

# 이차 이산 시스템의 Peak Overshoot을 최소화하기 위한 영점의 위치 설계

論 文  
51D-11-1

## Design of the Zero Location for Minimizing the Peak Overshoot of Second-Order Discrete Systems

李宰碩\* · 鄭台相\*\*  
(Jae Seok Lee · Tae-Sang Chung)

**Abstract** - The damping ratio  $\zeta$  of the unit-step response of a second-order discrete system is a function of only the location of the closed-loop poles and is not directly related to the location of the system zero. However, the peak overshoot of the response is the function of both the damping ratio  $\zeta$  and an angle  $\alpha$ , which is the phasor angle of the damped sinusoidal response and is determined by the relative location of the zero with respect to the closed-loop poles. Therefore, if the zero and the open-loop poles are relatively adjusted, through pole-zero cancellation, to maintain the desired (or designed) closed-loop poles, the damping ratio  $\zeta$  will also be maintained, while the angle  $\alpha$  changes. Accordingly, when the closed-loop system poles are fixed, the peak overshoot is considered as a function of the angle  $\alpha$  or the system zero location. In this paper the effects of the relative location of the zero on the system performance of a second-order discrete system is studied, and a design method of digital compensator which achieves a minimum peak overshoot while maintaining the desired system mode and the damping ratio of the unit step response is presented.

**Key Words** : 이차 이산 시스템, 단위계단 응답, 포락선 곡선, 최대 오버슈트, 감쇠비, 극점, 영점

### 1. 서 론

이차 이산 시스템(second-order discrete system)의 시간 영역에서의 성능은 일반적으로 단위계단 함수(unit-step function)를 인가했을 때의 응답특성으로 규정할 수 있다. 단위계단 입력에 대한 시스템의 응답특성으로는 최대 오버슈트(peak overshoot), 정착시간(settling time), 상승시간(rise time) 등이 정의된다[1-3]. 또한 제어시스템 설계의 중요한 요소인 시스템의 안정성 및 응답의 감쇠비(damping ratio)  $\zeta$ 는  $z$  영역에서 특성방정식(characteristic equation)의 근, 즉 폐루프 극점(closed-loop poles)의 위치에 의하여 결정된다. 폐루프 극점의 위치는 개루프 극점(open-loop poles)과 영점(zero)의 상대적 위치관계와 전향이득(feed-forward gain)의 크기로 결정된다. 주의할 점은, 극점과는 달리 개루프 시스템의 영점과 폐루프 시스템의 영점은 같은 값이 되므로, 앞으로 개루프/폐루프의 구분 없이 단지 영점으로 표현한다.

제어시스템 설계에 있어서의 고려할 중요 변수중의 하나는 단위계단 입력에 대한 응답의 감쇠비이다. 그런데 이산 시스템의 응답은 시간 축에서 불연속 이산함수이므로 응답함수의 감쇠비  $\zeta$ 의 정의는 곤란하나, 모든 불연속 응답 점들을 포함하는 연속함수, 즉 포락선 곡선(envelope curve)의

감쇠비  $\zeta$ 로 대체할 수 있다[1, 3]. 이렇게 할 경우, 감쇠비  $\zeta$ 는 시스템의 폐루프 극점만의 함수로 표현되며 시스템의 영점의 위치와는 직접적인 관련이 없음이 밝혀졌다[1, 3].

시스템의 응답이 감쇠 정현파와 진동일 경우에 응답이 정상상태치로부터 일정 범위(예를 들어  $\pm 2\%$ )안에 수렴하여, 이 범위 안에서 정상상태치로 감쇠되어 도달할 때까지의 시간을 정착시간이라 할 때, 이 시간은 정현파의 위상각에 따라 약간의 차이가 있으므로, 정현파의 피크(peak)치를 연결하는 감쇠곡선(exponential decay curve)이 범위 안에 들어오는 시간으로 대체할 경우가 많다[1]. 이 감쇠곡선은 폐루프 극점의 크기(magnitude)의 지수함수로 표현되며 감쇠하기 위하여 1보다 작다. 그러므로 응답의 정착시간도 폐루프 극점의 크기에 의해서만 결정되며 시스템의 영점과는 직접적인 관계가 없다.

제어시스템의 단위계단 응답(unit-step response)의 최대 오버슈트는, 시스템의 실현에 있어서 전원 용량 등에 직접적인 영향을 미치는 등의 이유로 제어기 설계에 고려되는 중요한 특성이 된다. 그런데 단위계단 응답의 최대 오버슈트는 감쇠비  $\zeta$ 와 각  $\alpha$ 의 함수로 표현된다. 여기서 각  $\alpha$ 는 감쇠 정현파와 진동의 위상각이며, 복소수 평면상에서 폐루프 극점과 영점의 상대적 위치에 의하여 결정된다[1].

시스템의 폐루프 극점의 위치를 고정되게 하는 조건 하에서, 개루프 극점과 영점의 위치와 상응하는 전향이득을 상대적으로 조정할 경우에 시스템의 감쇠비  $\zeta$ 는 불변이며, 단위계단 응답의 정착시간도 감쇠 정현파 응답의 위상각 변화에 따른 약간의 변화를 제외하고는 기본적으로 변화가 없다. 그러나 고정된 폐루프 극점과 영점의 상대적 위치 변화에

\* 正 會 員 : 中央大 工大 制御計測工學科 博士課程

\*\* 正 會 員 : 中央大 工大 電子電氣工學部 教授 · 工博

接受日字 : 2002年 6月 12日

最終完了 : 2002年 10月 22日

의하여 각  $\alpha$ 는 변하게 된다. 따라서 페루프 복소수 극점이 고정된다면(감쇠비  $\xi$ 와 정착시간 고정), 응답의 최대 오버슈트는 각  $\alpha$ 만의 함수이고, 이는 다시 말해 영점만의 함수가 된다. 이 관찰을 이용하면, 기 설계된 제어시스템에서 영점의 위치조정만으로 단위계단 입력에 대한 응답의 최대 오버슈트를 최소화 할 수 있다.

이 논문에서는 이차 이산 시스템의 성능에 미치는 영점의 영향을 연구하여, 단위계단 입력에 대한 응답의 감쇠비와 정착시간을 제어 성능에서 요구하는 값으로 유지하면서도, 추가적으로 응답의 최대 오버슈트를 최소화하는 보상기를 설계하는 방법을 제안한다.

## 2. 이차 이산 시스템의 특성

이 장에서는 본 논문의 이론을 유도하기 위하여 먼저 이차 이산 제어시스템의 극점과 영점 그리고 시스템 응답특성 등에 대하여 기술하고자 한다.

