

미소구간 유리하알변환에 의한 선형계의 해석을 위한 새로운 접근방법

論 文
51D-6-2

New Approach to the Analysis of Linear Systems Via Local Rationalized Haar Transform

金 珍 泰* · 安 斗 守**
(Jin-Tae Kim · Doo-Soo Ahn)

Abstract - This paper proposes a real-time application of rationalized Haar transform which is based on the local rationalized Haar transform, local operational matrix and local delay operational matrix. This approach let a general sampling time be used by introducing a scaling factor. In the existing method of orthogonal functions, a major disadvantage is that process signals need to be recorded prior to obtaining their expansions. This paper proposes a novel method of rationalized Haar transform to overcome this shortcoming. And the proposed method is suitable for the analysis of linear systems. The proposed method is expected to be applicable to the adaptive control which demanded to the real-time applications.

Key Words : Haar Function, local rationalized Haar transform, linear system, real-time application

1. 서 론

월쉬함수(Walsh function)를 이용한 제어시스템설계에 관한 연구는 1973년 M. S. Corrington이 월쉬함수 유한급수 전개를 이용하여 미·적분방정식의 해를 구하는 방법을 제시함으로써 시작되었다. 이 방법은 미·적분방정식으로 표현되는 시스템을 월쉬함수의 특성을 이용함으로써 간략화된 행렬대수방정식으로 표현하여 그 정보를 얻을 수 있는 장점이 있다. 또한 1975년에는 C. F. Chen 과 C. H. Hsiao에 의하여 적분연산행렬이 정의되었으며 이후 시스템 해석 및 제어문제에 월쉬함수, 블럭펄스함수(block pulse function), 하알함수(Haar function)등과 같은 직교함수가 도입되었다.

하알함수는 1910년 Alfred Haar에 의하여 제안되었으며 [1] 월쉬함수와 마찬가지로 구형파로 구성되고 직교특성을 가지고 있다. 또한 함수 자체에 많은 0요소를 포함하고 있어 다른 직교함수보다 계산상의 이점을 가지고 있다. 그러나 $\pm\sqrt{2^p}$ 와 같은 무리수를 포함하고 있어 하알변환이나 적분연산행렬 도입시 이러한 무리수를 처리해야하는 부담이 있으므로 주로 월쉬함수가 널리 이용되어 왔다. 이러한 단점을 보완하기 위해 M. Ohkita는 무리수를 포함하지 않고 0과 ± 1 의 값만을 취하도록 한 유리하알함수(rationalized Haar functions)를 정의하고 이를 이용하여 미분방정식의 해를 구하는 방법을 제시하였다[5,6].

직교함수를 이용하여 신호를 분석할 경우 해석하고자하는 신호를 모두 알고있어야 한다는 전제조건을 가지고 있다.

이는 직교함수가 실시간 처리를 요구하는 시스템에는 그 적용이 어렵다는 것을 말하며 주로 시스템 해석이나 최적제어와 같은 실시간 계산을 필요로 하지 않는 문제에만 국한해서 적용되어 왔다. 본 연구에서는 이러한 하알함수의 단점을 극복하기 위하여 미소구간에서의 유리하알변환을 위한 대수적 방법을 제안하고자하며 미소구간에서의 함수의 적분과 미분을 계산할 수 있는 일반화된 방법을 제안하고자 한다. 또한 월쉬함수나 하알함수와 같은 직교함수는 전개항수의 제약으로 인하여 일반적인 샘플링 시간으로 계산하기가 어렵다. 이러한 문제는 직교함수의 정의구간이 $[0, 1)$ 이고 전개항수가 정의 구간에서 $m=2^p$ 의 값, 즉 2의 배수로 전개항수를 가지게 됨으로써 발생한다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 샘플링 시간과 전개항수를 포함하는 스케일링 인자(scaling factor : t_m)를 적절하게 곱하여 줌으로써 일반적인 샘플링 시간을 취하여 계산할 수 있도록 할 것이다. 또한 전개항수에 해당하는 만큼의 계산이 종료되면 다음구간의 초기조건을 계산함으로써 시구간을 임의의 시간으로 확장이 가능하도록 할 것이다. 이는 일반적인 직교함수 적용시 시물레이션 하고자하는 최종시간을 알고 있어야 하는 제약을 없애고 임의의 시간까지 실시간 계산이 가능하도록 할 것이며 제안한 방법을 이용하여 선형계의 해석에 적용하여 그 유용성을 확인하고자 한다.

