이산 시변 상태지연시스템의 안정성

論 文
51D-2-1

Stability of Time-Varying Discrete State Delay Systems

徐 榮 秀*
(Young Soo Suh)

Abstract - Stability conditions of time-varying discrete state delay systems are proposed. The time-varying state delay is assumed that (i) the magnitude is known to lie in a certain interval (ii) the upper bound of the rate of change is known. Under these conditions, new stability conditions are derived based on switched Lyapunov functions. Stability conditions for both fast time-varying and slowly time-varying delay are considered.

Key Words : Time-varying systems, time delay systems, Lyapunov function

1. 서 론

물질의 이동 또는 신호의 전달에서 발생하는 시간지연요소를 시스템 내부에 포함하고 있는 상태 시간지연 시스템[1-2]의 안정성에 대해 많은 연구가 이루어져 왔다. 특히 최근에는 통신 시스템에서의 시간 지연요소의 해석 [3] 및 대규모 전력시스템에서의 시간 지연요소의 해석 [4] 등의 문제에 대한 관심이 높아지고 있다.

이러한 시간지연요소를 가지는 이산 상태지연시스템의 경우 시간지연이 상수이고 정확히 알려져 있는 경우에는 이산 상태 시간지연시스템을 시간지연이 없는 등가 확장시스템으로 변환할 수 있음이 알려져 있다. 따라서, 변환된 확장시스템을 사용해 쉽게 시스템의 안정성을 판별할 수 있고, 또한 제어기도 쉽게 설계할 수 있다.

시간 지연이 상수이고 그 값이 알려져 있지 않은 시스템에 대해서는 강인제어(robust control)의 이론을 사용하여 안정성의 조건을 제시한 결과 [5-7]들이 있다. 이러한 조건들은 시간지연의 크기가 의존하지 않는 안정조건들임으로 시간지연 비의존(delay independent) 안정조건이라고 불린다. 한편, 시간 지연이 상수이고 그 값이 정확하게 알려져 있지는 않으나 값의 최대치가 알려져 있는 시스템에 대해서는 최대치의 값에 의존하는 안정조건 [8]이 있다. 이러한 조건들은 시간시연의 크기에 의존하는 안정조건임으로 시간지연 의존(delay dependent) 안정조건이라고 불린다.

이러한 조건들은 모두 시간지연이 시간에 따라 변하지 않는 시불변 시스템에 대한 안정조건 들이며, 통신시스템의 통신에 따른 시간지연과 같이 시간에 따라 시간지연이 변하는 시변 시스템의 안정조건에 대한 결과는 많지 않다. 최근의 결과로는 [9]를 들 수 있는데, 시간지연이 어떤 범위 안에서 시간에 따라서 변하는 시스템에 대한 안정조건을 제시하고 있다.

본 논문에서는 시간지연이 어떤 범위 안에서 시간에 따라서 변하는 시스템에 대해서, 그 변화량의 상한이 알려져 있는 경우, 그 정보를 활용하는 안정조건을 제시한다. 변화량의 상한정보를 활용함으로서 주어진 조건하에서 보수적이지 않은(nonconservative) 안정조건을 제시하고 있다.

다음은 본 논문에서 사용될 용어들의 정의이다. 임의의 대칭인 행렬 $X, Y \in R^{n \times n}$ 에 대해서 $X > Y$ 은 $X - Y$ 가 양한정 행렬(positive definite matrix) 임을 의미하고, x' 는 벡터 $x \in R^n$ 의 전치(transpose)를 나타낸다.

2. 이산 시변 상태지연시스템의 안정조건

다음과 같은 이산시간 상태지연시스템을 고려한다.

$$x(k+1) = A_0 x(k) + A_1 x(k - N(k)) \tag{1}$$

여기서 $x(k) \in R^n$ 는 상태벡터이고 $N(k)$ 는 시변(time-varying)인 상태지연시간을 나타낸다. $N(k)$의 크기는 정확히 알려져 있지 않고, 다음과 같이 크기의 변동범위가 알려져 있다고 가정한다.

$$1 \le N_1 \le N(k) \le N_2 \tag{2}$$

$N(k)$ 의 변화율도 다음과 같이 그 상한이 알려져 있다고 가정한다.