### 2.1 이차 이산 시스템의 단위계단 입력에 대한 응답

실제의 많은 고차의 응용시스템은 이차 시스템 모형으로 축약할 수 있으므로 이차 시스템의 특성을 연구하는 것은 제어공학 등에서 매우 중요하다[1]. 정형 모델의 연속 이차 시스템(prototype continuous second-order system)의 이산화(discretization)의 결과로 주어지는, 이차 개루프 시스템의 전달함수(transfer function)는 일반적으로 서로 다른 두 개의 실수 극점  $p_1, p_2$ 와 한 개의 실수 영점  $z_1$ 을 가지며, 전향이득을  $K$ 로 할 때 아래와 같이 표현된다[1].

$$G(z) = \frac{K(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)} \quad (1)$$

안정도 등을 고려한 제어목표를 달성하기 위하여 아래의 그림 1에 보인 블록선도(block-diagram)와 같이 단위 피이드백(feedback)을 취하여 페루프 제어시스템이 구성되며, 이 경우의 페루프 시스템의 전달함수는 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{G(z)}{1+G(z)} \\ &= \frac{K(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)+K(z-z_1)} \quad (2) \\ &= \frac{K(z-z_1)}{z^2-(p_1+p_2-K)z+(p_1p_2-Kz_1)} \end{aligned}$$

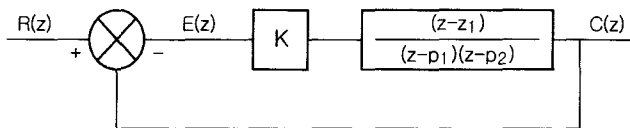


그림 1 전형적인 이차 이산 시스템  
Fig. 1 A Typical Second-Order Discrete System

식 (2)의 분모를 0으로 하는 식이 시스템의 특성방정식으로 아래와 같이 주어진다.

$$z^2-(p_1+p_2-K)z+(p_1p_2-Kz_1) = 0 \quad (3)$$

이 방정식은  $K$  값에 따라 두 개의 실근을 갖거나 한 쌍의 공액복소수 근을 갖게 된다. 이 근들을 페루프 극점이라고 한다. 전향이득  $K$ 의 연속적 변화에 대한 두 복소수 근의 궤적을 근궤적(root loci)이라고 한다. 어떠한 경우이든, 시스템의 안정도를 위하여 이 페루프 극점은 복소수 평면상에서 단위원 안에 있도록  $K$ 값이 설정되어야 한다.

산업체에서 사용되는 실제의 시스템은 빠른 응답을 얻고 상승시간을 줄이기 위하여, 오버슈트를 일으키는 감쇠 정현과 응답(damped sinusoidal response)을 하도록 제어기가 설계되는 경우가 많은데, 이는 페루프 극점이 단위원 안에서 두 개의 공액복소수를 갖게 되는 경우이다. 이 경우 공액복소수 극점을  $p/\pm\phi$ 로 표시하면 (2)의 이차 페루프 이산 시스템은 다음의 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{K(z-z_1)}{(z-pe^{j\phi})(z-pe^{-j\phi})} \\ &= \frac{K(z-z_1)}{z^2-2p z \cos \phi + p^2} \quad (4) \end{aligned}$$

여기서  $p$ 는 페루프 공액복소수 극점의 크기(magnitude)이고,  $\phi$ 는 그것의 위상각(phase angle)이다.

식 (3)과 (4)로부터 다음의 관계가 유도된다:

$$p = \sqrt{p_1p_2 - Kz_1} \quad (5)$$

$$\cos \phi = \frac{p_1 + p_2 - K}{2p} \quad (6)$$

각  $\phi$ 는 범위  $[0, \pi]$ 에서  $\sin \phi$ 가 0보다 크거나 같으므로 atan2 함수를 이용하여 다음의 식으로 주어진다:

$$\phi = \text{atan2}(\sqrt{1 - \cos^2 \phi}, \cos \phi) \quad (7)$$

이득  $K$ 가 결정되면 (5)에 의하여 극점의 크기가 먼저 결정되고, 또한 (6)에 의하여 각의  $\cos$ 값이 결정되면 (7)에 의하여 각  $\phi$ 가 결정된다.

식 (2) 혹은 (4)의 이차 이산 시스템에 단위계단 함수를 인가하였을 때, 단위계단 응답은  $z$  영역에서 다음과 같다.

$$C(z) = \frac{z}{z-1} \frac{K(z-z_1)}{(z-pe^{j\phi})(z-pe^{-j\phi})} \quad (8)$$

식 (8)의 우변을 분자의  $z$ 항이 남아 있도록 부분분수로 분할하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$C(z) = c_{ss} \left\{ \frac{z}{z-1} - \left( \frac{Be^{j\alpha}z}{z-pe^{j\phi}} + \frac{Be^{-j\alpha}z}{z-pe^{-j\phi}} \right) \right\} \quad (9)$$

여기서  $c_{ss}$ 는 시스템이 안정되어 있을 때, 즉 페루프 극점이 단위원 안에 있을 때의 정상상태의 응답치(steady-state response)로서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_{ss} = \left[ (1-z^{-1})C(z) \right] \Big|_{z=1} = \frac{K(1-z_1)}{(1-pe^{j\phi})(1-pe^{-j\phi})} = \frac{K(1-z_1)}{1-2p\cos\phi+p^2} \quad (10)$$

이 식은 단위응답의 정상상태 응답(steady-state response)을 페루프 극점과 영점, 그리고 전향이득의 함수로 표현하는 식이다.

또한 (9)의 상수  $Be^{j\alpha}$ 는 다음처럼 구할 수 있다.

$$Be^{j\alpha} = -\frac{1}{c_{ss}} \left[ \frac{C(z)}{z} (z-pe^{j\phi}) \right] \Big|_{z=pe^{j\phi}} = \frac{(1-pe^{-j\phi})(pe^{j\phi}-z_1)}{(1-z_1)(pe^{j\phi}-pe^{-j\phi})} \quad (11)$$

식 (11)의 양변의 두 복소수의 각과 절대치가 각각 서로 같음을 적용하여 아래의 두 관계를 유도한다.

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg(1-pe^{-j\phi}) + \arg(pe^{j\phi}-z_1) \\ &\quad - \arg(1-z_1) - \arg(pe^{j\phi}-pe^{-j\phi}) \\ &= \text{atan2}(p\sin\phi, 1-p\cos\phi) \\ &\quad + \text{atan2}(p\sin\phi, p\cos\phi-z_1) \\ &\quad - \text{atan2}(0, 1-z_1) - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$2B = 2 \frac{|1-pe^{-j\phi}| |pe^{j\phi}-z_1|}{|1-z_1| |pe^{j\phi}-pe^{-j\phi}|} \quad (13)$$

각  $\alpha$ 와  $2B$ 의 값은 (12)와 (13)을 통해 계산적으로 구할 수 있으나, 그림 2에 나타난 것과 같이 복소수 평면상에서 기하학적 해석을 얻을 수 있으며, 이는 이 논문에서 제안하는 이론의 직관적인 이해를 도와 준다.

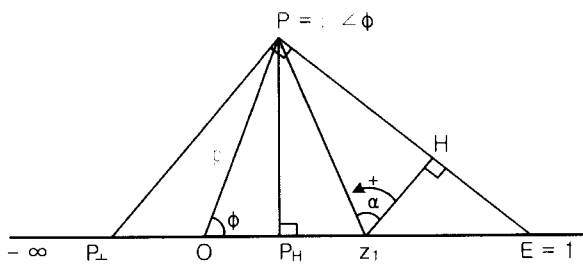


그림 2  $P_1 \leq z_1 < 1$  인 경우의 각  $\alpha$ 의 기하학적 해석  
Fig. 2 Geometric Interpretation of Phasor Angle  $\alpha$  for  $P_1 \leq z_1 < 1$

그림 2에서 극점  $pe^{j\phi}$ 과 점  $E(z=1)$ 을 잇는 직선에 극점에서 수직선을 긋고 이 수직선이 실축과 만나는 점을  $P_1$ 라 하자. 그리고 극점에서 실축에 내린 수선의 발을  $P_H$ 라고 하자. 그러면 삼각형  $\triangle EP_1P$ 과  $\triangle EPP_1$ 는 닮은꼴이므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{P_1H}{PE} &= \frac{1-p\cos\phi}{\sqrt{(1-p\cos\phi)^2+(p\sin\phi)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(1-p\cos\phi)^2+(p\sin\phi)^2}}{1-P_1} = \frac{PE}{P_1E} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)를 정리하면,  $P_1$ 의  $x$  좌표가 구해진다.

$$P_1 = \frac{p(\cos\phi-p)}{1-p\cos\phi} \quad (15)$$

극점  $pe^{j\phi}$ 과 점  $E$ 를 잇는 직선에 영점에서 수선을 내리고 그 발을  $H$ 라고 하자. 영점의  $P_1$ 과  $E$ 점에 대한 상대적 위치에 따라 세 경우로 나누어 생각한다. 그림 2는 영점이  $P_1$ 점과  $E$ 점의 사이에 존재하는 경우, 즉  $P_1 \leq z_1 < 1$ 의 경우를 나타내며,  $-\infty < z_1 \leq P_1$ 과  $1 < z_1$ 의 경우는 각각 그림 3과 그림 4에 나타나 있다. (12)로 표현되는 각  $\alpha$ 의 크기와 부호는 그림 2부터 그림 4까지를 참고하여 다음과 같이 기하학적 해석을 얻을 수 있다.

