

# 다수의 진동체로 구성된 부 구조물에 의한 감쇠 효과 Dissipation Effects Induced by Substructures Comprised of Multiple oscillators

최 성 훈<sup>†</sup> · 김 양 한\*

Sunghoon Choi and Yang-Hann Kim

(2002년 2월 8일 접수 ; 2002년 4월 17일 심사완료)

**Key Words** : Dissipation(감쇠), Substructure(부 구조물), Fuzzy Structure(퍼지 구조물), Tuned Mass Damper(동조 질량 감쇠기)

## ABSTRACT

The goal of this paper is to characterize the vibration damping induced in a main structure by a large number of sub-oscillators. A simple expression is obtained for the substructure impedance when the number of sub-oscillators approaches infinity. It is found that the induced damping depends on the total mass of the sub-oscillators resonating in a frequency band of interests and nearly independent of their individual loss factors. A modal overlapping condition, which corresponds to bandwidths that exceed the spacing of those natural frequencies, is required for the sub-oscillators to have such effects. An impulse response of the system is also considered. When the sub-oscillators lack damping and do not satisfy the modal overlapping condition, the vibratory energy is returned from the sub-oscillators to the main structure at later times. The result of this paper is consistent with that found with the fuzzy structure and SEA framework.

## 1. 서 론

본 연구는 R. S. Langley의 "Can an Undamped Oscillator Dissipate Energy?"라는 제목의 논문<sup>(1)</sup>에서 흥미를 얻어 시작되었다.

공진 주파수(natural frequency)가  $\omega_n$ 인 1 자유도 계 선형 진동체의 변위  $x$ 는 다음과 같은 운동 방정식을 만족한다.

$$\ddot{x} + \eta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = f(t) \quad (1)$$

이 식에서  $\eta$ 는 손실계수(loss factor),  $f(t)$ 는 단위 질량 당 작용하는 외력을 나타낸다. 외력이 백색가진

(white noise)인 경우에 진동체의 평균제곱변위(mean square displacement)  $E[x^2]$ 와 평균제곱속도(mean square velocity)  $E[\dot{x}^2]$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다(2).

$$E[x^2] = \pi S_0 / 2\eta \omega_n^3, E[\dot{x}^2] = \pi S_0 / 2\eta \omega_n \quad (2)$$

여기에서  $S_0$ 는 가진력  $f(t)$ 의 한 방향 주파수밀도(one-sided spectral density) 크기이다. 계에서 소멸되는 파워는 감쇠력과 속도의 곱으로 표현되며 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P = E[\eta\omega_n \dot{x}^2] = \pi S_0 / 2 \quad (3)$$

이 식에 의하면 에너지의 소멸은 손실계수와 무관하고 따라서 계의 댄핑 값이 0이 되는 경우에도 에너지가 소멸되는 것처럼 보인다. 일종의 파라독스처럼 생각되는 이 현상은 계의 정상상태(steady state) 응답뿐만 아니라 비 정상상태(non-stationary state) 응답

<sup>†</sup> 책임저자, 정희원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : sch@kaist.ac.kr

Tel : (042)869-3290, Fax : (042)869-8220

\* 정희원, 한국과학기술원 기계공학과

까지도 고려하여 보면 그 이유가 분명해 진다. 식 (1)의 양변에  $\dot{x}$ 를 곱하고 평균값을 취하면 우변은  $E[\dot{x}f]$ , 즉 입력파워가 되고 좌변의 항을 정리하면 다음과 같은 에너지 균형 방정식을 얻을 수 있다.

$$P = \eta\omega[\dot{x}^2] + \frac{d}{dt} E[\dot{x}^2/2 + \omega_n^2 x^2/2] \quad (4)$$

이 식에서 우변의 두 항은 각각 댐핑에 의해서 소멸되는 파워와 계의 전체 에너지(운동 에너지와 포텐셜 에너지의 합)의 변화율을 나타낸다. 즉 정상상태의 경우에는 두 번째 항이 0이 되므로 식 (3)의 경우와 일치하게 된다. 계의 댐핑이 0인 경우에는 식 (4)의 우변 첫 번째 항은 0이 되고 계에 유입되는 파워는 계의 전체 에너지 변화와 균형을 이루게 된다. 즉, 진동계에서 소멸되는 파워는 계의 댐핑과는 무관하게 결정되지만 댐핑 값이 0인 경우에는 계가 정상상태에 도달하지 못하기 때문에 입력되는 파워가 소멸되지 못하고 계의 에너지 증가로 이어지는 것이다.