2. 유리하알함수 및 미소구간 유리하알변환

2.1 유리하알함수 및 유리하알변환[10]

유리하알함수는 구간 $[0, 1)$ 에서 정의되는 직교함수이며 구간에서 진폭이 $\pm 1, 0$ 의 값들을 취한다.

$$RH_{ar}(0, t) = 1, \quad 0 \leq t < 1$$

* 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터 工學科 博士課程 修了

** 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터 工學部 教授 · 工博

接受日字 : 2001年 11月 19日

最終完了 : 2002年 4月 3日

$$RHar(k, t) = \begin{cases} 1, & \frac{g}{2^p} \leq t < \frac{(g+1/2)}{2^p} \\ -1, & \frac{(g+1/2)}{2^p} \leq t < \frac{(g+1)}{2^p} \\ 0, & \text{그외 구간} \end{cases} \quad (2.1)$$

단, $k=2^p+g$, $p=0, 1, \dots, \log_2 \frac{m}{2}$, $g=0, 1, \dots, 2^p-1$

또한 유리하알함수는 다음과 같은 직교특성을 갖는다.

$$\int_0^1 RHar(i, t) RHar(j, t) dt = \begin{cases} 1, & i=j=0 \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\int_0^1 RHar(i, t) RHar(j, t) dt = \begin{cases} 2^{-p}, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

단, $i=2^p+g$, $p=0, 1, \dots, \log_2 \frac{m}{2}$, $g=0, 1, \dots, 2^p-1$

정의구간 $[0, 1)$ 에서 적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 는 다음과 같이 유리하알함수로 유한급수 전개할 수 있다.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} F_i RHar(i, t) \quad (2.3)$$

유리하알계수 F_i 는 식(2.2)의 직교특성을 이용하여 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$F_i = \int_0^1 f(t) RHar(i, t) dt$$

$$\approx q_i \sum_{n=0}^{m-1} RHar(i, n) f_n^* \quad (2.4)$$

단, $q_i = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} [RHar(i, n)]^2}$, $i=0, 1, \dots, m-1$

식(2.4)를 유리하알변환 이라고 하며 이에 대응되는 식(2.3)을 유리하알역변환이라고 한다.

유리하알함수의 적분함수는 임의의 함수를 유리하알함수로 표현할 수 있는 것과 마찬가지로 유리하알함수로 다시 표현할 수 있다.

$$\int_0^t RHar(\tau) d\tau = P RHar(t) \quad (2.5)$$

여기에서 P 를 유리하알함수의 적분연산자라 하며 식(2.6)과 같이 일반화된 식으로 나타낸다.

$$P_{(m \times m)} = \begin{pmatrix} P\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right) & -\frac{1}{2^{\log_2 m + 1}} RHar\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right) \\ \frac{1}{2^{2\log_2 m}} RHar\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right) & 0\left(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

단, $P_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$, $M_{(m \times m)} : M \in R^{m \times m}$

여기서 m 은 유리하알함수의 전개항수를 나타내며, 식에서 첨자는 해당 정방행렬의 크기를 나타낸다.

2.2 미소구간에서의 유리하알변환

시구간 $[0, 1)$ 에서 유리하알함수 전개항수가 m 일 때, j 번째 미소구간을 다음과 같이 정의하자.

$$\Delta_j = [t_j, t_{j+1}) \quad (2.7)$$

단, $t_j = j \cdot \frac{1}{m}$

또한 식(2.4)에서의 i 번째 유리하알계수 F_i 는 미소구간에서의 적분값에 대한 함으로 나타낼 수 있다.

$$F_i = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) RHar(i, t) dt \quad (2.8)$$

단, $i=0, 1, \dots, m-1$

식(2.8)에서 j 번째 미소구간에서의 i 번째 유리하알함수에 대한 계수를 다음과 같이 정의하자.

$$F_i(\Delta_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) RHar(i, t) dt \quad (2.9)$$

단, $i=0, 1, \dots, m-1$, $j=0, 1, \dots, m-1$

식(2.9)를 이용하여 j 번째 미소구간에서의 유리하알계수를 구할 수 있다.

$$F(\Delta_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) RHar^T(t) dt \quad (2.10)$$

단, $j=0, 1, \dots, m-1$

유리하알함수는 미소구간에서 항상 일정한 값인 0 또는 ± 1 의 값을 가지므로 식(2.10)은 이산화된 식으로 표현할 수 있으며 이를 미소구간에서의 유리하알변환이라 한다.

