌다.

이 논문에서는 저자들이 [6]에 구한 M-ary square QAM 신호의 BER 수식을 임의의 rectangular 형태의 QAM(R-QAM)신호에 확장하여 일반화된 closed-form 형태로 유도하고 분석한다. QAM 신호의 근간은 PAM 신호이다. I-ary PAM 신호에서 I 가 4, 8, 16 일 때의 BER 결과식으로부터 유도 과정의 규칙성을 찾아내고 이를 바탕으로 해서 R-QAM 신호의 일반화된 BER 식을 유도하고 분석한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 R-QAM의 근간을 이루는 I-ary PAM 신호에 대한 해석 모델을 다루며, 3장에서는 I=4, 8, 16 일 때의 PAM 신호의 BER을 유도한다. 이로부터 그레이 부호화의 규칙성을 이용하여 I-ary PAM 신호의 일반화된 closed-form의 BER 표현식을 구한다. 4장에서는 3장에서 유도된 I-ary PAM 신호의 일반화된 BER식을 바탕으로 임의의 IX사각형 QAM 신호에 대한 일반화된 closed-form의 BER 식을 유도하고 분석하며 5장에서 결론을 맺는다.

## II. 시스템 모델

R-QAM 신호는 각각 독립적인 동상 성분의 I-ary PAM 과 직교 성분의 J-ary PAM으로 구성되기 때문에 R-QAM 신호의 일반화된 BER을 구하기 위하여 먼저 I-ary PAM 신호의 일반화된 BER 식을 유도한다. I-ary PAM 신호는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$s(t) = A_f \cos 2\pi f_c t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

여기서,  $A_f$ 는 신호 진폭이고,  $f_c$ 는 반송파 주파수,  $T$ 는 심볼 지속 시간이다. 식 (1)에서  $A_f$ 는 독립적으로  $-(I-1)d, -(I-3)d, \dots, (I-3)d$  또는  $(I-1)d$ 의 값중 하나의 값을 갖는다. 여기서  $2d$

는 신호간 최소 거리이며 비트에너지  $E_b$ 와 다음의 관계를 갖는다.

$$d = \sqrt{\frac{3 \log_2 I \cdot E_b}{(I^2 - 1)}} \quad (2)$$

각 신호는 Gray 부호화 되었다고 가정하며 모든 신호점은 같은 확률로 발생된다고 가정한다. 신호가 가산성 백색 잡음 채널을 통과하면 수신 신호는

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (3)$$

이 되며, 이 때  $n(t)$ 는 평균이 0 이고 전력 밀도 함수가  $N_0/2$ 인 백색 가우시안 잡음이다. 복조는 주파수 동기과 심볼 동기가 이루어 졌다고 가정한다. 각각의 심볼을 구성하는 비트의 위치가 직교 진폭 변조 신호의 비트 오류 확률에 영향을 미치게 된다.

## III. I-ary PAM 신호의 BER

### 1. 4-PAM 신호의 BER

가장 간단한 4-PAM 신호의 경우에 대하여 살펴본다. 그림 1에는 4-PAM 신호의 신호점 배치도를 나타내었다. 여기서 각 신호 심볼들은  $i_1, i_2$ 의 2비트로 구성된다.

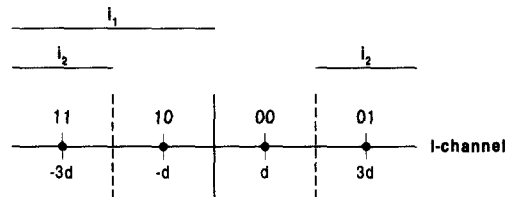


그림 1. 4-PAM의 신호점 배치도

그림 1에서  $i_1$  와  $i_2$  는 각각  $i_1=1, i_2=1$  인 영역을 나타낸다. 4-PAM의 신호점에서 각 비트가 오류가 되는 것은 k번째 ( $k=1,2$ ) 비트가 오류가 되는 다음과 같은 두가지 경우 (class I, class II)가 있으며 평균 비트 오류 확률은 두 경우의 평균을 구하면 된다<sup>[1]</sup>.