기존의 많은 연구 결과에서도 복합 구조물의 진동 특성에서 나타나는 감쇠 효과가 구조물 자체가 가지고 있는 댐핑 값으로부터 예측되는 것보다 훨씬 높은 수준이라는 것이 알려져 있다. 특히 Sozie 등<sup>(3-7)</sup>에 의해서 제안되고 발전된 퍼지구조(fuzzy structure)에 관련된 연구에서 이러한 현상에 대한 논의가 진행되고 있다. 선박, 잠수함 또는 항공기 등의 대형 구조물의 동특성을 해석할 때 선체나 동체를 주 구조물(main structure)로 보고 이에 부착되어있는 엔진, 격벽, 테크, 공조기 등 수 많은 구조물을 부 구조물(substructure)로 고려하는데 이들 부 구조물들 각각의 정확한 특성을 모두 구하는 것이 불가능하기 때문에 그들의 통계적인 경향만을 안다고 가정하고 해석하게 되는데 이 때의 주 구조물을 퍼지구조라고 부른다. 퍼지구조 이론의 기본적인 연구에서는 부 구조물을 랜덤한 특성을 가지는 많은 수의 1 자유도계 진동체로 모델링 하는데 이 때 부 구조물에 의한 감쇠 효과는 부 구조물의 총 질량에 의해 결정되고 각각의 손실계수에는 무관하다고 알려져 있다. 부 구조물 각각의 손실계수가 전체 구조물의 감쇠의 정도를 결정하는 인자가 되지는 못한다는 것은 앞에서 예를 든 1 자유도계의 결과와 일치한다. 하지만 퍼지구조 이론에서도 이러한 현상이 적용되기 위해서는 부 구조물들의 손실계수가 충분히 커서 각각의 주파수 응답 특성이 충분히 중첩되어 있어야 한다는 조건이 필요하다.

질량-스프링으로 구성된 부 구조물이 적용되는 보다 단순한 예로서는 동조 질량 감쇠기(tuned mass damper: TMD)를 들 수 있다. TMD는 수동 진동 제어 방법의 일종으로 특정 주파수 대역에서의 공진 현상을 이용하여 건축물이나 기계구조물의 진동을 저감하는 장치이다. 진동 제어의 주파수 범위를 늘리기 위해 공진 주파수가 서로 다른 여러 개의 TMD를 이용하기도 하는데 이를 다중 동조 질량 감쇠기(multiple tuned mass damper: MTMD)라고 한다.<sup>(8,9)</sup> MTMD와 관련된 연구 결과에서도 진동 제어 효과는 MTMD의 질량에 의해 결정된다고 알려져 있다. 본 논문에서는 수치해석을 통하여 MTMD의 부 구조물의 특성이 주 구조물에 미치는 영향을 고찰 하려한다. 구체적으로는 부 구조물의 질량이 감쇠효과로 작용한다는 것을 확인하고 질량과 손실계수 변화에 따른 진동 저감 효과를 비교함으로써 앞에서 예를 든 1 자유도계에서 관찰된 현상<sup>(1)</sup>이 다 자유도계에서는 어떻게 나타나는지 살펴보려 한다. 특히 부 구조물의 감쇠 특성이 MTMD의 동적 특성들, 즉 주 진동계의 공진 주파수에 대한 부 구조물의 주파수 분포, 부 구조물의 모드중첩(modal overlapping) 등과의 관계를 살펴본다. 또한 주 구조물과 부 구조물 사이의 시간에 대한 에너지 전달 현상을 규명하고 관련된 물리적 의미를 파악하기 위하여 충격력이 외력으로 작용할 때 주 구조물과 부 구조물 사이의 에너지 전달을 고찰한다. 이러한 분석이 보다 복잡한 소위 퍼지구조에 대한 해석의 기초가 될 것이다.