$$F(t_j) = \frac{1}{r} f(t_j) RHar^T(t_j) \quad (2.11)$$

단, $r = \frac{1}{\log_2 m + 1}$, $j=0, 1, \dots, m-1$

식(2.11)에 대응되는 미소구간에서의 유리하알역변환은 식(2.12)와 같다.

$$f^*(t_j) = F(t_j) \cdot RHar(t_j) \quad (2.12)$$

단, $j=0, 1, \dots, m-1$

식(2.12)는 다음과 같이 증명된다. 식(2.12)를 재표현하면 다음과 같다

$$F(t_j) \cdot RHar(t_j) = \sum_{i=0}^{m-1} F_i(t_j) \cdot RHar(i, t_j) \quad (2.13)$$

식(2.11)과 유리하알함수의 직교특성을 이용하여 식(2.13)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F(t_j) \cdot RHar(t_j) &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{r} f(t_j) RHar(i, t_j) \right) \cdot RHar(i, t_j) \\
 &= \frac{1}{r} f(t_j) \sum_{i=0}^{m-1} RHar(i, t_j) RHar(i, t_j) \\
 &= \frac{1}{r} f(t_j) \{ RHar(0, t_j) RHar(0, t_j) \\
 &\quad + RHar(1, t_j) RHar(1, t_j) + \dots \\
 &\quad + RHar(m-1, t_j) RHar(m-1, t_j) \} \\
 &= \frac{1}{r} f(t_j) \cdot r = f(t_j)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

다음으로 미소구간에서의 적분연산행렬의 정의하기 위하여 다음과 같이 적분에 대한 오차함수를 정의하자.

$$e(t) = \int_0^t RHar(\tau) d\tau - P \cdot RHar(t) \tag{2.15}$$

미소구간 Δ_j 에서의 유리하알함수의 적분값 $P \cdot RHar(t_j^+)$ 는 미소구간에서 존재하므로 다음과 같이 정의하자.

$$P \cdot RHar(t_j^+) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{t_j} RHar(t) dt + \int_0^{t_{j+1}} RHar(t) dt \right) \tag{2.16}$$

단, $t_j^+ \in \Delta_j$

식 (2.16)을 유리하알함수에 대한 적분항과 미소구간에서의 적분항으로 분할하여 표현한 후

$$\begin{aligned}
 P \cdot RHar(t_j^+) &= \int_0^{t_j} RHar(t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\int_0^{t_{j+1}} RHar(t) dt - \int_0^{t_j} RHar(t) dt \right) \\
 &= \int_0^{t_j} RHar(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} RHar(t) dt
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

식(2.15)에 식(2.17)의 관계를 도입하여 정리하면 미소구간 Δ_j 에서의 오차함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$e(t_j^+) = -\frac{1}{2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} RHar(t) dt \tag{2.18}$$

또한 미소구간 Δ_{j-1} 에서의 오차함수 역시 다음의 과정으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 P \cdot RHar(t_j^-) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{t_{j-1}} RHar(t) dt + \int_0^{t_j} RHar(t) dt \right) \\
 &= \int_0^{t_j} RHar(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} RHar(t) dt
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$e(t_j^-) = \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} RHar(t) dt \tag{2.20}$$

단, $t_j^- \in \Delta_{j-1}$

유리하알함수가 미소구간에서 항상 일정한 값을 가지므로 식(2.18)과 식(2.20)은 다음과 같이 재 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 e(t_j^+) &= -\frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j) RHar(t_j) \\
 &= -\frac{1}{2m} RHar(t_j)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
 e(t_j^-) &= \frac{1}{2} (t_j - t_{j-1}) RHar(t_{j-1}) \\
 &= \frac{1}{2m} RHar(t_{j-1})
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

식 (2.21)을 식(2.15)에 대입하여 정리하면 다음과 같고

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_j^+} RHar(t) dt &= \left(P - \frac{1}{2m} I \right) RHar(t_j) \\
 &= P_L RHar(t_j)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

식(2.23)에서 P_L 을 유리하알함수의 미소구간에서의 적분 연산행렬이라 한다.