Class I은 각 성분의 첫 번째 비트  $i_1$ 이 오류가 되는 경우이며 이때 결정 경계는 각각 모두 0 이고 각 신호점은 결정 경계로부터  $d$  또는  $3d$  만큼 떨어져 있다. 즉 잡음이  $d$  또는  $3d$ 를 초과하면 오류가 발생하며, 따라서  $i_1$ 비트는 다음 규칙에 따라 복원된다.

$$\begin{cases} \text{if } I \geq 0 \text{ then } i_1 = 0 \\ \text{if } I < 0 \text{ then } i_1 = 1 \end{cases}$$

이 경우 첫 번째 비트가 오류가 되는 확률은 다음과 같다.

$$P_b(1) = \frac{1}{4} \left[ \operatorname{erfc} \left\{ \frac{d}{\sqrt{N_0}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ \frac{3d}{\sqrt{N_0}} \right\} \right] \quad (5)$$

여기서  $\operatorname{erfc}(\cdot)$ 는 상보오차함수(complementary error function)이고 다음과 같이 정의된다<sup>[7]</sup>

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad (6)$$

Class II는 두 번째 비트  $i_2$ 가 오류가 되는 경우이며 이때 결정 경계는  $-2d$ 와  $2d$ 이고, 각 신호점은 결정 경계로부터  $d$ 만큼 떨어져 있다. 왼쪽 평면에 대하여,  $i_2 = 1$ 일 때 잡음이  $d$ 를 초과하면 오류가 발생하며,  $5d$ 를 초과하면 오류가 발생하지 않는다. 왼쪽 평면에서  $i_2 = 0$ 일 때 잡음이  $-d$ 나  $3d$ 를 초과하면 오류가 발생한다. 오른쪽 평면에 대하여도 같은 규칙이 적용된다. 따라서,  $i_2$  비트는 다음 규칙에 따라 복원된다.

$$\begin{cases} \text{if } I < -2d \text{ then } i_2 = 1 \\ \text{if } -2d \leq I < 2d \text{ then } i_2 = 0 \\ \text{if } I \geq 2d \text{ then } i_2 = 1 \end{cases} \quad (7)$$

여기서  $d = \sqrt{\frac{6E_b}{15}}$  이고 식 (2)로부터 구할 수 있다. 따라서 이 경우 두 번째 비트  $i_2$ 가 오류가 되는 확률은 다음과 같다.

$$P_b(2) = \frac{1}{4} \left[ 2\operatorname{erfc} \left\{ \frac{d}{\sqrt{N_0}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ \frac{3d}{\sqrt{N_0}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ \frac{5d}{\sqrt{N_0}} \right\} \right] \quad (8)$$

최종적으로 4-PAM 신호의 평균 비트 오류 확률은 위의 식 (5)와 (8)을 평균 취함으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_b = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 P_b(k) \quad (9)$$

## 2. 8-PAM 신호의 BER

8-PAM의 각 심볼은  $i_1, i_2, i_3$ 의 3비트로 이루어진다. 4-PAM과 마찬가지로 규칙을 적용하면 8-PAM

의 비트 오류 확률은 다음의 3 가지(class I, II, III) 경우를 가진다.

Class I 은 첫 번째 비트가 오류가 되는 경우로 결정 경계는 0 이되며 이 경우 BER 은 다음과 같다.

$$P_b(1) = \frac{1}{8} \left[ \operatorname{erfc} \left\{ \frac{d}{\sqrt{N_0}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ \frac{3d}{\sqrt{N_0}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ \frac{5d}{\sqrt{N_0}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ \frac{7d}{\sqrt{N_0}} \right\} \right]$$

Class II 는 두 번째 비트가 오류가 되는 경우로 결정 경계는  $-4d$ 와  $4d$ 가 되며 이 경우 두 번째 비트가 오류가 될 확률은

$$P_b(2) = \frac{1}{8} \left[ 2\operatorname{erfc} \left\{ \frac{d}{\sqrt{N_0}} \right\} + 2\operatorname{erfc} \left\{ \frac{3d}{\sqrt{N_0}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ \frac{7d}{\sqrt{N_0}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ \frac{9d}{\sqrt{N_0}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ \frac{11d}{\sqrt{N_0}} \right\} \right] \quad (11)$$

이다.

