블럭펄스 함수를 이용한 기준 모델 적응 제어기 설계

論 文
51D-1-1

The Design of Model Reference Adaptive Controller via Block Pulse Functions

金 珍 泰* · 金 泰 勳* · 李 明 珪** · 安 斗 守***
(Jin-Tae Kim · Tai-Hoon Kim · Myung-Kyu Lee · Doo-Soo Ahn)

Abstract - This paper proposes a algebraic parameter determination of MRAC(Model Reference Adaptive Control) controller using block Pulse functions and block Pulse function's differential operation. Generally, adaption is performed by solving differential equations which describe adaptive low for updating controller parameter. The proposes algorithm transforms differential equations into algebraic equation, which can be solved much more easily in a recursive manner. We believe that proposes methods are very attractive and proper for parameter estimation of MRAC controller on account of its simplicity and computational convergence.

Key Words : MRAC, Block Pulse Function, Block Pulse Function's Differential Operation

1. 서 론

완전 모델 추종 조건(PMFC : Perfect Model Following Condition)에 기초한 기준 모델 적응 제어(MRAC : Model Reference Adaptive Control)는 모델과 실제 플랜트의 입출력신호를 이용한 제어신호를 플랜트에 가하여 기준모델의 출력과 플랜트 출력의 오차를 0이 되게 하는 적응제어 방법으로 일반적으로 적응규칙에 의하여 수행된다[1,3,4]. 제어기의 파라미터를 추정하는 적응규칙은 일반적으로 미분방정식으로 표현되며, 이러한 미분방정식의 해를 구함으로써 제어기 파라미터를 조정하게 된다. 본 연구에서는 블럭펄스함수를 이용하여 미분방정식으로 표현되는 적응규칙을 대수방정식의 형태로 변환함으로써 간단한 대수적 계산으로 제어기 파라미터를 구하고자한다. 블럭펄스함수는 월쉬함수나 하알함수와 같은 직교함수가 가지는 전개항수의 제약을 가지지 않는 다는 장점을 가지고 있다[2,10]. 일반적인 직교함수나 블럭펄스함수의 적용에서는 미분방정식의 해를 구하기 위하여, 미분방정식을 적분방정식으로 변환한 후 적분연산식을 이용하여 대수적 연산을 수행하고 있다[7]. 본 논문에서는 이러한 적분연산식을 사용하지 않고 블럭펄스함수의 미분연산식을 사용함으로써 적분방정식으로의 변환과정 없이 바로 미분방정식으로부터 적응규칙을 구해내는 방법을 제시하였다. 또한 일반적인 직교함수나 블럭펄스함수를 이용할 때는 최종시간을 알고있어야 한다는 단점을 가지고 있다. 이는 실시간 제어시스템 구현 시 커다란 제약으로써 작용할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 블럭펄스함수의 적용에서 나타나는 최종시간 항을 없앰으로써 시뮬레이션이나 실제 적용 시 시간 제약을 없애는 방법을 제안하고자 하며 이를 이용하여 실시간 기준 모델 적응 제어기를 설계하고자 한다.

* 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터 工學科 博士課程 修了
** 正 會 員 : 慶星大 電氣電子 및 컴퓨터 工學部 敎授 · 工博
*** 正 會 員 : 成均館大 電氣電子 및 컴퓨터 工學部 敎授 · 工博
接受日字 : 2001年 9月 19日
最終完了 : 2001年 12月 11日

2. 블럭펄스 함수

블럭펄스함수는 샘플링 구간에서만 1의 값을 갖고 나머지 구간에서는 0의 값을 갖는 함수의 집합으로 구성되며, 구간 $t\in[0, t_f)$에서 다음과 같이 정의된다[2,10].

$$\Phi_i(t)=\begin{cases}1, & (i-1)\frac{t_f}{m} \le t < i\frac{t_f}{m}\\ 0, & \text{그외구간}\end{cases} \tag{1}$$

단 $i=1,2,3,\cdots,m$

또한 블럭펄스함수는 다음과 같은 기본특성들을 가지고 있다.