또한 식(2.15)와 식(2.22)를 이용하여 다음식을 구할 수 있다.

$$\int_0^{t_j^-} RHar(t) dt = \left(P + \frac{1}{2m} I \right) RHar(t_{j-1}) \tag{2.24}$$

유리하알함수에 대한 적분값은 연속함수이므로 $t = t_j^+$ 에서 연속이다.

$$\int_0^{t_j^+} RHar(t) dt = \int_0^{t_j^-} RHar(t) dt \tag{2.25}$$

즉, 식(2.23)과 식(2.24)를 이용하여 식(2.25)를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 P_L RHar(t_j) &= \left(P + \frac{1}{2m} I \right) RHar(t_{j-1}) \\
 RHar(t_{j-1}) &= \left(P + \frac{1}{2m} I \right)^{-1} P_L RHar(t_j) \\
 &= D_L RHar(t_j)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

식(2.26)에서 D_L 을 유리하알함수의 미소구간에서의 지연 연산행렬이라 한다.

2.3 미소구간에서의 적분연산 유도

j 번째 미소구간 Δ_j 에서의 함수에 관한 적분을 살펴보자.

$$\int_{\Delta_j} f(t) dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) dt \tag{2.27}$$

단, $\Delta_j = [t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, m-1$

미소구간에서의 함수 $f(t)$ 에 대하여 유리하알함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t)RHar(t)dt \quad (2.28)$$

식(2.28)에서의 우변에 나타나는 적분은 미소구간 $\Delta_j = [t_j, t_{j+1}]$ 에서 유리하알함수가 일정한 값을 가지므로 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)dt &\simeq (t_{j+1} - t_j)F(t_j)RHar(t_j) \\ &= \frac{1}{m} F(t_j)RHar(t_j) \end{aligned} \quad (2.29)$$

또한 미소구간에서의 함수의 적분은 다음과 같이 두 개의 적분항으로 분리할 수 있다.

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)dt = \int_0^{t_{j+1}} f(t)dt - \int_0^{t_j} f(t)dt \quad (2.30)$$

식(2.30)의 우변을 미소구간에서 유리하알함수 전개하면 다음과 같다.

$$\int_0^{t_{j+1}} f(t)dt = \tilde{f}(t_{j+1}) \simeq \tilde{F}(t_{j+1})RHar(t_{j+1}) \quad (2.31)$$

$$\int_0^{t_j} f(t)dt = \tilde{f}(t_j) \simeq \tilde{F}(t_j)RHar(t_j) \quad (2.32)$$

식(2.29)와 식(2.31), 식(2.32)을 식(2.30)에 대입한 후

$$\frac{1}{m} F(t_j)RHar(t_j) = \tilde{F}(t_{j+1})RHar(t_{j+1}) - \tilde{F}(t_j)RHar(t_j) \quad (2.33)$$

이항하여 정리한 후 식(2.26)의 관계를 도입하면 다음과 같고

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t_{j+1})RHar(t_{j+1}) &= \tilde{F}(t_j)RHar(t_j) + \frac{1}{m} F(t_j)RHar(t_j) \\ &= \left[\tilde{F}(t_j) + \frac{1}{m} F(t_j) \right] \cdot RHar(t_j) \\ &= \left[\tilde{F}(t_j) + \frac{1}{m} F(t_j) \right] \cdot D_L \cdot RHar(t_{j+1}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

양변의 유리하알벡터를 소거하면 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{F}(t_{j+1}) = \left[\tilde{F}(t_j) + \frac{1}{m} F(t_j) \right] \cdot D_L \quad (2.35)$$

여기에서 구한 $\tilde{F}(t_{j+1})$ 을 미소구간 유리하알역변환하면 함수 $f(t_{j+1})$ 에 대한 적분값을 구할 수 있으며 식(2.35)에서 보듯이 현재구간에서의 적분값은 이전구간에서의 값들을 이용해서 구할 수 있음을 알 수 있다.

2.4 미소구간에서 미분연산 유도

j번째 시점 t_j 에서의 함수에 관한 미분은 다음과 같이 나

타낼 수 있다.