Class III 는 세 번째 비트가 오류가 되는 경우로 결정 경계는  $-6d, -2d, 2d$ , 그리고  $6d$ 가 되며 이 경우 세 번째 비트가 오류가 될 확률은

$$P_b(3) = \frac{1}{8} \left[ 4\operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{7}} \right\} + 3\operatorname{erfc} \left\{ 3\sqrt{\frac{\gamma}{7}} \right\} - 3\operatorname{erfc} \left\{ 5\sqrt{\frac{\gamma}{7}} \right\} - 2\operatorname{erfc} \left\{ 7\sqrt{\frac{\gamma}{7}} \right\} + 2\operatorname{erfc} \left\{ 9\sqrt{\frac{\gamma}{7}} \right\} + \operatorname{erfc} \left\{ 11\sqrt{\frac{\gamma}{7}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ 13\sqrt{\frac{\gamma}{7}} \right\} \right] \quad (12)$$

가 된다. 최종적으로 8-PAM 신호의 평균 비트 오류 확률은 위의 식 (10), (11), (12)를 평균 취함으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_b = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 P_b(k) \quad (13)$$

## 3. 16-PAM 신호의 BER

16-PAM의 각 심볼은  $i_1, i_2, i_3, i_4$ 의 4비트로 이루어진다. 위와 같은 규칙을 적용하여 16-PAM의 평균 비트 오류 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P_b = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 P_b(k) \quad (14)$$

여기서,

$$P_b(1) = \frac{1}{16} \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{3d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{5d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. + \operatorname{erfc}\left(\frac{7d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{9d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{11d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. + \operatorname{erfc}\left(\frac{13d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{15d}{\sqrt{N_0}}\right) \right] \quad (15)$$

$$P_b(2) = \frac{1}{16} \left[ 2\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{N_0}}\right) + 2\operatorname{erfc}\left(\frac{3d}{\sqrt{N_0}}\right) + 2\operatorname{erfc}\left(\frac{5d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. + 2\operatorname{erfc}\left(\frac{7d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{9d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{11d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. + \operatorname{erfc}\left(\frac{13d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{15d}{\sqrt{N_0}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{17d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. - \operatorname{erfc}\left(\frac{19d}{\sqrt{N_0}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{21d}{\sqrt{N_0}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{23d}{\sqrt{N_0}}\right) \right] \quad (16)$$

$$P_b(3) = \frac{1}{16} \left[ 4\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{N_0}}\right) + 4\operatorname{erfc}\left(\frac{3d}{\sqrt{N_0}}\right) + 3\operatorname{erfc}\left(\frac{5d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. + 3\operatorname{erfc}\left(\frac{7d}{\sqrt{N_0}}\right) - 3\operatorname{erfc}\left(\frac{9d}{\sqrt{N_0}}\right) - 3\operatorname{erfc}\left(\frac{11d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{13d}{\sqrt{N_0}}\right) - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{15d}{\sqrt{N_0}}\right) + 2\operatorname{erfc}\left(\frac{17d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. + 2\operatorname{erfc}\left(\frac{19d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{21d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{23d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. - \operatorname{erfc}\left(\frac{25d}{\sqrt{N_0}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{27d}{\sqrt{N_0}}\right) \right] \quad (17)$$

$$P_b(4) = \frac{1}{16} \left[ 8\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{N_0}}\right) + 7\operatorname{erfc}\left(\frac{3d}{\sqrt{N_0}}\right) - 7\operatorname{erfc}\left(\frac{5d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. - 6\operatorname{erfc}\left(\frac{7d}{\sqrt{N_0}}\right) + 6\operatorname{erfc}\left(\frac{9d}{\sqrt{N_0}}\right) + 5\operatorname{erfc}\left(\frac{11d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. - 5\operatorname{erfc}\left(\frac{13d}{\sqrt{N_0}}\right) - 4\operatorname{erfc}\left(\frac{15d}{\sqrt{N_0}}\right) + 4\operatorname{erfc}\left(\frac{17d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. + 3\operatorname{erfc}\left(\frac{19d}{\sqrt{N_0}}\right) - 3\operatorname{erfc}\left(\frac{21d}{\sqrt{N_0}}\right) - 2\operatorname{erfc}\left(\frac{23d}{\sqrt{N_0}}\right) \right. \\ \left. + 2\operatorname{erfc}\left(\frac{25d}{\sqrt{N_0}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{27d}{\sqrt{N_0}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{29d}{\sqrt{N_0}}\right) \right] \quad (18)$$

로 각각 첫 번째 비트 두 번째 비트 세 번째 비트 네 번째 비트가 오류가 될 확률이다

#### 4. I-ary PAM의 일반화된 BER

위 결과들로부터 PAM 신호의 비트 오류 확률 유도 과정의 규칙성을 살펴보면 다음과 같다. k번째 비트가 오류가 될 확률  $P_b(k)$ 는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$P_b(k) = \frac{1}{I} \sum X_I(k) \operatorname{erfc}\left(\frac{Y_I(k) d}{\sqrt{N_0}}\right) \quad (19)$$