그림 2는  $P_1 \leq z_1 < 1$ ,  $\arg(1-z_1)=0$ 인 경우이며 이때 각  $\alpha$ 는 (12)로부터 다음과 같이 해석된다.

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg(1-pe^{-j\phi}) + \arg(pe^{j\phi}-z_1) - \frac{\pi}{2} \\ &= \arg(pe^{j\phi}-z_1) - \left( \frac{\pi}{2} - \arg(1-pe^{-j\phi}) \right) \\ &= \angle Pz_1E - \angle Ez_1H = \angle Pz_1H \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

이 경우 영점  $z_1$ 을  $P_1 \leq z_1 < 1$ 의 범위 안에서 슬라이딩할 때의  $\angle Pz_1H$ 의 범위는 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

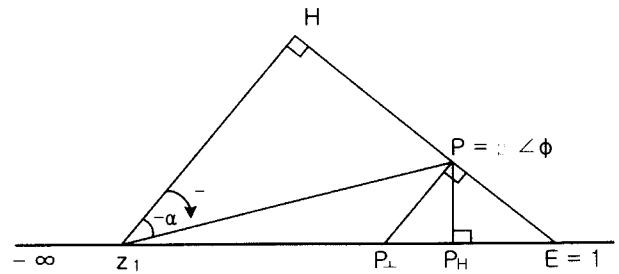


그림 3  $-\infty < z_1 \leq P_1$  인 경우의 각  $\alpha$ 의 기하학적 해석  
Fig. 3 Geometric Interpretation of Phasor Angle  $\alpha$  for  $-\infty < z_1 \leq P_1$

그림 3은  $-\infty < z_1 \leq P_1$ ,  $\arg(1-z_1)=0$  인 경우로 각  $\alpha$ 는 역시 (12)로부터 아래와 같이 해석된다.

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg(1-pe^{-j\phi}) + \arg(pe^{j\phi}-z_1) - \frac{\pi}{2} \\ &= \arg(pe^{j\phi}-z_1) - \left(\frac{\pi}{2} - \arg(1-pe^{-j\phi})\right) \quad (18) \\ &= \angle Pz_1E - \angle Ez_1H = -\angle Pz_1H \leq 0 \end{aligned}$$

식 (16)과 (18)의 차이점은 각의 구성은 같으나 단지 부호가 달라지는 것이다. 그림 3의 경우 각  $\alpha$ 의 범위는 기하학적으로 아래의 식으로 주어진다.

$$-\text{atan2}(1-p\cos\phi, p\sin\phi) \leq \alpha \leq 0 \quad (19)$$

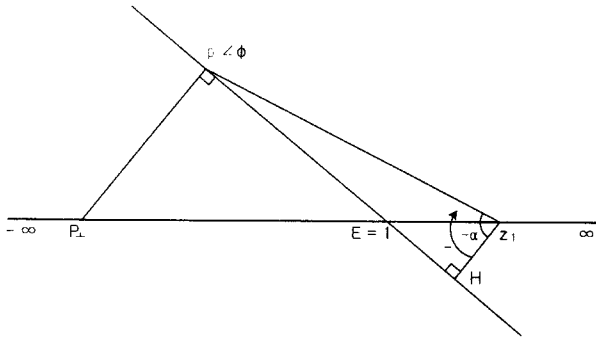


그림 4  $1 < z_1 < \infty$  인 경우의 위상각  $\alpha$ 의 기하학적 해석  
Fig. 4 Geometric Interpretation of Phasor Angle  $\alpha$  for  $1 < z_1 < \infty$

마지막으로 그림 4의 경우는  $1 < z_1 < \infty$ ,  $\arg(1-z_1)=-\pi$  인 경우로 각  $\alpha$ 의 해석은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg(1-pe^{-j\phi}) + \arg(pe^{j\phi}-z_1) - \pi - \frac{\pi}{2} \\ &= -\left\{(\pi - \arg(pe^{j\phi}-z_1)) + \left(\frac{\pi}{2} - \arg(1-pe^{-j\phi})\right)\right\} \quad (20) \\ &= -\angle Pz_1H \end{aligned}$$

역시 기하학적 해석으로 각  $\alpha$ 의 범위는 아래의 식으로 주어진다.

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq -\text{atan2}(1-p\cos\phi, p\sin\phi) \quad (21)$$

그림 2, 그림 3, 그리고 그림 4를 참고하여 (12)를 기하학적으로 해석하면, 각  $\alpha$ 의 크기는  $\angle Pz_1H$  이 되며, 각의 부호는 영점  $z_1$ 에서 점  $E$ 와 극점  $pe^{j\phi}$ 를 잇는 선에 수직으로 내려그은 선으로부터 직선  $\overrightarrow{z_1 p/\phi}$  까지 반시계 방향으로 측정된 각이 된다. 이상의 그림들과 (12)에서 볼 수 있듯이,

페루프 극점을 고정하고서 영점  $z_1$ 이 실축을 따라 슬라이딩할 경우 각  $\alpha$ 도 따라서 변한다. 이 각의 범위는 아래와 같다.

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (22)$$

그리고 (13)으로 주어지는  $2B$  역시 두 개의 닳은꼴 삼각형  $\triangle Ez_1H$ 와  $\triangle EPP_H$ 를 통해 각  $\alpha$ 의 함수로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} 2B &= \frac{2|1-pe^{-j\phi}| |pe^{j\phi}-z_1|}{|1-z_1| |pe^{j\phi}-pe^{-j\phi}|} \\ &= \frac{2EP \times z_1P}{z_1E \times (2PP_H)} \\ &= \frac{EP}{z_1E \times PP_H} \times z_1P \quad (23) \\ &= \frac{1}{z_1H} \times z_1P = \frac{z_1P}{z_1H} \\ &= \frac{1}{\cos(|\alpha|)} = \frac{1}{\cos\alpha} \end{aligned}$$

이제 단위계단 응답은 극점이 단위원 안에 있어서 시스템이 안정된 경우, (9)의 역  $z$ -변환으로 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} c(k) &= c_{ss}\{1 - [Be^{j\alpha}(pe^{j\phi})^k + Be^{-j\alpha}(pe^{-j\phi})^k]\} \\ &= c_{ss}\{1 - 2Bp^k \cos(k\phi + \alpha)\} \quad (24) \\ &= c_{ss}\left\{1 - \frac{p^k}{\cos\alpha} \cos(k\phi + \alpha)\right\} \end{aligned}$$

식 (24)에서 나타난 것과 같이 각  $\alpha$ 는 감쇠 정현파의 위상이 됨을 알 수 있고, 더구나  $\cos\alpha$ 항이 분모에 있는 관계로 최대 오버슈트에 영향을 끼침을 알 수 있다. 페루프 극점의 위치가 고정된 경우( $p$ 와  $\phi$ 고정)는, (12)로 계산되어지는 위상각  $\alpha$ 를 알면 (24)와 같이 이차 이산 시스템의 단위계단 응답  $c(k)$ 를 구할 수 있는데, 여기서 위상각  $\alpha$ 는 그림 2, 그림 3, 그림 4에서 기하학적으로 해석되어진 것과 같이 영점의 위치  $z_1$ 의 함수이다[1, 4].