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_j} \simeq \frac{f(t_j) - f(t_j - \Delta_j)}{\Delta_j} = \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{\Delta_j} \quad (2.36)$$

단, $\Delta_j = [t_j, t_{j+1}]$, $j=0, 1, \dots, m-1$

식(2.36)의 양변에 나타나는 항들을 미소구간에서 유리하알변환하면 다음과 같다.

$$f(t_j) = F(t_j)RHar(t_j) \quad (2.37)$$

$$f(t_{j-1}) = F(t_{j-1})RHar(t_{j-1}) \quad (2.38)$$

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_j} = \dot{f}(t_j) \simeq \dot{F}(t_j)RHar(t_j) \quad (2.39)$$

식(2.37)~(2.39)의 관계를 식(2.36)에 도입한 후

$$\dot{F}(t_j)RHar(t_j) = \frac{1}{\Delta_j} [F(t_j)RHar(t_j) - F(t_{j-1})RHar(t_{j-1})] \quad (2.40)$$

식(2.26)의 관계를 도입하여

$$\dot{F}(t_j)RHar(t_j) = m[F(t_j)RHar(t_j) - F(t_{j-1}) \cdot D_L RHar(t_j)] \quad (2.41)$$

단, $\Delta_j = \frac{1}{m}$

양변의 하알벡터를 소거하면 다음과 같다.

$$\dot{F}(t_j) = m \cdot [F(t_j) - F(t_{j-1}) \cdot D_L] \quad (2.42)$$

이상에서 구한 $\dot{F}(t_j)$ 을 미소구간에서 유리하알역변환 하면 j번째 시점 t_j 에서의 함수에 관한 미분을 구할 수 있다.

3. 미소구간 유리하알변환을 이용한 선형시스템의 해석

다음과 같이 n차 선형 시불변 시스템을 고려하자.

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

샘플링 시간(t_s)와 유리하알함수 전개항수(m)이 주어질 때 미소구간 유리하알변환을 이용하여 식(3.1)의 해를 구하여 보자.

유리하알함수는 구간 $t \in [0, 1)$ 에서 정의되므로 구간에서 유리하알함수 전개를 이용할 경우 일반적인 샘플링 시간(0.01, 0.02 등)을 이용할 수 없으며, $m=2^p$ 로 주어지는 전개항수에 따라 샘플링되는 데이터의 시간을 설정해야 한다. 따라서 임의의 샘플링 시간을 이용하기 위하여 시스템을

$$\tau = \frac{1}{t_m} t \text{로 스케일링하자.}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = t_m A x(t) + t_m B u(t) \quad (3.2)$$

단, $t_m = m \cdot t_s$ (scaling factor)

식(3.2)와 같이 스케일링하면 시구간 $t \in [0, m \cdot t_s]$ 에서 m 항 전개를 이용하므로 전체구간은 m 개의 미소구간으로 나뉘게 되며 각 미소구간은 샘플링 시간인 t_s 의 구간을 가지게 되므로 임의의 샘플링 시간을 이용할 수 있게된다.

식(3.2)의 양변을 적분하여 식(3.3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = x(0) + t_m A \int_0^t x(\tau) d\tau + t_m B \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

양변의 벡터를 j 번째 미소구간에서 유리하알함수 전개하면 다음과 같다.

$$x(t_j) = X(t_j) RHar(t_j) \quad (3.4)$$

$$x(0) = X^0 RHar(t_j) \quad (3.5)$$

$$\int_0^{t_j} x(t) dt = \tilde{x}(t_j) \approx \tilde{X}(t_j) RHar(t_j) \quad (3.6)$$

$$\int_0^{t_j} u(t) dt = \tilde{u}(t_j) \approx \tilde{U}(t_j) RHar(t_j) \quad (3.7)$$

여기서 X^0 는 초기조건에 대한 계수행렬이다. 식(3.4)~(3.7)의 관계를 식(3.3)에 도입하여 양변의 유리하알벡터를 소거하면 다음과 같다

$$X(t_j) = X^0 + t_m \cdot A \cdot \tilde{X}(t_j) + t_m \cdot B \cdot \tilde{U}(t_j) \quad (3.8)$$

단, $j=0, 1, \dots, m-1$

우변의 적분에 대한 유리하알계수값은 2.3절에서와 같이 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$\tilde{X}(t_j) = \left[\tilde{X}(t_{j-1}) + \frac{1}{m} X(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \quad (3.9)$$

$$\tilde{U}(t_j) = \left[\tilde{U}(t_{j-1}) + \frac{1}{m} U(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \quad (3.10)$$

여기서 첫 번째 미소구간 $\Delta_0 = [t_0, t_s]$ 에서의 $X(t_0)$ 값은 다음의 과정을 통하여 구한다. 초기조건을 이용하여 초기조건에 대한 계수를 다음과 같이 구한다.