[비결합성(disjointness)]

블럭펄스함수들은 구간 $t\in[0, t_f)$에서 서로 비 결합되어 있다.

$$\Phi_i(t)\ \Phi_j(t)=\begin{cases}\Phi_i(t), & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{2}$$

단, $i,j=1,2,3\cdots,m$

이러한 성질은 블럭펄스함수의 정의로부터 직접 얻어지며 블럭펄스함수의 비결합성 때문에 결합된 항은 곱셈과 나눗셈 또는 다른 연산이 행하여 질 때 보다 간단한 연산을 할 수 있다.

[직교성(orthogonality)]

블럭펄스함수는 구간 $t\in[0, t_f)$에서 서로 직교한다.

$$\int_0^{t_f} \Phi_i(t)\ \Phi_j(t)\,dt = \begin{cases} h, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \tag{3}$$

단, $i, j=1, 2, 3\cdots, m$

이 성질은 블럭펄스함수의 비결합성으로부터 직접 얻을 수 있으며 블럭펄스함수 계수벡터를 결합하기 위해 이용된다.

적분 가능한 임의의 함수 $x(t)$는 구간 $t\in[0, t_f)$에서 블럭펄스함수로 다음과 같이 유한 급수전개 할 수 있다.

$$x(t) \cong \sum_{i=1}^{m} X_i \Phi_i(t) \tag{4}$$

i번째 블럭펄스함수의 계수벡터 X_i는 평균자승오차를 최소화하는 값으로 식(5)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{m}{t_f}\int_0^{t_f} x(t)\ \Phi_i(t)dt \\ &= \frac{m}{t_f}\int_{(i-1)\frac{m}{t_f}}^{i\frac{m}{t_f}} x(t)\,dt \\ &\cong \frac{1}{2}\left[x\left(i\frac{m}{t_f}\right)+x\left((i-1)\frac{m}{t_f}\right)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

단, $i=1, 2, 3\cdots, m$

실유계 연속함수 $x(t)$에 대한 미분 $\dot{x}(t)$는 다음과 같은 블럭펄스함수 미분연산식을 이용하여 구할 수 있다. 원함수 $x(t)$에 대한 i번째 세부구간에서의 블럭펄스함수 계수 X_i와 미분값에 대한 블럭펄스함수 계수값을 $\overline{X}_i$라고 할 때 $\dot{x}(t)$에 대한 i번째 블럭펄스함수 계수값을 다음과 같이 반복적으로 구할 수 있다[4].

$$\overline{X}_1 = \frac{2m}{t_f}(X_1 - x(0)) \tag{6}$$

$$\overline{X}_i = \frac{2m}{t_f}(X_i - X_{i-1}) - \overline{X}_{i-1} \tag{7}$$

단, $i=2, 3, 4\cdots, m$

3. 블럭펄스함수를 이용한 MRAC설계

다음과 같이 왜란이 없는 MRAC 시스템을 고려하자.

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = a_m x_m(t) + b_m r(t) \tag{8}$$

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = a_p x_p(t) + b_p u(t) \tag{9}$$

- m : reference model
- p : plant
- $x_m(t)$: output of reference model
- $x_p(t)$: output of plant
- a_m, b_m : model parameter
- a_p, b_p : plant parameter
- $r(t)$: reference input
- $u(t)$: control input

플랜트 출력 $x_p(t)$가 기준모델출력 $x_m(t)$을 따라가도록 하기 위한 제어기 입력은 식(10)과 같다.

$$u(t) = \lambda_1(t) r(t) + \lambda_2(t) x_p(t) \tag{10}$$

여기서 $\lambda_1(t)$와 $\lambda_2(t)$는 가변 궤환이득을 말하며 식(11)로 나타나는 기준모델출력과 모델출력의 오차를 0으로 하는 방향으로 조정된다.

$$e(t) = x_p(t) - x_m(t) \tag{11}$$

제어기 파라미터 조정을 위한 적응규칙은 MIT 규칙에 의하여 다음과 같다.