$$|N(k+1) - N(k)| \le N_3 \tag{3}$$

---

*正會員 : 蔚山大學 電氣電子情報시스템學科 助敎授 · 工博
接受日字 : 2001年 5月 18日
最終完了 : 2002年 1月 8日

실제로 대부분의 시스템은 상태지연시간 $N(k)$ 가 정확히 알려져 있지 않고 (2)와 (3)과 같이 그 변동범위 및 변화율의 정보만이 알려져 있는 경우가 많다. 만약, $N_3=0$ 이면, (1)의 시스템은 시불변(time-invariant) 시스템이 된다. 이런 시불변 상태 지연 시스템의 안정 조건은 [5-8]에서 찾아 볼 수 있다. $N_3>1$이면 시변 상태지연시스템이 되는데, $N(k)$의 변화율의 상한을 나타내는 N_3가 클수록, 상태지연시간 $N(k)$가 급격히 변화하는 시스템을 나타낸다. (2)의 변동범위의 조건에서 $N_3 \le N_2-N_1$ 의 조건을 만족해야함을 알 수 있다.

시스템 (1)의 안정성을 증명하기 위하여, 다음과 같이 $n(N_2-N_1+2)\times n(N_2-N_1+2)$차원의 행렬 F_i를 정의한다.

$$F_i=\begin{bmatrix} A_0 & Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{N_2-N_1+1} \\ I & & & & \\ & I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & 0 \end{bmatrix},\quad N_1\le i\le N_2 \tag{4}$$

여기서 $Q_j=\delta(j,i)A_1$이고 지정되지 않은 항은 전부 0으로 생각하고, $\delta(i,j)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\delta(i,j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

예를 들면, $N_1=1$및 $N_2=3$인 경우의 F_1, F_2, F_3는 다음과 같다.

$$F_1=\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & 0 & 0\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\end{bmatrix},\quad F_2=\begin{bmatrix} A_0 & 0 & A_1 & 0\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\end{bmatrix},$$
$$F_3=\begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & A_1\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\end{bmatrix}$$

만약 $N(k)=i$ (i는 $N_1\le i\le N_2$ 의 조건을 만족하는 상수)로 시불변이라고 하면, F_i는 시스템 (1)의 확장된 시스템의 'A' 행렬이 된다. 즉, 확장된 상태 $z(k)$ 를 다음과 같이 정의하면

$$z(k)=\begin{bmatrix} x(k)\\ x(k-1)\\ \vdots\\ x(k-(N_2-N_1+1))\end{bmatrix}, \tag{5}$$

시스템 (1)은 다음의 확장 시스템과 등가이다.

$$z(k+1)=F_iz(k) \tag{6}$$

시스템 (1)과 (6)의 등가성은 (1)식과 (6)식을 비교함으로서 쉽게 확인할 수 있다. 즉, (1)의 $x(k)$ 값과 (5)를 통해 정의된 $x(k)$ 값은 같은 초기치 $x(k)$, $-(N_2-N_1+1)\le k\le 0$ 의 조건하에서 동일하다. 예를 들면, $N_1=1$, $N_3=3$의 경우 $N(k)=2$ 라고 가정하면 다음 두 시스템은 등가이다.

$$x(k+1)=A_0x(k)+A_1x(k-2)$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1)\\ x(k)\\ x(k-1)\\ x(k-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_0 & 0 & A_1 & 0\\ I & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k)\\ x(k-1)\\ x(k-2)\\ x(k-3)\end{bmatrix}$$

먼저, $N(k)=i$ 로 가정하고 (즉, (1)이 시불변이고 상태지연시간이 정확히 알려져 있다고 가정), (1)의 안정성의 조건을 (6)을 사용해 유도한다.

보조정리 1: $N(k)=i$ (i는 $N_1\le i\le N_2$의 조건을 만족하는 상수)로 (1)이 시불변 상태지연 시스템이라고 가정하자. 다음 (7)식을 만족하는 $P=P'>0$이 존재하면, 시스템 (1)은 안정하다.

$$F_i'PF_i < \lambda P \tag{7}$$

여기서 $0<\lambda<1$.

(증명) Lyapunov 정리에 의해 (7)을 만족하는 $P=P'>0$가 존재하면, 시스템 (6)은 안정하다. 시스템 (6)과 (1)은 등가임으로, 시스템 (1)은 안정하다. ■

보조정리 1은 $N(k)$가 시불변이고, 정확히 알려져 있는 경우의 안정성의 조건을 제시하고 있다. 다음은 $N(k)$ 가 시불변이고, 그 크기가 정확히 알려져 있지 않는 경우의 안정조건을 생각한다.