$$X(0) = \frac{1}{m} x(0) RHar^T(t_0) \quad (3.11)$$

$$U(0) = \frac{1}{m} u(0) RHar^T(t_0) \quad (3.12)$$

또한 초기조건의 적분에 대한 계수는 미소구간 유리하알함수 전개와 미소구간 적분연산행렬을 이용하여 구할 수 있으며

$$\tilde{X}(0) = X(0) \cdot P_L \quad (3.13)$$

$$\tilde{U}(0) = U(0) \cdot P_L \quad (3.14)$$

식(3.9)~(3.14)의 관계를 식(3.8)에 도입하면 첫 번째 미소구간에서의 값을 식(3.15)와 같이 구할 수 있다.

$$X(t_0) = X^0 + t_m A \cdot \left[\tilde{X}(0) + \frac{1}{m} X(0) \right] \cdot D_L + t_m B \cdot \left[\tilde{U}(0) + \frac{1}{m} U(0) \right] \cdot D_L \quad (3.15)$$

식(3.15)에서 구한 첫 번째 구간에서의 미소구간 유리하알계수 $X(t_0)$ 를 식(2.12)를 이용하여 미소구간 유리하알역변환하면 $x^*(t_0)$ 를 구할 수 있다.

마찬가지로 j 번째 미소구간에서의 식(3.8)의 값은 다음과 같이 계산할 수 있으며

$$X(t_j) = X^0 + t_m A \cdot \left[\tilde{X}(t_{j-1}) + \frac{1}{m} X(t_{j-1}) \right] \cdot D_L + t_m B \cdot \left[\tilde{U}(t_{j-1}) + \frac{1}{m} U(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \quad (3.16)$$

단, $j=1, 2, \dots, m-1$

식(3.16)에서 구해진 미소구간 유리하알계수 $X(t_j)$ 를 미소구간 유리하알역변환하면 j 번째 미소구간에서의 함수값 $x^*(t_j)$ 를 구할 수 있다.

$$x^*(t_j) = X(t_j) \cdot RHar(t_j) \quad (3.17)$$

단, $j=0, 1, \dots, m-1$

식(3.17)을 m 번째 미소구간까지 구하면 $t \in [0, t_m]$ 까지의 값을 구한 것이다. 또한 t_m 시간 이후의 값들은 아래와 같이 다음구간에서의 초기 조건을 구함으로써 시구간을 $t \in [t_m, 2t_m]$ 으로 확장할 수 있다[11].

먼저, $t = t_m$ 에서 원 함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t_m) = x(0) + A \int_0^{t_m} x(\tau) d\tau + B \int_0^{t_m} u(\tau) d\tau \quad (3.18)$$

유리하알함수를 도입하여 식(3.18)을 전개한 후

$$x(t_m) = x(0) + A \cdot X \int_0^{t_m} RHar(\tau) d\tau + B \cdot U \int_0^{t_m} RHar(\tau) d\tau \quad (3.19)$$

정의구간 $t \in [0, t_m]$ 에서의 유리하알함수의 적분은 다음과 같은 값을 취하므로

$$\int_0^{t_m} RHar(i, \tau) d\tau = \begin{cases} t_m & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

식(3.19)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x(t_m) = x(0) + t_m \cdot A \cdot X_0 + t_m \cdot B \cdot U_0 \quad (3.21)$$

여기서 x_0 와 U_0 는 $x(\tau)$ 와 $u(\tau)$ 의 $RHar(0, \tau)$ 에 대한 계수 행렬로써 n 차 벡터이다.

식(3.21)의 계수벡터를 역변환 하여 나타내면 다음과 같고

$$x(t_m) = x(0) + t_m \cdot A \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} RHar(0, i) x_i^* + t_m \cdot B \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} RHar(0, i) u_i^* \quad (3.22)$$

$t_m = m \cdot t_s$ 이고 $RHar(0, i)$ 값이 구간에서 항상 1의 값을 가지므로 식(3.22)는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$x(t_m) = x(0) + t_s \cdot A \cdot \sum_{i=0}^{m-1} x_i^* + t_s \cdot B \cdot \sum_{i=0}^{m-1} u_i^* \quad (3.23)$$

식(3.23)에서 구한 $x(t_m)$ 을 다음구간의 초기조건으로 이용할 수 있으며 식(3.15)와 식(3.16)을 이용하여 구간에서의 값을 계산할 수 있다. 또한 제안된 방법을 이용하면 유리하알함수의 전개항수에 상관없이 샘플링 시간을 임의로 설정할 수 있으며 다음구간에서의 초기값을 계산함으로써 시간을 확장할 수도 있다. 따라서 본 방법은 실시간 계산을 필요로 하는 시스템에의 적용이 가능할 것이다.