### 2.2 이차 이산 단위계단 응답의 포락선

식 (24)로 주어지는 이차 이산 시스템의 이산 응답의 모든 점들을 지나는 포락선 곡선은 이차 연속 시스템의 응답을 고려하여 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} c(k) &= c_{ss}\left\{1 - \frac{p^k}{\cos\alpha} \cos(k\phi + \alpha)\right\} \\ &= c_{ss}\left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\cos\alpha} \cos(\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} + \alpha)\right\} \Big|_{t=kT} \quad (25) \\ &= c_{ss}\left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n kT}}{\cos\alpha} \cos(\omega_n kT \sqrt{1-\xi^2} + \alpha)\right\} \end{aligned}$$

여기서  $\omega_n$ 은 자유진동각 주기,  $\zeta$ 는 감쇠비, 그리고  $T$ 는 이산 시스템의 샘플링 주기로서 이산 시스템에 상응하는 연속 시스템에서 차용한 새로운 변수들이다. 이 변수들은 (25)로부터 아래의 관계식을 만족하여야 한다.

$$p = e^{-\zeta \omega_n T} \quad (26)$$

$$\phi = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} T \quad (27)$$

감쇠비  $\zeta$ 는 (26)과 (27)를 연립하여 풀면, 페루프 극점의 위치에 관한 변수로 표현할 수 있다. 먼저 (26)과 (27)로부터 각각  $\omega_n T$ 를 구하여 동치하면 다음과 같다.

$$\omega_n T = \frac{-\ln p}{\zeta} = \frac{\phi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (28)$$

식 (28)에서  $\zeta^2$ 를 구하면 다음과 같다:

$$\zeta^2 = \frac{\left(\frac{\ln p}{\phi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\ln p}{\phi}\right)^2} = \frac{(\ln p)^2}{\phi^2 + (\ln p)^2} \quad (29)$$

그러므로, 감쇠비  $\zeta$ 는 다음과 같이 페루프 극점의 크기  $p$ 와 위상각  $\phi$ 로 표현된다.

$$\zeta = \frac{-\ln p}{\sqrt{\phi^2 + (\ln p)^2}} \quad (30)$$

극점의 크기  $p$ 는 시스템이 안정되기 위하여 단위 길이보다 작으므로,  $\ln p < 0$ 이 되고 따라서 -의 부호가 (29)에서 (30)으로의 변환에 추가되어 있다.

식 (30)에서 보여주듯이 감쇠비  $\zeta$ 는 오직 페루프 극점  $p/\phi$ 만의 함수이며, 페루프 극점의 위치 형성에 관계되는 영점의 위치와는 직접적인 관계가 없음을 알 수 있다.

식 (30)의 결과를 (28)에 대입하여  $\omega_n T$ 의 다른 표현을 구할 수 있다.

$$\omega_n T = \frac{\phi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{-\ln p}{\zeta} = \sqrt{\phi^2 + (\ln p)^2} \quad (31)$$

이 관계식으로부터 아래와 같은 감쇠비  $\zeta$ 의 다른 유용한 표현식을 얻을 수 있다:

$$\sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + (\ln p)^2}} \quad (32)$$

### 2.3 연속 포락선 곡선의 최대 오버슈트

이산 응답  $c(k)$ 의 모든 점을 지나는 연속적인 포락선의 최대 오버슈트를 주는 시간 인덱스  $k_n$ 는, (25)에서  $k$ 를 연속 변수로 간주하고  $k$ 에 대하여 미분함으로써 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dc(k)}{dk} = & -c_{ss} \frac{p^k \ln p}{\cos \alpha} \cos(k\phi + \alpha) \\ & + c_{ss} \frac{p^k}{\cos \alpha} \phi \sin(k\phi + \alpha) \end{aligned} \quad (33)$$

식 (33)을 0으로 놓고 정리하면 아래와 같다:

$$-\ln p \cos(k\phi + \alpha) + \phi \sin(k\phi + \alpha) = 0 \quad (34)$$

삼각함수의 가법정리를 이용하여 (34)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{-\ln p}{\sqrt{\phi^2 + (\ln p)^2}} \cos(k\phi + \alpha) \\ & + \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + (\ln p)^2}} \sin(k\phi + \alpha) \\ & = \sin \theta \cos(k\phi + \alpha) + \cos \theta \sin(k\phi + \alpha) \\ & = \sin(k\phi + \alpha + \theta) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

여기서 (35)에 도입된 각  $\theta$ 는 (30)과 (32)를 고려하여 아래의 두 식을 만족하여야 한다.

$$\sin \theta = \frac{-\ln p}{\sqrt{\phi^2 + (\ln p)^2}} = \zeta \quad (36)$$

$$\cos \theta = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + (\ln p)^2}} = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (37)$$

따라서 (36)과 (37)로부터 각  $\theta$ 는 다음과 같이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} \theta & = \text{atan2}(\sin \theta, \cos \theta) = \text{atan2}(\zeta, \sqrt{1 - \zeta^2}) \\ & = \text{atan2}(-\ln p, \phi) \end{aligned} \quad (38)$$

식 (35)를 만족하는  $k$ 값은 주어진 미분계수를 0으로 하므로 단위계단 응답이 로컬 극대나 극소가 되는 시간이다.

$$k\phi + \alpha + \theta = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

개략적인 응답곡선으로 알 수 있듯이 최대 오버슈트는 첫 번째 극대점에서, 즉  $n = 1$  일 때 발생한다. 이때의  $k$ 값을  $k_p$ 라고 하면

$$\begin{aligned} k_p & = \frac{1}{\phi}(\pi - \alpha - \theta) \\ & = \frac{1}{\phi}[\pi - \alpha - \text{atan2}(\zeta, \sqrt{1 - \zeta^2})] \end{aligned} \quad (40)$$

최대 오버슈트는 (40)의  $k_p$ 값을 (25)에 대입하면 얻을 수 있다. 이를 위하여 아래의 두 식을 먼저 간략화하자. 먼저 (37)과 (39)로부터 다음이 계산된다.

$$\cos(k_p\phi + \alpha) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (41)$$

그러므로 (26), (31), (40)으로부터,

$$p^{k_p} = e^{-\zeta\omega_n T k_p} = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi - \alpha - \text{atan2}(\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}))} \quad (42)$$

식 (41)과 (42)의 관계를 이용하여 (25)로부터 최대 오버슈트 값이 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} c_p &= c(k_p) = c_{ss} \left\{ 1 - \frac{p^{k_p}}{\cos\alpha} \cos(k_p\phi + \alpha) \right\} \\ &= c_{ss} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\cos\alpha} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi - \alpha - \text{atan2}(\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}))} \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

따라서, 최대 오버슈트의 정상상태 값에 대한 퍼센트 비는 아래와 같이 된다:

$$\begin{aligned} POS &= \frac{c(k_p) - c_{ss}}{c_{ss}} \times 100\% \\ &= -\frac{p^{k_p}}{\cos\alpha} \cos(k_p\phi + \alpha) \times 100\% \\ &= \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\cos\alpha} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi - \alpha - \text{atan2}(\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}))} \times 100\% \end{aligned} \quad (44)$$