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\gamma e(t) r(t) \tag{12}$$

$$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = -\gamma e(t) x_p(t) \tag{13}$$

여기서 γ는 적응이득을 말하며 양의 상수값을 갖는다. 다음으로 식(12), 식(13)으로 나타나는 제어기 파라미터의 적응 규칙을 2장에서 소개된 블럭펄스함수를 이용하여 구하여 보자. 우선 블럭펄스함수의 적용에서 나타나는 최종시간(t_f)항을 없애기 위하여 $t_f=1$이라고 가정하고 전개항수 또한 실제 계에 적용가능 한 샘플링 시간(t_s)으로 표현하여 블럭펄스함수 급수 전개식 식(4)와 미분연산식 식(6), (7)을 재 표현하면 다음과 같다.

$$x(t) \cong \sum_{i=1}^{\frac{1}{t_s}} X_i \Phi_i(t) \tag{14}$$

$$\overline{X}_1=\frac{2}{t_s}(X_1-x(0)) \tag{15}$$

$$\overline{X}_i=\frac{2}{t_s}(X_i-X_{i-1})-\overline{X}_{i-1} \tag{16}$$

단, $i=2,3,4\cdots,\frac{1}{t_s}$

식(12), (13)의 미분방정식을 풀기 위하여 식(14)의 관계를 이용하여 양변의 벡터들을 블럭펄스함수로 급수전개하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{t_s}}\overline{\Lambda}_{1_i}\Phi_i(t)=-\gamma\sum_{i=1}^{\frac{1}{t_s}}E_i\Phi_i(t)\sum_{i=1}^{\frac{1}{t_s}}R_i\Phi_i(t) \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{t_s}}\overline{\Lambda}_{2_i}\Phi_i(t)=-\gamma\sum_{i=1}^{\frac{1}{t_s}}E_i\Phi_i(t)\sum_{i=1}^{\frac{1}{t_s}}X_{p_i}\Phi_i(t) \tag{18}$$

식(17)과 식(18)에 식(15), (16)으로 나타나는 미분연산의 관계를 도입하면 첫 번째 샘플링 구간에서의 대수방정식은 다음과 같고

$$\frac{2}{t_s}(\Lambda_{1_1}-\lambda_1(0))=-\gamma E_1R_1 \tag{19}$$

식 (19)를 정리하면 첫 번째 구간에서의 블럭펄스함수 계수값 Λ_{1_1}을 식 (20)dmfhTJ 구할 수 있다.

$$\Lambda_{1_1}=\lambda_1(0)-\frac{t_s}{2}(\gamma E_1R_1) \tag{20}$$

또한 두 번째 샘플링 구간에서의 식(17)은 다음과 같이 정리되며

$$\frac{2}{t_s}(\Lambda_{1_2}-\Lambda_{1_1})-\overline{\Lambda}_{1_1}=-\gamma E_2R_2 \tag{21}$$

식(19) 및 (20)의 관계를 도입 정리하면 식(24)와 같이 두 번째 구간에서의 값을 구할 수 있다.

$$\frac{2}{t_s}(\Lambda_{1_2}-\Lambda_{1_1})-\frac{2}{t_s}(\Lambda_{1_1}-\lambda_1(0))=-\gamma E_2R_2 \tag{22}$$

$$\frac{2}{t_s}(\Lambda_{1_2}-\Lambda_{1_1})-\frac{2}{t_s}\left(\left[\lambda_1(0)+\frac{t_s}{2}(-\gamma E_1R_1)\right]-\lambda_1(0)\right)=-\gamma E_2R_2 \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{1_2}&=\Lambda_{1_1}+\frac{t_s}{2}(-\gamma E_2R_2)+\frac{t_s}{2}(-\gamma E_1R_1)\\&=\Lambda_{1_1}-\frac{t_s}{2}\gamma(E_2R_2+E_1R_1)\end{aligned} \tag{24}$$

식(21)~(24)의 관계를 i번째 샘플링 구간까지 확대하면 식(25)와 같다.

$$\begin{aligned}\Lambda_{1_i}&=\Lambda_{1_{i-1}}+\frac{t_s}{2}(-\gamma E_iR_i)+\frac{t_s}{2}(-\gamma E_{i-1}R_{i-1})\\&=\Lambda_{1_{i-1}}-\frac{t_s}{2}\gamma(E_iR_i+E_{i-1}R_{i-1})\end{aligned} \tag{25}$$