보조정리 2: $N(k)=i$ (i는 상수로서 그 크기가 정확히 알려져 있지 않고, (2)를 만족하는 것이 알려져 있음)로, (1)이 시불변 상태지연 시스템이라고 가정하자. (2)의 범위에 속하는 각 i에 대하여, 다음 (8)식을 만족하는 $P_i=P_i'>0$ 이 존재하면 시스템 (1)은 안정하다.

$$F_i'P_iF_i < \lambda_iP,\ N_1\le i\le N_2 \tag{8}$$

여기서 $0<\lambda_i<1$, $N_1\le i\le N_2$,

(증명) 보조정리 1로부터 자명하다. ■

이제 $N(k)$ 가 (2) 및 (3)의 조건을 만족하는 시변시스템의 경우를 생각하자. 이 경우에는 보조정리 2의 안정조건으로는 시스템 (1)의 안정성을 논할 수 없다. 즉, (2)의 범위에 속하는 $N(k)=i$ 에 대해서는 안정할지라도, 시변시스템의 성질

때문에 시스템 (1)은 불안정할 수가 있다. 본 논문의 주 결과인 다음 정리에서는 시변 시간지연요소를 가지는 시스템의 안정조건을 제시한다.

정리1: $N(k)$ 가 (2)와 (3)을 만족하는 시변시스템을 가정하자. 다음의 조건 (i), (ii)를 만족하면, 시스템 (1)은 안정하다.

(i) 다음식 (9)를 만족하는 $P_i = P_i' > 0$가 존재한다.

$$F_i' P_i F_i < \lambda_i P,\ 0 < \lambda_i < 1,\ N_1 \le i \le N_2 \tag{9}$$

(ii) 다음의 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} \lambda_i \mu_{ij} < 1,\ N_1 \le i \le N_2, \\ \max(N_1, i-N_3) \le j \le \min(i+N_3, N_2) \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 μ_{ij}는 다음의 조건을 만족한다.

$$P_j < \mu_{ij} P_i \tag{11}$$

(증명) k시점에서의 상태지연시간 $N(k)$ 가 i ($N_1 \le i \le N_2$) 라고 하자. $k+1$ 시점에서의 $N(k+1)$ 의 값을 j라고 하면, $N(k)$ 가 (2)와 (3)을 만족하기 때문에 j는 (10)의 범위를 만족한다. 이때, $x(k)$ 의 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_0 x(k) + A_1 x(k-i) \\ x(k+2) &= A_0 x(k+1) + A_1 x(k-j) \end{aligned} \tag{12}$$

위 식을 (5)의 확장상태로 표시하면,

$$\begin{aligned} z(k+1) &= F_i z(k) \\ z(k+2) &= F_j z(k+1) \end{aligned} \tag{13}$$

가 되고, 이 확장상태 $z(k)$ 에 대해 Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V_i(k) = z(k)' P_i z(k) \tag{14}$$

여기서 i는 k시점에서의 $N(k)$ 의 값이 i임을 나타낸다. 식 (9)에 의해 다음이 성립한다.

$$V_i(k+1) < \lambda_i V_i(k) \tag{15}$$

또한 식 (11)에 의해 다음이 성립한다.

$$V_j(k+1) < \mu_{ij} V_i(k+1) \tag{16}$$

식 (15)와 (16)을 결합하면, 다음과 같다.

$$V_j(k+1) < \mu_{ij} V_i(k+1) < \mu_{ij} \lambda_i V_i(k) \tag{17}$$

식 (10)에서 $\mu_{ij}\lambda_i < 1$임으로, 다음이 성립한다.

$$V_j(k+1) < V_i(k) \tag{18}$$

식 (18)의 관계는 (2) 및 (3)을 만족하는 모든 $N(k)$ 에 대해서 성립함으로, Lyapunov 정리에 의해서 $z(k)$ 는 점근적으로 안정(asymptotically stable)하다. 따라서 $x(k)$ 도 점근적으로 안정하다. ■

정리 1의 조건 (9)는 $N_1 \le N(k) \le N_2$ 사이의 각 $N(k)$에 대해서 안정성을 보장하고 있고, 조건 (10)은 $N(k)$가 시간에 따라 변해도 시스템의 안정성을 유지하는 조건을 제시하고 있다. (10)의 조건은 N_3가 클수록 (즉, $N(k)$의 변화량이 클수록), 더 만족하기 어려워지는 것을 알 수 있다. 즉, $N(k)$가 급격히 변할수록, 시스템이 불안정해질 가능성이 큼을 알 수 있다.