식 (43)과 (44)로 각각 주어지는 최대 오버슈트와 퍼센트 최대 오버슈트는 감쇠비  $\zeta$ 와 각  $\alpha$ 의 함수로 유일하게 결정된다. 여기서 감쇠비  $\zeta$ 는 (30)에 주어진 것과 같이 페루프 극점의 위치에 의해서만 좌우되고, 각  $\alpha$ 는 그림 2, 그림 3, 그리고 그림 4에서 설명된 것과 같이 페루프 극점에 대한 영점의 상대적 위치에 의해서만 결정된다. 따라서 주어진 제어의 목표 등에 의하여 시스템의 페루프 극점이 먼저 결정된다면, 시스템의 응답의 최대 오버슈트는, 설정된 페루프 극점의 위치를 고정하는 조건으로(감쇠비  $\zeta$  고정) 개루프 극점과 영점의 상대적 위치 이동으로(즉 각  $\alpha$ 의 변경) 변화됨을 알 수 있다.

이러한 관찰을 이용하여 이 논문에서는 이미 설계된 이산 제어기에, 응답의 최대 오버슈트가 최소화되게 하는 보상을 추가하는 방법을 제안하고자 한다. 이를 위하여 먼저 이차 이산 시스템의 개루프 극점, 영점, 그리고 전향이득의 상대적 변화에 따른 페루프 극점의 위치 이동, 즉 근궤적 곡선에 대하여 고찰하자.

### 2.4 이차 이산 시스템의 근궤적

식 (3)에서 주어진 특성방정식의 근궤적은 실축 상에서 영점과 극점의 상대적 위치관계가  $z_1 < p_1 < p_2$  을 만족하면 전향이득이 양수가 되는 범위에서 ( $K \geq 0$ ) 그림 5에서와 같이  $-\infty < z \leq z_1$  와  $p_1 \leq z \leq p_2$  의 반직선과 선분, 그리고 영점을 중심으로 하는 원(공액 복소수근)임이 밝혀져 있다[1]. 이 원의 반경과 원의 방정식은 각각 아래와 같다.

$$r = \sqrt{(p_1 - z_1)(p_2 - z_1)} \quad (45)$$

$$(x - z_1)^2 + y^2 = r^2 = (p_1 - z_1)(p_2 - z_1) \quad (46)$$

그림 5의 근궤적 상의 각 점에 해당하는 전향이득  $K$  값은 (3)으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$K = -\frac{(z - p_1)(z - p_2)}{z - z_1} \quad (47)$$

근궤적이 실축 위에 있을 경우는 (47)에서  $K$  값을 쉽게 계산할 수 있지만, 그러나 근궤적이 원주 상에 있을 때, 즉 근이 복소수일 경우는 (47)로 표현된  $K$ 의 계산은 상당한 복소수 계산을 필요로 한다. 하지만 이 때 원주상의 극점을 직교좌표로 표현할 경우, 즉  $p/\pm\phi = x \pm jy$  라면  $K$  값은 아래와 같이  $x$ 좌표의 선형식으로 표현할 수 있음이 밝혀졌다[4]:

$$K = p_1 + p_2 - 2x \quad (48)$$

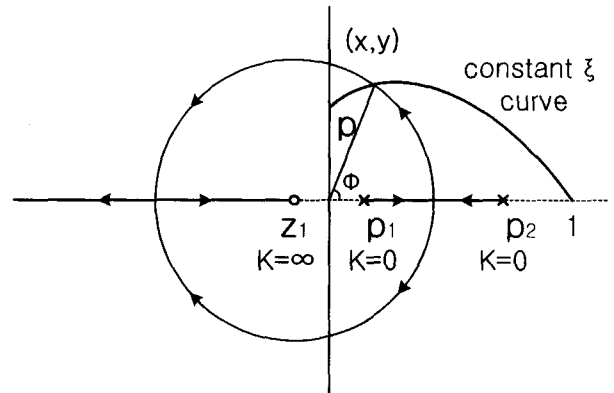


그림 5 이차 이산 시스템의 근궤적과 상수  $\zeta$  궤적  
Fig. 5 Root Loci of Second-Order System and Constant Damping Ratio Curve

### 2.5 페루프 근궤적과 상수 감쇠비 $\zeta$ 궤적과의 교점

식 (30)은 페루프 극점과 감쇠비  $\zeta$ 와의 관계식이다. 그러나 감쇠비를 상수 곡선(constant  $\zeta$  curve)으로 고정할 경우의 극점의 궤적을 쉽게 추정하기 위하여 다른 관계식을 유도하여 보자. (26)과 (27)에서  $\omega_n T$ 를 소거하여 페루프 극점  $p/\pm\phi$ 과 감쇠비  $\zeta$ 와의 직접적인 관계식을 구할 수 있다.

$$p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\phi} \quad (49)$$

식 (49)의 관계에서 각  $\phi$ 가 0이 되는 경우  $\zeta$ 에 관계없이  $p=1$ 이 되어 복소수 평면에서  $z=1$ 을 지나고, 각이 점진적으로 증가하면 이에 따라  $p$ 값이 지수함수로 작아져서 결

과적으로 그림 5에 나타난 것과 같이 값  $\zeta$ 에 따라 서로 다른 나선형 궤적들을 만든다.

이 상수 감쇠비  $\zeta$  궤적과 (46)으로 주어지는 원형의 페루프 시스템의 극점의 궤적이 만나는 점은 (46)과 (49)의 연립으로 구할 수 있다. (49)를 이용하여 교점의 직교좌표  $(x, y)$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x = p \cos \phi = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \phi} \cos \phi \quad (50)$$

$$y = p \sin \phi = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \phi} \sin \phi \quad (51)$$

$$x^2 + y^2 = p^2 = e^{-2\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \phi} \quad (52)$$

또 (46)의 원 궤적 식으로부터 다음이 구해진다.

$$x^2 + y^2 - 2z_1x + (p_1 + p_2)z_1 - p_1p_2 = 0 \quad (53)$$

식 (50), (51), 그리고 (52)를 (53)에 대입하면 극점의 각  $\phi$ 만의 방정식이 다음과 같이 구해진다[4].

$$f(\phi) = e^{-2\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \phi} - 2z_1e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \phi} \cos \phi + (p_1 + p_2)z_1 - p_1p_2 = 0 \quad (54)$$

여기서  $a = -\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$ ,  $b = (p_1 + p_2)z_1 - p_1p_2$ 로 치환하면 각  $\phi$ 에 대한 비선형 방정식은 아래와 같이 된다.

$$f(\phi) = e^{2a\phi} - 2z_1e^{a\phi} \cos \phi + b = 0 \quad (55)$$

식 (55)의 비선형 방정식은 일반적으로 수치해석법에 의하여 풀 수 있다. 예를 들어 뉴턴의 근의 방법을 이용하려고 하면 (55)의 미분식이 필요하다[5].

$$\frac{df(\phi)}{d\phi} = f'(\phi) = 2ae^{2a\phi} - 2az_1e^{a\phi} \cos \phi + 2z_1e^{a\phi} \sin \phi \quad (56)$$

식 (55)와 (56)을 뉴턴의 근의 공식(Newton's root method) [5]에 대입하여 근을 구하는 점화식을 유도하면 아래와 같다.

$$\phi_{n+1} = \phi_n - \frac{f(\phi_n)}{f'(\phi_n)} = \phi_n - \frac{e^{2a\phi_n} - 2z_1e^{a\phi_n} \cos \phi_n + b}{2ae^{2a\phi_n} - 2az_1e^{a\phi_n} \cos \phi_n + 2z_1e^{a\phi_n} \sin \phi_n} \quad (57)$$

$\phi$ 의 적절한 값을 추정하여  $\phi_n$ 의 초기값으로 하고 반복적

으로 (57)을 계산하여 수렴하는 경우  $f(\phi)=0$ 인  $\phi$ 를 찾을 수 있다. 이 각  $\phi$ 를 (50), (51), 그리고 (52)에 대입하면 교점의 극좌표와 직교좌표가 구해진다[4].