## 2. 모델링 및 조화 가진에 대한 응답

Fig. 1과 같이 1 개의 주 구조물(master structure)과 N 개의 부 구조물(substructure)로 이루어진 계를 고려한다. 모든 구조물을 1 자유도 계로 가정하고 질량, 감쇠 상수, 스프링 상수를 각각  $m_j, c_j, k_j$  라고 표시한다. 여기에서 아래첨자  $j = 0$  은 주 구조물을 나타내고  $j = 1, \dots, N$  은 부 구조물을 나타낸다. 구조물에 가해지는 외력을  $f_j(t)$ 라고 하면 각각의 변위  $x_j$ 에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M \ddot{x}(t) + C \dot{x}(t) + K x(t) = f(t) \quad (5)$$

이 식에서  $x$ 는 주 구조물과 부 구조물의 변위를 나타내는 벡터,  $f(t)$ 는 외력을 나타내는 벡터이며,

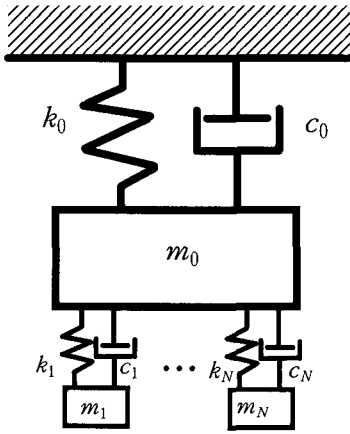


Fig. 1 System configuration: A master structure consisting of the mass, damping, and stiffness is attached to multiple sub-oscillators.

$(n+1) \times (n+1)$  행렬인  $M, C, K$  등은 각각 질량, 감쇠, 그리고 강성 행렬로서 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{x}(t) = [x_0(t) \ x_1(t) \ \dots \ x_N(t)]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{f}(t) = [f_0(t) \ f_1(t) \ \dots \ f_N(t)]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{M} = \text{Diag}\{m_0, m_1, \dots, m_N\} \quad (8)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^N c_j & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_N \\ & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ & (\text{sym}) & c_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & c_N \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^N k_j & -k_1 & -k_2 & \dots & -k_N \\ & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ & (\text{sym}) & k_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & k_N \end{bmatrix} \quad (10)$$

이 식에서  $\text{Diag}\{\}$ 은 대각선 행렬을 나타내고 (sym)은 행렬이 대칭임을 나타낸다.

먼저 주파수 영역에서의 해를 구하기 위해 주 구조물에 가해지는 조화진동(harmonic excitation)을 고려한다. 식 (7)에서  $f_0(t) = F_0(\omega)e^{-i\omega t}$ ,  $f_1 = f_2 = \dots = f_N = 0$ 이며 조화응답을  $x_j(t) = X_j(\omega)e^{-i\omega t}$  라고 가정하면 주 구조물의 복소조화응답(complex harmonic response)  $X_0(\omega)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$X_0(\omega) = [k_0 - i\omega c_0 - \omega^2 m_0 - i\omega Z_s(\omega)]^{-1} F_0(\omega) \quad (11)$$

이 식에서  $Z_s(\omega)$ 는 부 구조물의 임피던스(impedance)를 나타내는 항으로 다음과 같이 각각의 질량-스프링-댐퍼 계의 임피던스 합으로 표현된다.

$$Z_s(\omega) = -i\omega \sum_{j=1}^N \frac{m_j(k_j - i\omega c_j)}{k_j - i\omega c_j - \omega^2 m_j} \quad (12)$$

식 (12)에서  $N=1$ 인 경우, 즉 부 구조물이 한 개인 경우에는 식 (11)이 2 자유도 계의 운동을 표현함을 알 수 있다. 또 다른 특별한 예로 부 구조물의 강성과 감쇠가 모두 같은 경우에는 전체 계를 각각의 부 구조물과 동일한 강성과 감쇠를 가지며 질량은 부 구조물의 전체 질량의 합과 같은 등가의 구조물이 부착된 2 자유도 계로 상사시킬 수 있다.