다음은 시간지연요소 $N(k)$가 (2)의 범위 안에서 천천히 변하는 시스템에 대한 안정조건을 생각한다. 예를 들면, 반응시간이 매우 느리고, 그에 따르는 상태시간지연 시간의 변화가 매우 느린 화학공정과 같은 시스템이 그 예가 될 수 있다. 만약, $N(k)$의 변화량이 최대 1이고 (즉, $|N(k+1) - N(k)| \le 1$), 한 번 값이 변하면 최소한 N_4시간은 그 값을 유지한다고 가정한다. 예를 들면, $N_4 = 3$인 경우의 $N(k)$ 는 다음과 같이 변할 수 있다.

$N(k)$: 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 2 2 2 2

위에서 최소한 $N_4 = 3$시간은 값이 변하지 않음을 알 수 있다. $N_4 = \infty$인 경우는 시불변 시스템이 된다.

보조정리 4: $N(k)$가 (2)의 범위에서 최대변화량 1을 가지고 변하고, 한 번 값이 변하면 최소한 N_4시간은 그 값을 유지한다고 가정하자. 다음의 조건 (i), (ii)를 만족하면, 시스템 (1)은 안정하다.

(i) 다음식 (19)를 만족하는 $P_i = P_i' > 0$가 존재한다.

$$F_i' P_i F_i < \lambda_i P,\ 0 < \lambda_i < 1,\ N_1 \le i \le N_2 \tag{19}$$

(ii) 다음의 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} \lambda_i^{N_4} \mu_{ij} < 1,\ N_1 \le i \le N_2, \\ \max(N_1, i-1) \le j \le \min(i+1, N_2) \end{aligned} \tag{20}$$

여기서 μ_{ij}는 (11)의 조건을 만족한다.

(증명) 정리 3의 증명과 동일하게 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$V_j(k+1) < \mu_{ij}\lambda_i V_i(k) \tag{21}$$

가정에 의해 $N(k)=i$인 상태를 최소한 N_4시간은 유지함으로 다음이 성립한다.

$$V_j(k+1) < \mu_{ij}\lambda_i V_i(k) < \mu_{ij}\lambda_i^{N_4} V_i(k-(N_4-1)) \tag{22}$$

식 (20)의 조건을 만족하면 다음이 성립한다.

$$V_j(k+1) < V_i(k-(N_4-1)) \tag{23}$$

위 식은 $N(k)$에 대한 가정을 만족하는 모든 i,j에 대해서 성립함으로, Lyapunov 정리에 의해서 $z(k)$는 점근적으로 안정하다. 따라서, $x(k)$는 안정하다. ■

보조정리 4에서 조건 (i)을 만족하고 $N(k)$의 변화가 충분히 느리면 (즉, N_4가 충분히 크면), $\lambda_i^{N_4}$는 0으로 접근한다. 따라서 충분히 천천히 변하는 시스템에 대해서는 (i)의 조건을 만족하면, 자동으로 (ii)의 조건도 만족된다. 극단적인 $N_4=\infty$ (즉, (1)이 시불변 시스템)의 경우, $\lambda_i^{N_4}=0$이 되어, 조건 (ii)는 항상 만족됨을 알 수 있다.

3. 안정조건의 수치계산

정리 3의 조건 (i) 및 (ii)는 그 자체로는 쉽게 계산할 수 있는 형태로 되어 있지 않다. 정리 3의 조건 (i) 및 (ii)를 구하기 위해 다음과 같은 계산 방법을 제시한다.