### 3 최대 오버슈트의 최소화

#### 3.1 최대 오버슈트를 최소화하는 $\alpha$ 각과 영점의 결정

페루프 시스템의 극점  $p/\phi$ 가 고정되면, (30)으로 표현된 것같이 동시에 감쇠비  $\zeta$ 도 고정된다. 이 경우 (43)으로 표현되는 최대 오버슈트는 위상각  $\alpha$ 만의 함수가 된다. 그런데 그림 2, 그림 3, 그리고 그림 4에서 설명된 것처럼 각  $\alpha$ 는 페루프 시스템의 극점과 영점의 상대적 위치관계로 결정되므로, 페루프 시스템의 극점이 고정되어 있다면 각  $\alpha$ 는 유일하게 시스템의 영점만의 함수가 된다. 즉 영점의 위치가 실수 축을 따라 변한다면(물론 페루프 시스템의 극점  $p/\phi$ 의 고정을 위하여 개루프 극점의 위치와 전향이득도 따라서 변하여야 함), 각  $\alpha$ 는 (12)에 따라 변하게 되며 결과적으로 최대 오버슈트도 변할 것이다. 이제 이 최대 오버슈트를 최소화하는 각  $\alpha$ 와 이때의 영점을 구하여 보자.

최대 오버슈트를 나타내는 (44)을 감쇠비  $\zeta$ 를 상수로 간주하고  $\alpha$ 에 대하여 미분하여 이 미분식을 0으로 하는 각  $\alpha$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dPOS(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2} \tan \alpha + \zeta}{\cos \alpha} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\pi - \alpha - \text{atan2}(\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}))} = 0 \quad (58)$$

즉,

$$\tan \alpha = -\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (59)$$

식 (22)로 주어진 각  $\alpha$ 의 범위에서  $\cos$ 값은 양수가 되며, 따라서 이 범위 안에서 최대 오버슈트를 최소로 만드는  $\alpha$ 를  $\alpha_m$ 으로 표시할 때, 이 각의  $\cos$ 값도 양수가 되어야 한다. 그러므로 (59)로부터  $\sin \alpha_m$ 과  $\cos \alpha_m$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\sin \alpha_m = -\zeta \quad (60)$$

$$\cos \alpha_m = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (61)$$

최대 오버슈트를 최소로 만드는 위상각  $\alpha_m$ 은  $\text{atan2}$ 함수를 사용하여 아래와 같이 표현된다.

$$\alpha_m = \text{atan2}(-\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}) = -\text{atan2}(\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}) \quad (62)$$

주목할 점은 (62)의  $\alpha_m$ 은 (38)의  $\theta$ 와 절대치는 같고 부호가 서로 다른 각이 되는 것이다.

$$\alpha_m = -\theta = -\text{atan2}(-\ln p, \phi) \quad (63)$$

식 (62)의 각  $\alpha = \alpha_m$ 을 (44)에 대입하면, 최소가 되는 최대 오버슈트의 값은 다음과 같이 주어진다.

$$POS_m = POS(\alpha = \alpha_m) = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (64)$$

다음은 고정된 페루프 극점  $p/\phi$ 에 대하여 위상각이 (62)의  $\alpha_m$ 으로 주어지도록 하는 영점을  $z_{1m}$ 으로 하고 이의 위치를 구하여 보자. 극점의 직교좌표와 (62)의  $\alpha_m$ 을 (12)에 대입하여 보자.

$$p/\phi = p\cos\phi + jp\sin\phi = x_p + jy_p \quad (65)$$

$$\alpha_m = \text{atan2}(y_p, 1-x_p) + \text{atan2}(y_p, x_p-z_{1m}) - \text{atan2}(0, 1-z_{1m}) - \frac{\pi}{2} \quad (66)$$

이 식에 tan함수의 가법정리를 적용하기 위하여 아래와 같이 재정리하자.

$$\text{atan2}(y_p, x_p-z_{1m}) + \left\{ -\frac{\pi}{2} - \text{atan2}(0, 1-z_{1m}) \right\} = \alpha_m - \text{atan2}(y_p, 1-x_p) \quad (67)$$

식 (67)의 양변에 tan를 취하고, 세 번째 항인  $\text{atan2}(0, 1-z_{1m})$ 은 0이나  $\pi$ 가 되는 관계와, (59)의 결과, 그리고 tan함수의 가법정리를 적용하면 다음의 관계가 얻어진다.

$$-\frac{x_p-z_{1m}}{y_p} = \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{y_p}{1-x_p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{y_p}{1-x_p}} \quad (68)$$

식 (68)에서  $z_{1m}$ 에 대하여 풀면 다음의 식이 얻어진다.

$$z_{1m} = \frac{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{y_p}{1-x_p}\right)y_p}{1 - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{y_p}{1-x_p}} + x_p \quad (69)$$

### 3.2 최대 오버슈트를 최소화하는 이산 보상기 설계

이 논문의 2장과 3장의 과정을 정리하면 다음과 같다. 개루프 시스템의 전달함수가 (1)과 같이 주어질 경우, 즉 두 개의 개루프 극점  $p_1$ 과  $p_2$ , 그리고 한 개의 영점  $z_1$ 이 주어질 경우, 바람직한 감쇠비  $\zeta$ 와 안정도 등의 제어 조건을 적용하여 단위 피드백 시스템의 페루프 극점이 단위원 안

에서  $p/\pm\phi = x_p \pm jy_p$  로 설계되고, 따라서 (48)에 의하여 전향이득이  $K = p_1 + p_2 - 2x_p$  로 결정되었다고 하자. 감쇠비  $\zeta$ 는 (30)의 조건을 만족할 것이며, 위상각  $\alpha$ 는 (12)로 결정되며, 단위계단 입력에 대한 응답의 정상 상태치는 (10)으로 표현되고, 마지막으로 응답은 (24)와 같이 감쇠 정현파로 주어진다. 이 응답곡선의 최대 퍼센트 오버슈트는 (44)로 계산된다.

위에 기술한 설계에서, 정해진 페루프 극점의 위치를 변경하지 않을 경우의 최대 오버슈트를 최소화하기 위한 위상각  $\alpha_m$ 과 새로운 영점  $z_{1m}$ 의 값은 (62)와 (69)로 각각 주어진다. 개루프의 영점이 바로 페루프의 영점이 되므로,  $z_{1m}$ 이 시스템의 영점이 되도록 하기 위하여서는 보상기를 삽입하여 기존의 영점의 항을 소거하고 새로운 영점을 삽입하여야 한다. 또한 영점이 변하면서도 페루프 극점의 위치를 고정하려면 영점의 변경에 따른 개루프 극점과 전향이득을 상대적으로 조정하여야 한다. 따라서 이 논문에서 설계하고자 하는 이산 보상기(discrete compensator)의 형태는 아래와 같다.

$$D_m(z) = \frac{K_m(z-z_{1m})}{(z-p_{1m})(z-p_{2m})} \frac{(z-p_1)(z-p_2)}{K(z-z_1)} \quad (70)$$

이 때 최종 개루프 전달함수는 다음과 같이 된다.

$$G_m(z) = D_m(z)G(z) = \frac{K_{cm}(z-z_{1m})}{(z-p_{1m})(z-p_{2m})} \quad (71)$$

여기서  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 는 새로운 시스템의 개루프 극점인데, 새로운 근궤적이 원래의 극점  $p/\pm\phi = x_p \pm jy_p$  을 지나도록 결정되어야 하고, 상응하는 전향이득  $K_m$ 도 결정하여야 한다.