단, $i=2,3,4,\cdots,\frac{1}{t_s}$

또한 λ_2에 대하서도 식(19)~(25)의 관계를 이용하여 정리하면 식(26), (27)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\Lambda_{2_1}=\lambda_2(0)-\frac{t_s}{2}(\gamma E_1X_{p_1}) \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{2_i}&=\Lambda_{2_{i-1}}+\frac{t_s}{2}(-\gamma E_iX_{p_i})+\frac{t_s}{2}(-\gamma E_{i-1}X_{p_{i-1}})\\&=\Lambda_{2_{i-1}}-\frac{t_s}{2}\gamma(E_iX_{p_i}+E_{i-1}X_{p_{i-1}})\end{aligned} \tag{27}$$

단, $i=2,3,4,\cdots,\frac{1}{t_s}$

식(19)~(27)의 관계를 이용하여 구한 값은 1초까지의 값을 구한 것이다. 따라서 실제 적용시 1초 이후의 값들은 1초 단위로 끊어서 계산을 수행하며 1초가 지난 후 처음으로 들어오는 샘플값은 다시 식(20)과 (26)을 이용하여 계산을 수행하고 계산에 필요한 초기값은 이전 구간에서 구한 최종값을 이용하여 수행하면 된다. 구간에서의 이후의 값들은 역시 식(25)와 (26)을 이용하여 수행된다. 즉 구간을 1초 단위로 확장하여 이전구간의 최종값을 다음구간의 초기값으로 이용함으로써 최종시간을 알지 못해도 구간 확장으로써 적용이 가능하게 된다. 이는 샘플링 시간 t_s만 주어지면 1초 단위의 계산뿐만 아니라 최종시간이 임의의 시간까지라도 적용이 가능하게 된다.

위와 같은 방법을 이용하여 기준 모델 적응 제어기의 파라미터를 구할 수 있으며 전체 시스템의 구성도를 그림 1에 나타내었다.

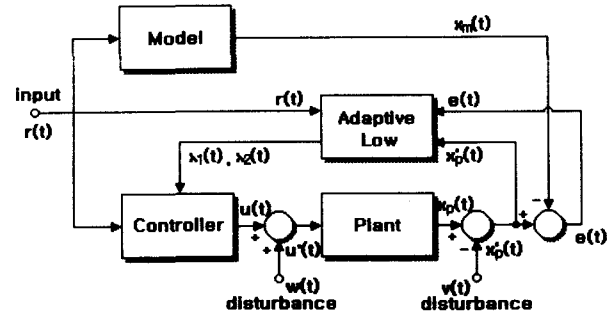

그림 1 MRAC 시스템
Fig. 1 MRAC System

4. 적 용 예

다음과 같은 1차 시스템을 고려하자[4,7].

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + 0.5u(t) \tag{28}$$
$$x(0) = 0$$

기준모델은 식(22)와 같다.

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = -2x_m(t) + 2r(t) \tag{29}$$
$$x_m(0) = 0$$

또한 제어기 파라미터 조정법칙은 다음과 같다.

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\gamma e(t) r(t) \tag{30}$$
$$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = -\gamma e(t) x(t) \tag{31}$$

단, $\gamma = 5$

기준입력으로써 단위 구형파를 사용하였고 제어기 파라미터의 초기값은 0으로 가정하였다. 샘플링 시간을 $t_s = 0.1\,\mathrm{sec}$로 하여 MATLAB V6.0을 이용하여 시뮬레이션 하였으며 100초까지의 데이터를 얻었다.

그림 2에는 모델출력과 플랜트의 출력을 기존의 MIT rule을 이용한 방법과 제안한 방법을 비교하여 나타내었다.

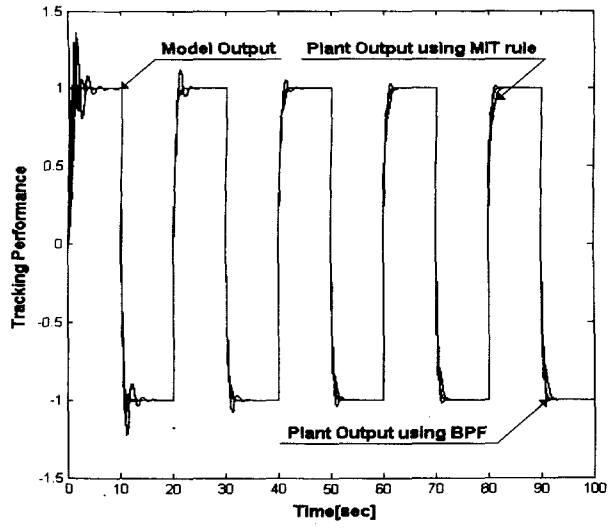

그림 2 구형파 입력시의 모델 출력과 플랜트 출력
Fig. 2 Model & Plant Output for the Square Input

그림 3과 그림 4에서는 각각 기준모델의 출력과 MIT rule을 이용한 방법의 오차와 제안한방법의 오차를 나타내었으며 표 1에 평균자승오차를 구하여 나타내었다.