4. 적용 예

다음과 같은 R-L-C 회로를 고려하자[10].

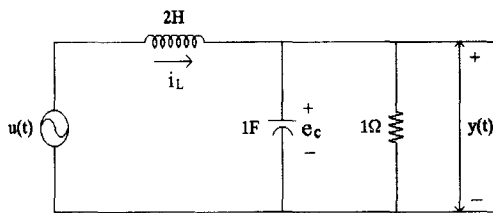


그림 1 R-L-C 회로
Fig. 1 R-L-C circuit

위의 회로는 다음과 같은 과정을 통하여 상태방정식으로 모델링할 수 있다.

$$u(t) = 2 \frac{d}{dt} i_L(t) + e_c(t) \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} e_c(t) = i_L(t) - e_c(t) \quad (4.2)$$

출력방정식은 다음과 같다.

$$y(t) = e_c(t) \quad (4.3)$$

따라서, 다음과 같은 동적방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4.4)$$

$$y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

단, $x_1(t) = i_L(t)$, $x_2(t) = e_c(t)$

초기값과 샘플링 시간(t_s), 전개항수(m)가 다음과 같고 스텝입력을 가하였을 경우

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u(t) = u_s(t) \quad (4.5)$$

$$t_s = 0.02, \quad m = 4$$

MATLAB 6.0을 이용하여 5초간 시뮬레이션한 결과를 그림 5에 나타내었다. 그림 2에서 실선은 실제값을 나타내고 점선은 본 연구에서 제시하는 방법에 의한 결과이다.

그림 3에는 그림 2에서의 시구간을 $t = [0, 0.5]$ 구간으로 확대한 결과를 보여주고 있다.

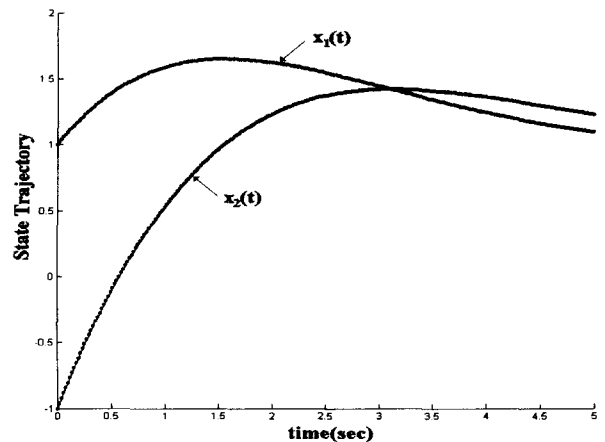


그림 2 제안된 방법에 의한 상태궤적
Fig. 2 State trajectory by the proposed method

이상의 결과는 기존의 하알함수 적용에서 가지지 못했던 시뮬레이션 하고자 하는 전체 구간에서의 데이터를 이용한 것이 아니라 현재구간에서의 샘플 데이터를 이용하여 실시간 계산이 가능함을 보여주고 있다. 또한 하알함수의 정의 구간이 $t = [0, 1]$ 이므로 정의구간에서 전개할 경우 샘플링 시간이 불명확해지게 된다. 이는 하알함수의 기저함수가 2^p 개를 이용하므로 발생하는 것으로써, 예로써 8항 전개를 이용할 경우 샘플링 시간은 1/8초가 된다. 즉 일반적으로 사용하는 샘플링 시간을 이용할 수 없다. 따라서 본 논문에서 제안하는 스케일링 인자를 도입하고 다음구간에서의 초기조건을 계산하게 되면 임의의 샘플링 시간을 이용할 수 있게 된다. 그림 2와 그림 3에서는 제안된 방법들을 이용한 결과로써 하알함수를 이용하여 실시간으로 선형계를 해석하는 방법의 유용성을 보여주고 있다.