식 (70)으로 보상된 개루프 시스템의 근궤적이 고정된 페루프 극점을 지나야 하므로 근궤적인 원의 방정식의 (46)으로부터 다음의 관계가 성립한다.

$$(x_p-z_{1m})^2 + y_p^2 = (p_{1m}-z_{1m})(p_{2m}-z_{1m}) \quad (72)$$

이 식을 간략화하면 다음과 같다.

$$x_p^2 - 2z_{1m}x_p + y_p^2 = p_{1m}p_{2m} - (p_{1m}+p_{2m})z_{1m} \quad (73)$$

식 (73)을 만족하는  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 는 일반적으로 무수히 많이 존재한다. 이러한 자유도는 (73)의 조건 하에서  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 를 구하는 데 추가적인 시스템 성능 조건을 가할 수 있는 이점이 있다.

보상된 시스템의 극점  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 을 구하기 위한 추가 조건 중, 본 논문에서는 원래의 시스템과 최대 오버슈트를 최소화 하는 보상된 시스템의 정상상태 응답을 서로 같게 하는 조건을 취하였다. 보상된 시스템의 정상상태 응답은 (10)으로부터 다음과 같이 표현된다:



$$c_{ssm} = \frac{K_m(1 - z_{1m})}{1 - 2p \cos \phi + p^2} \quad (74)$$

따라서 (10)의  $c_{ss}$ 와 (74)의  $c_{ssm}$ 이 같다는 조건을 적용하면 다음과 같이 두 시스템의 전향이득간의 관계식이 유도된다.

$$K_m = K \frac{1 - z_1}{1 - z_{1m}} \quad (75)$$

원래의 시스템과 보상된 시스템의 서로 다른 근궤적이 극점  $p/\pm\phi = x_p \pm jy_p$  에서 만나며, 이 극점에 상응하는 두 시스템의 이득은 (48)에 의하여 다음의 두 식을 각각 만족하여야 한다.

$$K = p_1 + p_2 - 2x_p \quad (76)$$

$$K_m = p_{1m} + p_{2m} - 2x_p \quad (77)$$

식 (76)과 (77)에서  $x_p$ 를 소거하면 다음의 식이 구해진다.

$$K_m - K = (p_{1m} + p_{2m}) - (p_1 + p_2) \quad (78)$$

세 개의 미지수  $p_{1m}$ ,  $p_{2m}$ , 그리고  $K_m$ 은 이 미지수들에 대한 세 개의 독립된 식인 (73), (75), 그리고 (78)을 연립하여 풀 수 있다. 여기서는 이를 쉽게 풀기 위하여 새로운 개루프 시스템의 두 극점  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 의 합과 곱을 먼저 구하여 보자. (76)과 (77)를 (75)에 대입하여  $p_{1m} + p_{2m}$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$p_{1m} + p_{2m} = (p_1 + p_2 - 2x_p) \frac{1 - z_1}{1 - z_{1m}} + 2x_p = B \quad (79)$$

또 (79)의 결과를 (73)에 대입한 후  $p_{1m}p_{2m}$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$p_{1m}p_{2m} = (x_p^2 - 2z_{1m}x_p + y_p^2) + Bz_{1m} = C \quad (80)$$

두 미지수  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 의 합과 곱이 (79)와 (80)으로 주어질 때,  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 은 다음의 방정식을 풀면 얻어진다.

$$p_m^2 - Bp_m + C = 0 \quad (81)$$

즉

$$p_{1m}, p_{2m} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (82)$$

시스템의 응답 모드, 감쇠비, 그리고 정상상태의 응답을 그대로 유지하면서 최대 오버슈트를 최소화 할 수 있는 보상기는 (70)과 같이 주어진다. 여기서 새로운 영점은 (69)로, 전향이득은 (77)로, 그리고 새로운 개루프 극점은 (82)로 구

하여 진다.

### 3.3 이산 보상기 설계 예

다음과 같은 이차 개루프 시스템을 통해 이 논문에서 제안한 최대 오버슈트를 최소화하기 위한 보상기를 설계하여 보자.

$$G(z) = \frac{K(z-0.1)}{(z-0.6)(z-0.8)} \quad (83)$$

이 시스템의 특성방정식은

$$G(z) = \frac{K(z-0.1)}{(z-0.6)(z-0.8)} = -1 \quad (84)$$

개루프 극점이 0.6, 0.8이고 영점은 0.1이므로  $K$ 값의 변화에 따라 특성방정식의 근궤적은, 실축상의 반직선  $x \leq 0.1$  과 선분  $0.6 \leq x \leq 0.8$ , 그리고 중심을  $(0.1, 0)$ 으로 하고 반경  $r = \sqrt{(0.6-0.1)(0.8-0.1)} = 0.5916$ 으로 하는 원으로 구성된다. 그림 6의 오른쪽 원이 이 근궤적의 일부이다. 제어의 목적상 감쇠비  $\zeta$ 를 0.3으로 설계한다고 가정하자. 그림 6에 감쇠비  $\zeta=0.3$ 의 궤적도 함께 나타나 있다. 그림에 나타난 두 궤적의 교점은 방정식 (55)에 대한 수치해석법에 의하여 위상각이  $\phi = \pm 107.84^\circ$ 가 되고 이를  $\zeta$ 값과 함께 (49), (50), 그리고 (51)에 대입하여 극점의 좌표를 구한다.

$$p/\phi = 0.553259 / \pm 107.84^\circ \quad (85)$$

$$x_p \pm jy_p = -0.169524 \pm j0.526647 \quad (86)$$

극점이 (86)으로 주어지는 좌표에 고정되기 위한 전향이득은 (76)으로부터 구해진다.

$$K = 0.6 + 0.8 - 2 \cdot (-0.169524) = 1.739048 \quad (87)$$

식 (85)에 나타난 것과 같이 폐루프 극점이 단위원 안에 있으므로 시스템은 안정되고, 따라서 단위계단 입력에 대한 정상상태의 응답은 (10)으로 주어진다.

$$c_{ss} = \frac{K(1 - z_1)}{1 - 2p \cos \phi + p^2} = 0.951372 \quad (88)$$

그림 2와 그림 3, 그리고 그림 4에서 정의한 위상각  $\alpha$ 는 (12)로부터 구한다.

$$\alpha = 51.34^\circ \quad (89)$$

식 (40)으로부터 최대 오버슈트가 나타나는 시간  $k_p$ 는 1.031107이 되고 이 때의 퍼센트 최대 오버슈트는 (44)로부터 82.95%가 됨을 알 수 있다.