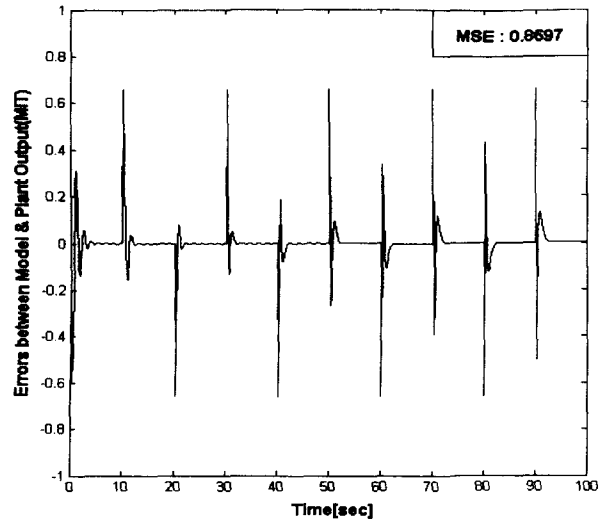

그림 3 기존의 방법을 이용한 모델출력과 플랜트 출력의 오차
Fig. 3 Error between Model & Plant Output by the Conventional Method

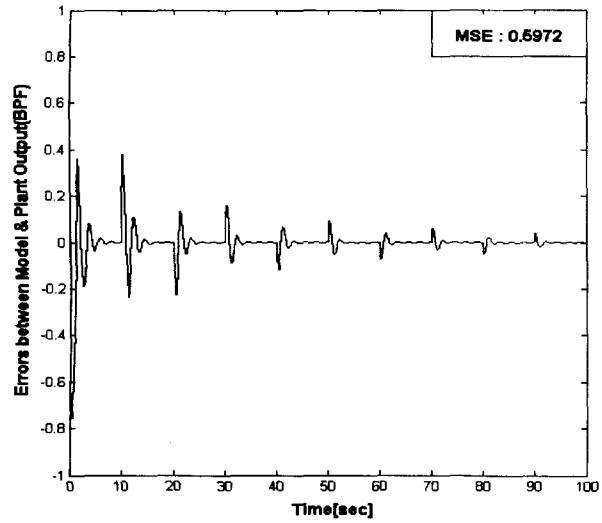

그림 4 제안된 방법을 이용한 모델출력과 플랜트 출력의 오차
Fig. 4 Error between Model & Plant Output by the Proposed Method

표 1 평균자승오차 비교
Table 1 Comparison of Mean Square Error

Method	Mean Square Error
Conventional	0.8697
Proposed	0.5972

그림 2~4의 관계 및 표 1에서 보듯이 평균자승오차를 구했을 때 보다 우수한 수렴성능을 보임을 알 수 있다. 그림 5에는 제어기 파라미터 추정 값을 나타내었다.

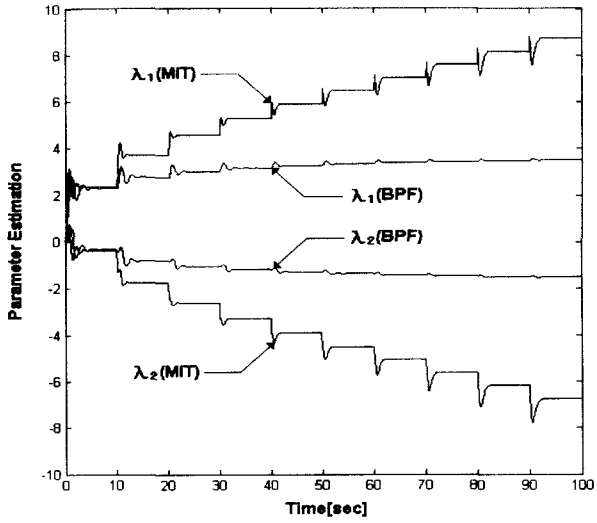

그림 5 제어기 계수 추정
Fig. 5 Parameter Estimation of Controller

그림 6과 그림 7에는 식 (32), 식 (33)과 같이 제어입력과 플랜트 출력에 그림 8과 같은 백색잡음을 인가하였을 경우의 모델출력과 플랜트출력을 각각 나타내었다.