먼저  $k = \log_2 I$  일 때  $X_I(k)$ 는 1/2부터 시작한 다. 두 번째 항은 첫 번째 항에 비하여 그 값이 하나 감소하며, 세 번째 항은 두 번째 항의 부호가 바뀐 형태이다. 네 번째 항은 세 번째 항에 비하여 그 값이 하나 증가하며, 다섯째 항은 네 번째 항의 부호가 바뀐 형태이다. 이 과정이  $X_I(k)$ 가 -1이 될 때까지 반복된다.  $k=1$ 일 때  $X_I(k)$ 는 항상 1이며  $X_I(k)$ 항의 개수는 1/2이다. 다른 k 값들에 대하여 I가 2배로 증가할 때마다  $X_I(k)$ 의 전체 개수도 두 배로 증가한다. 같은 규칙이 부호가 바뀌지 않고 그 값이 계속되는 런(run) 특성에 대하여도 적용된다.  $Y_I(k)$ 는 첫째 항이 1 이고 마지막 항이  $2[(1-2^k)I-1]+1$ 인 공차 2의 등차 수열을 이룬다.

이러한 규칙성을 바탕으로 Gray 부호화된 I-ary PAM신호의 평균 비트 오류 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P_b = \frac{1}{\log_2 I} \sum_{k=1}^{\log_2 I} P_b(k) \quad (20)$$

여기서

$$P_b(k) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{(1-2^k)I-1} (-1)^{i \cdot \frac{2^{k-1}}{I}} \left\{ 2^{k-1} - \left\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{I} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right\} \\ \operatorname{erfc}\left( (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 I \cdot \gamma}{2(I^2-1)}} \right) \quad (21)$$

으로 k번째 비트가 ( $k = 1, 2, 3, \dots, \log_2 I$ ) 오류가 될 확률이다. 식 (21)에서  $\lfloor x \rfloor$ 는 x를 넘지 않는 최대 정수이며  $\gamma = \frac{E_b}{N_0}$ 는 비트당 신호대 잡음비이다. 식 (21)에서 I=2 이면 잘 알려진 BPSK의 비트 오류 확률식이 된다.

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})$$

#### IV. R-QAM의 일반화된 BER

Rectangular QAM은 독립적인 동상(in-phase) 성분과 직교(quadrature) 성분의 두 개의 PAM으로 구성된다. 즉, 동상 성분의 I-ary PAM과 직교 성분의

J-ary PAM으로 R (IXJ)-QAM을 구성할 수 있다. 그림 2에는 32 (8×4)-QAM의 신호 배치도를 나타내었다.

이러한 신호 배치 아래에서 신호점간의 최소거리 2d와 평균 비트 에너지  $E_b$ 와는 다음의 관계를 갖는다.

$$d = \sqrt{\frac{3 \log_2(I \cdot J) \cdot E_b}{(I^2 + J^2 - 2)}} \quad (23)$$

이제 동상 성분의 k 번째 비트와 직교 성분의 l 번째 비트가 오류 확률을 식 (23)을 이용하여 각각 SNR의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$P_I(k) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{(I-2)k-1} (-1)^{\lfloor \frac{i+2^{k-1}}{I} \rfloor} \left\{ 2^{k-1} - \left\lfloor \frac{i+2^{k-1}}{I} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right\} \operatorname{erfc} \left\{ (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2(I \cdot J) \cdot \gamma}{(I^2 + J^2 - 2)}} \right\} \quad (24)$$

$$P_J(l) = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{(J-2)l-1} (-1)^{\lfloor \frac{j+2^{l-1}}{J} \rfloor} \left\{ 2^{l-1} - \left\lfloor \frac{j+2^{l-1}}{J} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right\} \operatorname{erfc} \left\{ (2j+1) \sqrt{\frac{3 \log_2(I \cdot J) \cdot \gamma}{(I^2 + J^2 - 2)}} \right\} \quad (25)$$

최종적으로 Gray 부호화된 임의의 I·J rectangular QAM 신호의 일반화된 BER 식은 식 (24)와 식 (25)을 평균함으로써 다음과 같이 구할

수 있다.

$$P_b = \frac{1}{\log_2(I \cdot J)} \left[ \sum_{k=1}^{\log_2 I} P_I(k) + \sum_{l=1}^{\log_2 J} P_J(l) \right] \quad (26)$$

식 (26)에서 I=2 이고 J=1 이면, 또는 I=2, J=2 이면 식 (26)은 각각 잘 알려진 BPSK 또는 QPSK 의 비트 오류 확률식 (22)가 된다. I=J=√M 이면 식 (26)은 참고문헌 [6]의 M-ary square QAM의 BER 식이 된다. J=1 이면 식 (26)은 I-ary PAM의 BER 식 (20) 이 된다.