만약 가진력이 광대역 가진(wide-band excitation)이면 주 구조물의 평균 제곱 변위(mean squared displacement)는 다음과 같이 주어진다.

$$E[x^2] = \int_0^\infty G(\omega) |X_0(\omega)|^2 d\omega \quad (13)$$

여기에서  $G(\omega)$ 는 가진력의 한 방향 주파수밀도함수(one-sided spectral density)로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$G(\omega) = 2 \int_{-\infty}^\infty E[f(t)f(t+\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (14)$$

본 논문에서는 부 구조물의 수가 많고 공진 주파수가 특정한 범위에서 분포되어 있는 경우의 임피던스 특성 및 주 구조물의 운동에 대해 연구하여 보려고 한다. 이러한 계의 조화응답은 식 (11) 및 (12)에 의하여 정확히 표현할 수 있다. 즉 임의의 부 구조물에 대한 응답을 어떤 경우에도 알 수 있는 것이다. 본 논문에서는 이중 아주 특별하면서도, 일반적인 경우에 대한 이해의 시작점이 될 수 있는 가장 단순한 경우인 부 구조물의 공진 주파수 분포가 균일한 경우를 다루려 한다.

부 구조물의 공진 주파수 사이의 간격  $\delta\omega$ 가 일정하고 그 공진 주파수들의 평균값이 주 구조물의 공진 주파수인  $\omega_0$ 와 같으며, 부 구조물들의 스프링 상수와 감쇠 상수가 모두 동일한 경우를 생각하여 보자. 이 예는 참고문헌 (7)에서 이미 다루어진 바 있으나 논문을 읽고 이해하기 쉽도록 하기 위해 다시 정리한다. 이 결과는 다음에 다루어질 시간영역에서의 결과를 이해하기 위한 기반이 된다. 부 구조물의 공진 주파

수  $\omega_j$ 가 크기 순서대로 배열되어 있다고 가정하면  $\delta\omega = (\omega_N - \omega_1)/(N-1)$ 로 쓸 수 있다. 부 구조물의 스프링 상수와 감쇠 상수를 각각  $k_s, c_s$  라고 하면  $k_s = m_j\omega_j^2, c_s = 2m_j\omega_j\zeta_j$ 가 된다. 여기에서  $\zeta_j$ 는 감쇠비(damping ratio)를 나타내며 감쇠비의 평균값은  $\zeta_s = \omega_0 c_s / 2k_s$ 로 표현할 수 있다. 부 구조물의 강성과 감쇠 상수를 일정한 값으로 하고 질량이 변화하는 상황을 설정한 또 다른 이유는 이론적 전개의 편의성과 물리적 해석의 함축성에도 있으나 실제 TMD의 응용성에도 있다. 실제 TMD를 제조할 때는 강성이나 감쇠 상수를 변화시키는 것 보다 질량을 변화시키는 것이 용이하다.<sup>(9)</sup> 이제 식 (12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z_s(\omega) = -i\omega k_s \sum_{j=1}^N (\omega_j^2 - \alpha^2 \omega^2)^{-1} \quad (15)$$

여기서  $\alpha$ 는 주파수의 함수로 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha = (1 - 2i\zeta_s \omega / \omega_0)^{-1/2} \quad (16)$$

부 구조물의 주파수 간격이 일정한 경우 공진 주파수 사이의 간격은  $\delta\omega = \delta\omega_j = \omega_{j+1} - \omega_j$ 라고 쓸 수 있고,  $N$ 이 무한대에 접근한다면 식 (15)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_s(\omega) &= -\frac{i\omega k_s}{\delta\omega} \sum_{j=1}^N \frac{\delta\omega_j}{\omega_j^2 - \alpha^2 \omega^2} \\ &\approx -\frac{i\omega k_s}{\delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_N} \frac{ds}{s^2 - \alpha^2 \omega^2} = \frac{ik_s}{2\alpha\delta\omega} \\ &\quad \log \left[ \frac{(\omega_n + \alpha\omega)(\omega_1 - \alpha\omega)}{(\omega_n - \alpha\omega)(\omega_1 + \alpha\omega)} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