$$u'(t) = u(t) + w(t) \tag{32}$$

$$x_p(t) = x_p'(t) + v(t) \tag{33}$$

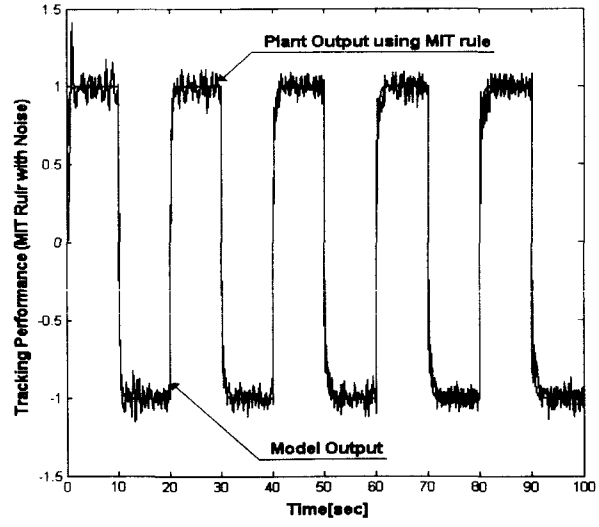

그림 6 왜란 인가시 기존의 방법에 의한 출력
Fig. 6 Model & Plant Output by the Conventional Method with Disturbance

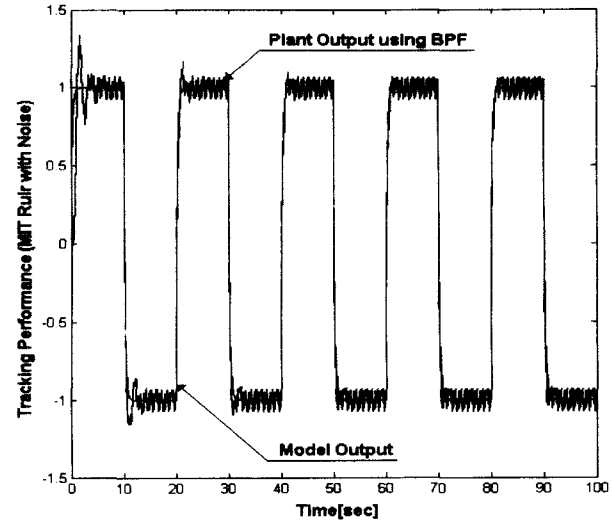

그림 7 왜란 인가시 제안된 방법에 의한 출력
Fig. 7 Model & Plant Output by the Proposed Method with Disturbance

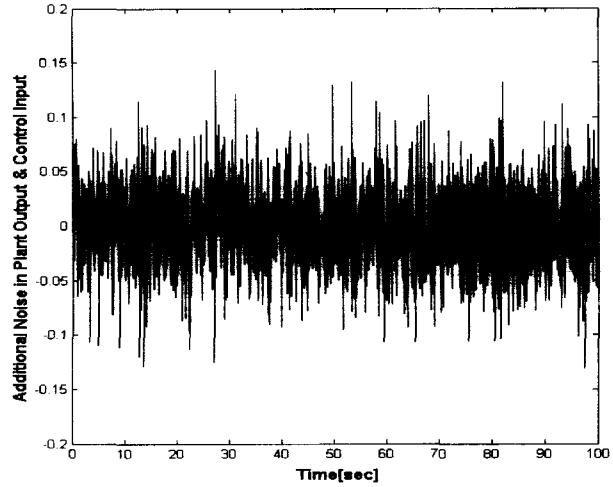

그림 8 플랜트 출력과 제어입력에 인가된 잡음
Fig. 8 Additional Noise in Plant Output & Control Input

그림 9와 그림 10에서는 제어입력과 플랜트 출력에 잡음이 인가된 경우 각각 기준모델의 출력과 MIT rule을 이용한 방법의 오차와 제안한방법의 오차를 나타내었으며 표 2에 평균자승 오차를 비교하여 나타내었다.