그림 3에는 가우시안 채널에서 여러 R-QAM에 대한 정확한 BER을 신호대잡음비의 함수로 나타내었다. 그림 3으로부터 평균 비트오류 확률을 10<sup>-3</sup> 을 유지할 때, 동상 채널과 직교 채널의 각 차원 (dimension)당 1비트 증가 시켜서 보낼 때 마다 약 4~5dB 의 신호전력이 더 필요함을 알 수 있다.

높은 신호대 잡음비(SNR)에 대하여, 식 (25)와 식 (26)의 각각 i=0, j=0항이 전체 결과값에 지배적이며 나머지 항들을 무시할 수 있으므로 이 경우 임의의 R-QAM의 BER 근사식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$P_b \approx \frac{1}{\log_2(I \cdot J)} \left[ \frac{I-1}{I} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 \log_2(I \cdot J) \cdot \gamma}{(I^2 + J^2 - 2)}} \right\} + \frac{J-1}{J} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 \log_2(I \cdot J) \cdot \gamma}{(I^2 + J^2 - 2)}} \right\} \right] \quad (27)$$

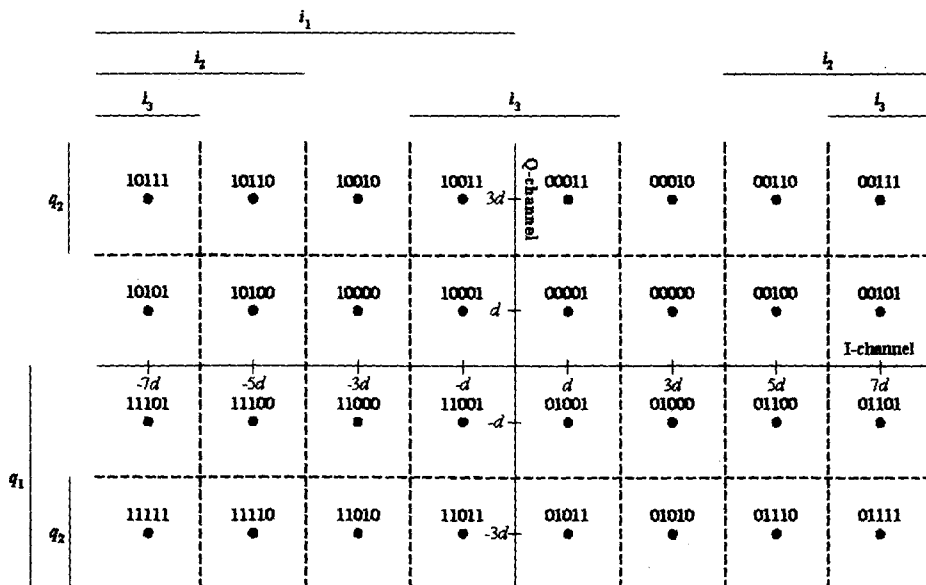


그림 2. 32(8×4)-QAM의 신호 배치도

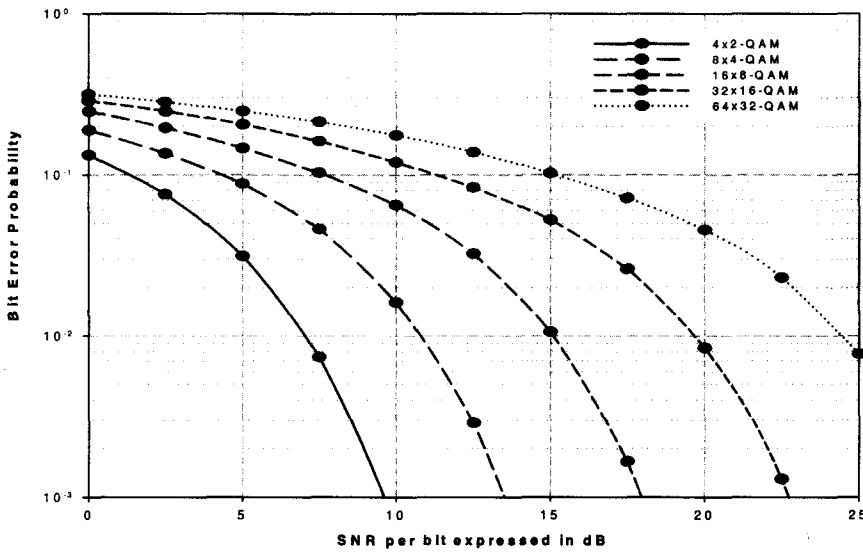


그림 3. AWGN 채널에서 rectangular QAM 신호의 평균 BER

식 (27)에서  $I=J=\sqrt{M}$  일 때, 식 (27)는 다음과 같은 참고문헌 [4, (7.24)]의 M-ary square QAM 신호의 BER 근사식으로 돌아간다.