부 구조물의 주파수 대역의 분포가 관심 주파수를 중심으로 넓게 분포할 때 ( $N\delta\omega \gg \omega, \omega_0$ ) 식 (17)은 더욱 간결하게 표현된다. 임피던스 항을 레지스턴스(resistance) 항과 리액턴스(reactance) 항으로 분리하여  $Z_s = R_s - i\omega X_s$ 라고 표현하면  $R_s(\omega)$ 와  $X_s(\omega)$ 는 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$R_s(\omega) \approx \frac{\pi k_s}{2\delta\omega} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} X_s(\omega) \approx & -\frac{k_s}{2\omega\delta\omega} \left[ \log \left| \frac{\omega+4}{-\omega+4} \right| \right. \\ & \left. - \frac{2\omega}{16-\omega^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

여기서  $w = (\omega_N - \omega_1)/\omega_0$ 이다.

레지스턴스  $R_s$ 는 부 구조물에 의한 감쇠를 나타내는 항으로 생각할 수 있는데 식 (18)에서는 부 구조물의 감쇠와는 무관하게 표현되는 것을 알 수 있다. 보다 일반적인 근사식을 구하기 위해  $k_s = (1/N) \sum_{j=1}^N m_j \omega_j^2$ 라는 관계식을 이용하면 식 (18)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_s(\omega) \approx \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\delta\omega} \omega_j^2 \approx \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\omega_{j+1} - \omega_j} \omega_j^2 \quad (20)$$

부 구조물의 공진 주파수가 연속적으로 분포한다고 가정하면 식 (20)에서  $m_j/(\omega_{j+1} - \omega_j)$ 는 임의의 주파수 대역에서 공진 하는 부 구조물의 질량이 된다. 부 구조물의 공진 분포를 주파수 대역에서 공진 하는 질량  $m_\omega(\omega)$ 를 이용하여 정의하면 가진 주파수가  $\omega$ 일 때 공진 하는 부 구조물의 질량은  $m_\omega(\omega)d\omega$ 가 되며 이 때 식 (20)은 다음과 같이 일반화 할 수 있다.

$$R_s(\omega) \approx \frac{\pi}{2} \omega^2 m_\omega(\omega) \quad (21)$$

즉 부 구조물의 공진 주파수가 연속적으로 분포한다고 가정하면 부 구조물에 의한 댐핑 효과는 질량분포에 의해서 결정되며 각각의 감쇠비에는 무관하다는 것을 알 수 있다. 식 (21)은 이전의 다른 연구 결과<sup>(5,6)</sup>와 일치하며  $m_\omega$ 를 모드 당 질량(modal mass)으로 생각하면 통계적 에너지 해석(statistical energy analysis)의 결과와도 일치한다.<sup>(10)</sup> 식 (21)을 유도하기 위해서 공진 주파수가 연속적으로 분포한다는 가정을 하였는데 이는 부 구조물의 모드들이 서로 중첩된다는 의미이며 부 구조물의 주파수 간격이 일정한 경우에 수식으로 표시하면  $\delta\omega_j \leq \zeta_j \omega_j$ 이며 평균값을 이용하면  $\delta\omega/\omega_0 \leq \zeta_s$ 가 된다.

다음 예제를 통하여 MTMD에서 부 구조물의 감쇠 효과는 그들의 질량에 의해 결정된다는 것을 검증하고 이 때 모드중첩조건이 어떠한 영향을 주는지 알아보기로 한다. 이하의 모든 적용 예에서 주 구조물의 공진 주파수  $\omega_0$ 와 감쇠비  $\zeta_0$ 는 각각 100 Hz와 0.01로 가정한다. 실제 모든 결과들은 주파수의 절대값이 아니라  $\omega_0$ 에 대한 상대적인 크기에 의해 결정되지만 계산의 편의상 100 Hz의 값을 이용하였다. 첫 번째