표 2 평균자승오차 비교
Table 2 Comparison of Mean Square Error

Method	Mean Square Error
Conventional	1.3055
Proposed	0.8286

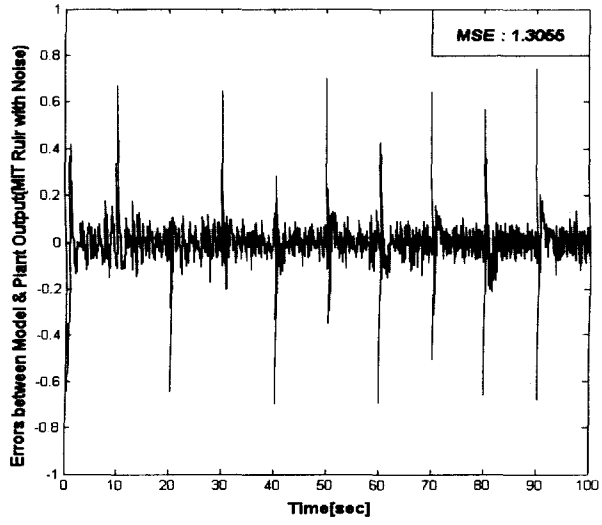

그림 9 왜란 인가시 기존의 방법을 이용한 모델출력과 플랜트 출력의 오차

Fig. 9 Error between Model & Plant Output by the Conventional Method with Disturbance

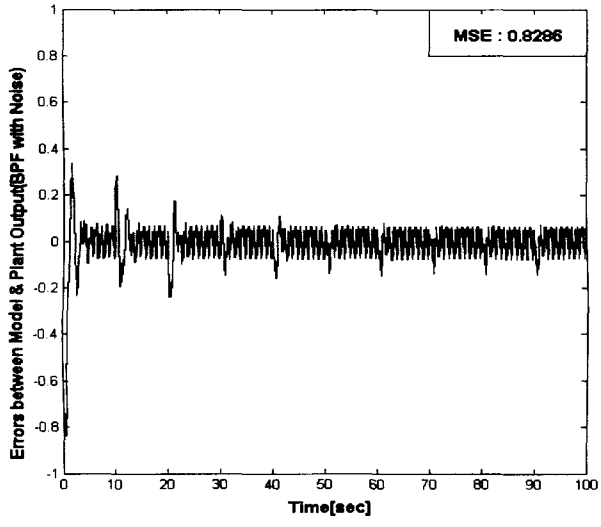

그림 10 왜란 인가시 제안된 방법을 이용한 모델출력과 플랜트 출력의 오차

Fig. 10 Error between Model & Plant Output by the Proposed Method with Disturbance

그림 11에는 왜란 인가시의 제어기 파라미터 추정 값을 나타내었다.

이상의 관계에서 보듯이 제안된 방법에 의한 제어기 파라미터 추정이 잘 이루어지고 있음을 알 수 있고 또한 기준 모델 출력에 대한 플랜트 출력의 추종 역시 잘 이루어짐을 알 수 있다. 또한 잡음이 인가된 경우에도 기존의 방법에 비하여 보다 우수한 성능을 보임을 알 수 있다.