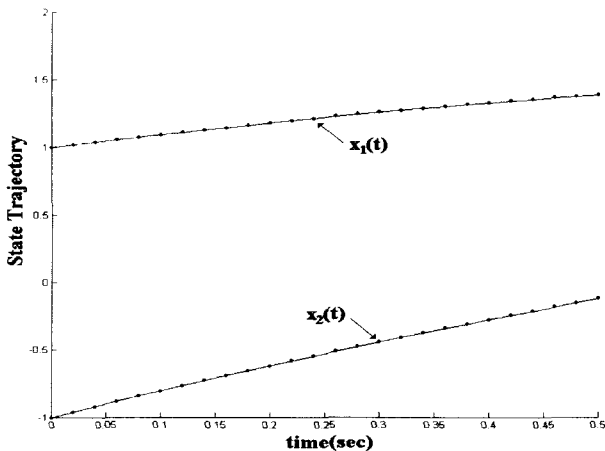


그림 3 제안된 방법에 의한 상태계적(확대)
Fig. 3 State trajectory by the proposed method

5. 결 론

본 연구에서는 실시간 데이터 처리를 위하여 미소구간에 서의 유리하알변환을 위한 대수적 방법을 제안하였으며 미 소구간에서 함수의 적분과 미분을 계산할 수 있는 일반화된 방법을 제안하였다. 또한 기존의 직교함수 적용에서의 단점 인 샘플값을 취할 때 전개항수의 제약으로 인하여 일반적인 샘플링 시간을 이용할 수 없다는 점을 본 연구에서는 샘플 링 시간과 전개항수를 포함하는 스케일링 인자를 도입함으 로써 일반적인 샘플링 시간을 취하여 계산할 수 있도록 하 였다. 그리고 다음구간의 초기조건을 계산함으로써 시구간 을 임의로 확장 가능하게 하였으며 적용예에서 보듯이 선형 계의 해석에 적용하여 그 유용성을 확인하였다. 직교함수를 이용한 신호 분석 시 최종시간까지의 신호를 모두 알고 있 어야만 적용 가능하다는 단점, 즉 실시간 처리는 어렵다는 점을 본 논문에서 제안된 방법을 이용하면 실시간 데이터를 처리할 수 있으므로 현재의 신호만으로도 분석이 가능하게 하였다. 또한 제안된 방법을 이용하여 적응제어와 같은 실 시간 데이터 처리를 필요로 하는 이론에 적용 가능할 것으 로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] Alfred Haar, "Zur theorie der orthogonalen funktionen systeme", *Mathematische Annalen*, 69:331-371, 1910.
 [2] J. E. Shore, "On the applications of Haar functions", *IEEE Trans. Communication*, vol.21, 209-216, 1973
 [3] P. R. Roeser and M. E. Jernigan, "Fast Haar transform algorithms", *IEEE Trans. Computers*, vol. C-31, no2, 175-177, 1982
 [4] M. Ohkita and Y. Kobayashi and M. Ionue, "Application of Haar functions to solution of differential equations", *Mathematics and Computers in Simulation*, 25(1), 31-38, 1983

[5] M. Ohkita and Y. Kobayashi, "An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 33(9), 853-862, 1986
 [6] M. Ohkita, "An application of rationalized Haar functions to the solution of delay-differential systems", *Mathematics and Computers in Simulation*, 29(6), 447-491, 1987
 [7] Albansei. M. G. and Ferretti. M., "A high speed Haar transform implementation", *J. Circuit Syst. Computer*, vol/2, no3, 207-226, 1992
 [8] Kanti B Datta and B M Mohan, *Orthogonal Functions in Systems and Control*, World Scientific Publishing, 1995
 [9] J. L. Atsushi Watanabe and Seichi Kawata, "On operational matrices of Walsh functions", *Proc. American Control Conference Albuquerque*, 2272-2277, 1997
 [10] 안두수, *WALSH함수와 시스템 제어*, 복두출판사, 2000
 [11] 김진태, 김태훈, 이명규, 안두수, "월쉬함수에 의한 비선형계의 해석 및 최적제어에 관한 연구", *대한전기학회논문집*, 제49D권, 7호, 354-362, 2000

저 자 소 개



김진태 (金珍泰)

1972년 1월 1일 생. 1997년 경성대학교 공대 전기공학과 졸업. 1999년 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1999년~2001년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 박사과정 수료

Tel : (031) 290-7167

E-mail : oshkjt@ece.skku.ac.kr



안두수 (安斗守)

1937년 6월 9일생. 1960년 서울대학교 공대 전기공학과 졸업. 1964년 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1982년 중앙대학교 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1971~현재 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터 공학부 교수

Tel : (031) 290-7101

E-mail : dsahn@ece.skku.ac.kr