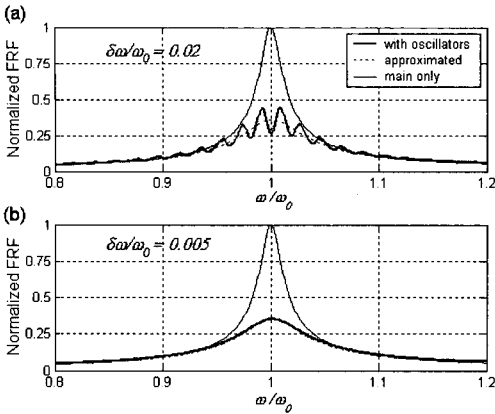


Fig. 2 Normalized frequency response amplitudes ( $m_T/m_0 = 0.01$ ,  $\zeta_s = 0.005$ ): (a)  $\delta\omega/\omega_0 = 0.02$ ; (b)  $\delta\omega/\omega_0 = 0.005$ .

적용 예로  $\zeta_s = 0.005$ 의 평균 감쇠비를 가지며 공진 주파수가 80 Hz에서 120 Hz 사이에 분포하는 부 구조물을 고려하였다. Fig. 2에서는 부 구조물 사이의 주파수 간격이 모드중첩조건을 만족하는 경우와 그렇지 않는 경우에 일어나는 현상을 비교하기 위하여 부 구조물의 수가 각각 21개(Fig. 2(a))와 81개(Fig. 2(b))인 경우의 주 구조물의 변위의 크기를 보여준다. 이 때  $\delta\omega/\omega_0$  값은 각각 0.02와 0.005로 전자의 경우는 모드중첩조건  $\delta\omega/\omega_0 \leq \zeta_s$ 를 만족하지 않는다. 부 구조물의 총 질량은 주 구조물 질량의 1%로 고정시키고, 모든 결과는 부 구조물의 주 구조물만 있는 경우의  $\omega/\omega_0 = 1$ 일 때의 응답에 대하여 정규화(normalize) 하였다. 각각의 그림에 주 구조물만 있는 경우(가는 실선), 부 구조물이 있는 경우(굵은 실선), 그리고 식 (18, 19)에 의해 근사한 경우(점선)의 결과를 함께 비교하였다. 두 결과 모두 부 구조물에 의한 감쇠효과로 주파수 응답의 크기가 감소하는 것을 보여준다. Fig. 2(a)의 경우에는 부 구조물의 모드가 서로 중첩되지 않는 경우로, 각각의 공진 특성이 전체 응답에 드러나는 것을 알 수 있다. 그러나 부 구조물에 의한 감쇠특성은 부 구조물의 총 질량에 좌우되기 때문에 평균적인 경향은 근사치와 유사하다는 것을 알 수 있다. Fig. 2(b)에서는 모드 중첩 조건을 만족하기 때문에 부 구조물의 영향이 식 (18), (19)에 의해 근사한 결과와 일치한다는 것을 알 수 있다.

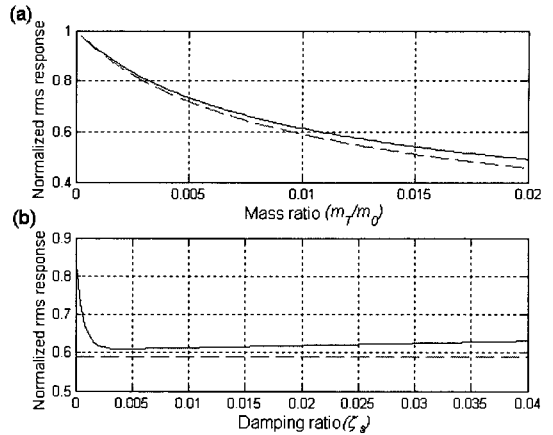


Fig. 3 Normalized root-mean-squared response subjected to a wide-band-input ( $\delta\omega/\omega_0 = 0.008$ ): (a)  $\zeta_s = 0.01$  is fixed; (b)  $m_T/m_0 = 0.01$  is fixed.