$$P_b \approx \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right) \quad (28)$$

### V. 결론

이 논문에서는 가산성 백색 가우시안 잡음 환경에서 Gray 부호화된 임의의 rectangular QAM 신호의 일반화된 정확한 BER 식을 처음으로 유도하고 분석하였다. 또한 높은 신호대 잡음비에 대하여 간단한 근사식도 유도하였다. 유도된 정확한 결과식이나 근사식 모두에서 특별한 경우에 (I나, J나 j값 등에 따라) 기존의 잘 알려진 정방형 QAM 신호 또는 BPSK 신호의 BER 표현식으로 돌아감을 확인하였다. 이 논문에서 표현한 결과식은 BPSK, QPSK, 정방형 QAM 신호를 포함하는 임의의 R-QAM 신호의 BER 계산을 편리하게 계산할 수 있게 하여주며, 정확한 BER 성능 기준을 제시하는데 충분히 일반적이다.

### 참고 문헌

[1] W. T. Webb and L. Hanzo, *Modern Quadrature Amplitude Modulation*, IEEE Press, 1994

[2] M. P. Fitz and J. P. Seymour, "On the Bit Error Probability of QAM Modulation," *International Journal of Wireless Information Networks*, vol. 1, no. 2, pp.131-139, 1994

[3] J. Lu, K. B. Letaief, J. C-I Chuang, and M. L. Liou, "M-PSK and M-QAM BER Computation Using Signal-Space Concepts," *IEEE Trans. Commun.*, vol.47, pp.181-184, Feb. 1999

[4] B. Sklar, *Digital Communications*, Prentice-Hall, 1988

[5] L. Yang and L. Hanzo, "A Recursive Algorithm for the Error Probability Evaluation of M-ary QAM," *IEEE Comm. Letters*, vol. 4, No. 10, pp.304-306, Oct. 2000.

[6] D. Yoon, K. Cho, and J. Lee, "Bit Error Probability of M-ary Quadrature Amplitude Modulation", *IEEE VTC Fall 2000*. (to appear in *IEEE Trans. Commun.*)

[7] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic, 1980

[8] W. J. Weber, III, "Differential Encoding for Multiple Amplitude and Phase Shift Keying Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 26, pp. 385-391, March 1978

[9] M. K. Simon, S. M. Hinedi and W. C. Lindsey, *Digital Communication Techniques*, Prentice-

Hall, 1995

윤 동 원(Dong-weon Yoon)



1989년 : 한양대학교 전자통신공  
학과 졸업(공학사)  
1992년 : 한양대학교 전자통신공  
학과 졸업(공학석사)  
1995년 : 한양대학교 전자통신공  
학과 졸업(공학박사)

1995~1997년 : 동서대학교 정보통신공학과 전임강사

1997~1997년 : 한국전자통신연구원 초빙연구원

2001~2002년 : 펜실베니아 주립대 방문교수

1997~현재 : 대전대학교 컴퓨터 정보통신공학부  
조교수

<주관심 분야> 무선통신, 이동통신, 디지털통신시스  
템

조 경 국(Kyong-kuk Cho)



1995년 : 한양대학교 전자통신공  
학과 졸업(공학사)  
1997년 : 한양대학교 전자통신공  
학과 졸업(공학석사)  
1997~2000년 : LG정보통신  
이동통신연구소 근무  
2000~현재 : LG전자 차세대  
통신연구소 근무

<주관심 분야> CDMA Modem, ASIC, 무선통신

서 기 범(Ki-bum Suh)



1989년 : 한양대학교 전자공학과  
졸업(공학사)  
1991년 : 한양대학교 전자공학과  
졸업(공학석사)  
2000년 : 한양대학교 전자공학과  
졸업(공학박사)  
2000~2002년 : 한국전자통신  
연구원 선임연구원

2002~현재 : 우송대학교 컴퓨터전자정보공학부  
전임강사

<주관심 분야> 영상통신코덱, ASIC, 디지털통신시  
스템