계산방법:
(i) 다음의 일반화 고유치 문제를 푼다.

$$\begin{array}{r} \text{minimize } \alpha \\ F_i' P_i F_i < P_i,\ N_1 \le i \le N_2 \\ P_{i+1} < \alpha P_i,\ N_1 \le i \le N_2 \\ P_i < \alpha P_{i+1} \\ P_i = P_i' > 0 \end{array} \tag{24}$$

(ii) 식 (24)에서 구한 P_i에 대해서 다음식 (25)를 만족하는 λ_i를 구한다.

$$\begin{array}{r} \text{minimize } \lambda_i \\ F_i' P_i F_i < \lambda_i P_i,\ N_1 \le i \le N_2 \end{array} \tag{25}$$

(iii) 식 (25)에서 구한 λ_i 및 α (μ_{ij}의 역할)를 사용하여, 정리 3의 조건들이 만족되는가를 확인한다.

식 (24)의 일반화 고유치 문제 및 (25)식의 선형부등식 [10]은 컨벡스 최적화(convex optimization) 문제로서 상용의 계산 프로그램 (예를들면, Matlab의 LMI Toolbox 등)으로 매우 효율적으로 푸는 것이 가능하다.

정리 3의 안정조건을 다음의 간단한 수치예에 적용한다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.15 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} x(k) \\ &+ \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & -0.4 \end{bmatrix} x(k-N(k)) \end{aligned} \tag{26}$$

여기서 $N_1=1$ 및 $N_3=1$이라고 가정한다. 본 절에서 제안한 계산 방법으로 Matlab의 LMI toolbox를 사용해 계산하면 $N_2 \le 4$ 일 때, 시스템 (26)이 안정하다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 상태변수에 시변 시간지연요소가 존재하는 이산 시변 상태지연시스템에 대한 안정조건을 제시하였다. 이 결과는 최근에 많이 연구되고 있는 시변 시간지연요소를 가지는 네트워크 시스템의 해석 등에 유용하게 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 안정성의 조건은 시간지연요소의 크기의 존재범위 및 그 변화량의 크기의 정보를 활용하여 유도하였다. 제시된 안정성의 조건은 쉽게 계산할 수 있는 형태가 아니기 때문에, 안정성의 조건을 일반화 고유치 문제로 변형시켜 계산하였다.

정리 1에서 유도된 조건을 일반화 고유치 문제로 변환하는 과정에서 안정 조건이 보수적 (conservative)으로 될 가능성이이 있음으로, 이러한 보수성을 줄이는 계산 알고리즘을 개발하는 것인 앞으로의 과제라고 할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 정보통신부 우수시범학교 지원사업의 지원에 의해 이루어졌습니다.

참 고 문 헌

[1] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, Introduction to Functional Difference Equations, Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] Y. S. Suh, "Diagonal balanced truncation of discrete delay systems," Automatica, vol. 35, pp. 1855-1860, 1999.

[3] L. Xiao, A. Hassibi and J. P. How, "Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach," Proceedings of the American Control Conference, pp. 2199-2204, 2000.

[4] D. S. Shim, "Decentralized H_∞ stabilization of linear time-invariant system with delays," Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, pp. 1382-1383, 1996.

[5] Y. Chang and G. L. Wise, "Robust D-stability for discrete time systems with time delays," Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, pp. 395-400, 1995.

[6] J. W. Wu and K. S. Hong, "Delay independent exponential stability criteria for time-varying discrete delay systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, no. 4, April, 1994.

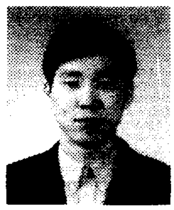
[7] T. J. Su and W. J. Shyr, "Robust D-Stability for linear uncertain discrete time-delay systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 39, no. 2, Feb., 1994.

[8] B. Lee and J. G. Lee, "Delay-dependent stability criteria for discrete-time delay systems," Proceedings of the American Control Conference, pp. 319-320, 1999.

[9] 송성호, 김점근, 강창익, "시변시간지연요소를 갖는 이산시간 선형시스템의 점근안정도", 대한 전기학회논문지, 제48권, 5호, pp. 580-585, 1999.

[10] S. Boyd, L. E. Ghauoi, E. Feron, and V. Balakrichnan, Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

저 자 소 개



서 영 수 (徐 榮 秀)

1967년 10월 6일생. 1990년 서울대 공대 제어계측과 졸업. 1992년 동 대학원 제어계측과 졸업(석사). 1997년 동경대학교 계수공학과 졸업(공박). 2000~현재 울산대학교 전기전자정보시스템공학부 조교수

Tel: (052)259-2196 Fax: (052)259-1686

E-mail: suh@ieee.org