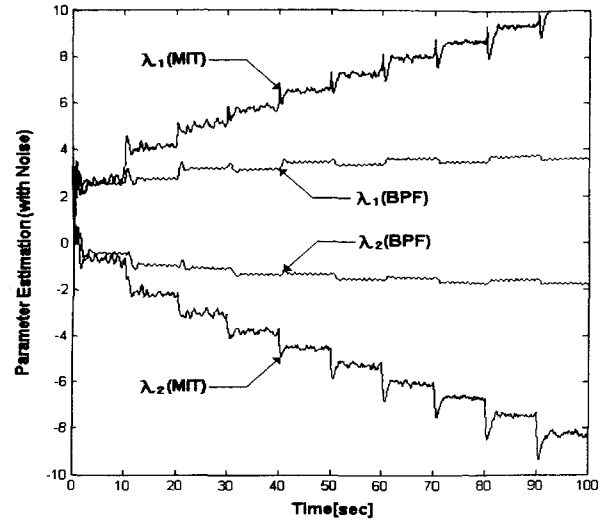

그림 11 왜란 인가시 제어기 계수 추정

Fig. 11 Parameter Estimation of Controller with Disturbance

5. 결 론

본 논문에서는 블럭펄스함수를 이용하여 기준 모델 적응 제어에서의 제어기 파라미터를 대수적 방법으로 구하는 방법을 제안하였다. 일반적으로 제어기의 파라미터를 추정하는 적응규칙은 일반적으로 미분방정식으로 표현되며, 이러한 미분방정식의 해를 구함으로써 제어기 파라미터를 조정하게 된다. 본 연구에서는 블럭펄스함수를 이용함으로써 미분방정식을 대수방정식의 형태로 변환하여 간단한 대수적 계산으로 제어기 파라미터를 구하였다. 블럭펄스함수 미분연산식을 이용하여 일반적인 직교함수에서 나타나는 적분방정식으로의 변환 없이 적응규칙을 구해내는 방법을 제시하였으며 적용 시 알고 있어야하는 최종시간 항을 없앰으로써 실시간 제어시스템 구현이 가능하게끔 하였다. 즉 샘플링 시간만 주어지면 최종시간에 관계없이 데이터를 획득하고 제어입력 값을 계산할 수 있는 방법을 제안하였다. 그리고 제안된 방법을 1차 시스템에 적용하여 그 유용성을 확인하였다. 제안된 방법은 단순한 대수적 계산에 의하여 제어가 수행되므로 기준 모델 적응 제어 시스템의 실시간 구현 시 더욱 빠른 수렴속도가 얻어질 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice-Hall, 1989

[2] N. S. Jiang and W. Schaufelberger, *Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems*, Springer-Verlag, 1992

[3] Hans Buttler, *Model Reference Adaptive Control*, Prentice-Hall, 1992

[4] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison Wesley Publisher, 1995

[5] Ning Show Hsu and Bing Cheng, "Analysis and Control of Time Varying Linear Systems via Block Pulse Functions", Int. J. Systems. Sci., vol.12, 625-633, 1981

[6] J. L. Li and A. Watanabe, "Local coefficients of Walsh functions and their applications to model reference adaptive control", Proc. 35th Conference on Decision and Control, 1996

[7] 김윤상, 오현철, 안두수, "STWS에 의한 선형 시불변 MRAC 시스템의 수렴 성능 개선에 관한 연구", 대한전기학회논문집, 제47권, 8호, 1126-1231, 1998

[8] AHN, P., KIM, M. H., and AHN, D. S., "A novel approach to unknown input observer design via block pulse function's differential operation", Proc. of IFAC World Congress, Beijing, D, 255-260, 1999

[9] 안두수, *WALSH함수와 시스템 제어*, 복두출판사, 2000

[10] 김진태외, "블럭펄스 함수를 이용한 MRAC설계", 대한전기학회 하계학술대회 논문집, 용평, D, 2252-2254, 2001

저 자 소 개

김 진 태(金 珍 泰)

1972년 1월 1일 생. 1997년 경성대학교 공대 전기공학과 졸업. 1999년 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1999년~2001년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 박사과정 수료

Tel : (031) 290-7167

E-mail : oshkjt@ece.skku.ac.kr

김 태 훈(金 泰 勳)

1971년 2월 1일 생. 1995년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1997년 성균관대학교 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1999년~2001년 동 대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과 박사과정 수료

Tel : (031) 290-7167

E-mail : taihoon@netsgo.com

이 명 규(李 明 珪)

1960년 12월 15일생. 1982년 성균관대학교 공대 전기공학과 졸업. 1984년 성균관대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1991~현재 경성대학교 전기전자 및 컴퓨터 공학부 교수

Tel : (051) 620-4772

E-mail : mklee@star.kyungsung.ac.kr

안 두 수(安 斗 守)

1937년 6월 9일생. 1960년 서울대학교 공대 전기공학과 졸업. 1964년 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1982년 중앙대학교 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1971~현재 성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터 공학부 교수

Tel : (031) 290-7101

E-mail : dsahn@ece.skku.ac.kr