보상기 설계를 위한 최소의 POS를 만들어내는 위상각  $\alpha_m$ 과 그 때의 영점  $z_{1m}$ 은 각각 (62)와 (69)로부터 구해진다.

$$\alpha_m = -17.457603 \quad (90)$$

$$z_{1m} = -0.638750 \quad (91)$$

새로운 시스템의 개루프 극점  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 은 (79), (80)을 계산하여 그 결과를 (82)에 대입하여 계산하면 각각 -0.323520과 0.939555가 된다. 또한 보상된 시스템의 전향이득은 (77)에 의하여 계산하면 다음과 같다.

$$K_m = 0.955084 \quad (92)$$

기존의 영점과 극점을 소거하고 새로운 영점과 극점을 도입하는 이산 보상기는 다음과 같이 표현된다.

$$D_m(z) = \frac{0.955084(z+0.638750)}{(z+0.323520)(z-0.939555)} \times \frac{(z-0.6)(z-0.8)}{1.739048(z-0.1)} \quad (93)$$

그리고 이 때의 개루프 전달함수는 다음과 같이 된다.

$$G_m(z) = D_m(z)G(z) = \frac{0.955084(z+0.638750)}{(z+0.323520)(z-0.939555)} \quad (94)$$

보상된 시스템의 최대 오버슈트는 (40)으로부터  $k_{p_m} = 1.669092$  일 때이며 이때의 최대 오버슈트는 (44)로부터 37.23%가 되어 원래의 82.95%에서 현격히 줄어 든 것을 알 수 있다.

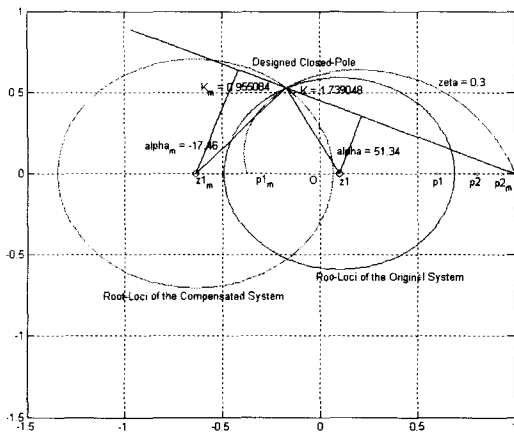


그림 6 원시스템과 보상된 시스템의 근궤적과 상수  $\zeta$  궤적. 왼쪽의 원이 보상된 시스템의 근궤적.  
Fig. 6 Root Loci of the Original System and the Compensated System with a Constant Damping Ratio Curve

그림 6에 나타난 두 개의 원 중, 왼쪽의 원은 보상된 시스템의 근궤적의 일부이다. 보상시스템의 근궤적 중의 원은

중심이  $(z_{1m}, 0)$ , 즉  $(-0.638750, 0)$ 이며 반경은 (45)에 의하여  $r_m = 0.70536$ 으로 계산된다. 두 시스템의 근궤적 곡선은 그림에 나타난 것과 같이 모두 페루프 극점  $(-0.169524 \pm j0.526647)$ 을 지난다.

그림 7에서는 두 시스템의 단위 응답을 볼 수 있다. 새로운 시스템의 최대 오버슈트는 82.95%에서 37.23%로 현저히 감소하였음을 볼 수 있다. 그러나 정상상태 오차는 여전히 같은 값인 0.951372이다. 두 시스템의 페루프 극점이 같으므로 감쇠비도 같으며, 감쇠 정현파의 진동 주기도 같음을 알 수 있다. 그러나 위상각  $\alpha$ 의 변화로 인한 두 시스템의 응답의 위상이 변화하였음을 알 수 있다. 이 위상의 변화가 보상된 시스템의 최대 오버슈트를 최소화한다. 그러나 이로 인하여 응답의 상승시간이 증가하는 문제점도 관찰됨을 알 수 있다.

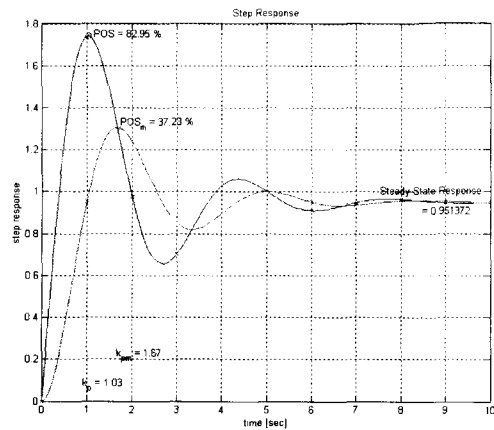


그림 7 원시스템과 보상된 시스템의 계단 응답  
Fig. 7 Step Responses of the Original and the Compensated Systems.

#### 4. 결 론

이 논문에서는 이차 이산 시스템의 성능에 미치는 영점의 영향을 연구하고 이를 이용하여 개루프 영점과 극점이 주어지고 감쇠비  $\zeta$ 도 주어졌을 때, 즉 페루프 극점이 고정되어 있을 경우, 최대 오버슈트를 가장 작게 만드는 보상기를 설계하는 방법을 제안하였다.

이차 이산 시스템의 이산 응답의 모든 점들을 지나는 포락선 곡선의 감쇠비  $\zeta$ 는 오직 페루프 극점만의 함수이다. 즉, 영점의 위치와는 전혀 무관하다. 그리고 이 때의 최대 오버슈트는 감쇠비  $\zeta$ 와 각  $\alpha$ 만의 함수이다. 여기서 각  $\alpha$ 는 페루프 복소수 극점에 대한 영점의 상대적 위치에 의해 결정된다. 그러므로 페루프 복소수 극점이 고정되었을 때, 영점의 위치를 실수축 상에서 변화시킨다면 감쇠비  $\zeta$ 는 불변이지만, 각  $\alpha$ 는 변하게 된다. 따라서 페루프 복소수 극점이 고정된다면, 최대 오버슈트는 각  $\alpha$ 의 함수이고 이는 다시 말

해 영점만의 함수가 된다.

본 논문에서는 원 시스템과 최대 오버슈트가 최소가 되게 하는 보상된 시스템의 정상상태의 응답치가 같게 되도록 하는 보상시스템을 설계하였다. 그러나 단계적이, 원래의 주어진 시스템의 설정된 페루프 극점을 지나게 하는 보상된 시스템은 무수히 많다. 따라서 이러한 사실은 보다 효율적인 시스템 성능을 얻기 위해 다른 조건을 적용하여 최적의 보상시스템을 구할 수 있음을 보여 준다. 그러므로 추가의 연구가 요구된다.

**참 고 문 헌**

- [1] Benjamin C. Kuo, *Digital Control Systems*, 2nd ed., Saunders College Publishing, New York, 1992.
- [2] Benjamin C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [3] Katsuhiko Ogata, *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [4] T. S. Chung, *Digital Control Lecture Notes*, 1999.
- [5] Laurene V. Fausett, *Applied Numerical Analysis Using MATLAB*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.
- [6] Shoichiro Nakamura, *Numerical Analysis and Graphic Visualization with MATLAB*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1996.

**저 자 소 개**



**이 재 석 (李宰碩)**

1994년 중앙대 제어계측공학과 (학사)  
 1999년 중앙대 제어계측공학과 (석사)  
 1999 ~ 현재 중앙대 제어계측공학과 박사과정  
 Tel : 02) 825-1644, Fax : 02) 823-2492  
 E-mail : icarus@piano.cie.cau.ac.kr



**정 태 상 (鄭台相)**

1978년 서울대 전기공학과 (학사), 1982년 미국 Ohio 주립대 (석사), 1985년 미국 Ohio 주립대 (박사), 1986~1992년 미국 Kentucky 대 조교수, 1992~현재 중앙대 전자전기공학부 교수  
 Tel : 02) 820-5321, Fax : 02) 823-2492  
 E-mail : tschung@jupiter.cie.cau.ac.kr