유사한 모의실험을 통하여 부 구조물의 총 질량을 일정하게 하고 갯수를 증가시키면 Fig. 2(a)에서 나타나는 부 구조물 각각의 공진 특성에 의한 피크들의 간격이 좁아지게 되고, 그 수가 충분히 많아 모드중첩조건을 만족하게되면 그 결과가 Fig. 2(b)와 동일하다는 것을 알 수 있었다.

Fig. 3에서는 광대역 가진일 때 부 구조물의 질량과 감쇠가 미치는 영향을 보여준다. Fig. 3(a)에서는  $N = 51$ ,  $\zeta_s = 0.01$ 인 경우 부 구조물의 전체 질량( $m_T = \sum m_j$ )을 변화시켜 가면서 식 (13)에 의해 구한 평균 변위(root mean squared displacement)를 보여준다. 부 구조물의 주파수 대역은 전과 동일하며 부 구조물이 없는 경우에 대하여 정규화 하였다. 부 구조물의 총 질량이 커질수록 주 구조물에 미치는 감쇠 효과가 크기 때문에 응답의 크기가 감소하는 것을 알 수 있다. Fig. 3(b)는 부 구조물의 질량비( $m_T/m_0$ )를 0.01로 고정된 후 평균 감쇠비( $\zeta_s$ )를 변화시켜 가면서 계산한 결과를 보여준다. 이 경우  $\delta\omega/\omega_0 = 0.008$ 로 부 구조물의 평균 감쇠비가 이 값보다 큰 경우에는 주 구조물에 대한 감쇠 효과가 거의 변화가 없다는 것을 알 수 있다. 이 그림에서 실선은 부 구조물의 임피던스를 식 (12)에 의하여 계산한 결과이고 파선은 식 (18), (19)를 이용한 결과이다. 이들 그림의 결과는 MTMD이 광대역 진동 저감에 효율적으로 사용될 수 있음을 보여준다. 즉 모드

중첩 조건을 만족하는 경우에는 부 구조물의 질량에 의해 정해지는 감쇠 효과에 의하여 주 구조물의 진동을 저감할 수 있는 것이다.

### 3. 충격 가진에 대한 응답

앞에서 살펴본 예에 의하면 MTMD에서 부 구조물의 감쇠 효과는 모드중첩 조건을 만족하는 경우에는 그것의 질량에 의해 결정되고 각각의 감쇠비에는 무관하다는 결론을 얻었다. 모드중첩 조건을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\omega_N - \omega_1}{(N-1)\omega_0} \leq \xi_s \quad (22)$$

부 구조물의 수가 아주 많아지게 되면 감쇠비가 아주 작은 경우라도 모드 중첩 조건이 만족하게 되어 부 구조물에 의한 에너지 저감 효과를 얻을 수 있게 된다. 식 (22)에서 극한의 경우를 가정하면 감쇠비가 0에 근접하더라도 부 구조물의 개수가 충분히 많으면 감쇠효과를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. 정상상태의 경우에는 이러한 에너지 저감 현상을 주 구조물의 에너지가 부 구조물로 전달되어 자체의 감쇠에 의해 소멸되는 것으로 이해할 수 있다. 서론에서 살펴보았듯이 부 구조물의 감쇠비가 0인 경우에는 그 운동이 정상상태에 도달하지 못하기 때문에 에너지 수준이 시간에 따라서 증가하게 된다. 여기에서는 충격응답을 분석해 봄으로써 주 구조물과 부 구조물간의 에너지 전달 현상을 설명 하고자 한다.

그림 1의 계에 대한 충격응답을 구하기 위해서 식 (5)를 다음과 같은 상태공간방정식(state-space equation) 형태로 변환한다.<sup>(11)</sup>

$$[S]\{\dot{z}\} - [R]\{z\} = \{Q\} \quad (23)$$

이 식에서

$$[S] = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix},$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & -K \\ -K & -C \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}, \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (25)$$

이다. 식 (23)의 동차해(homogeneous solution)를  $\{z\} = \{\phi\}e^{\lambda t}$ 라고 가정하고 대입하면 다음과 같은  $2(N+1) \times 2(N+1)$ 의 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$[[S] - \lambda_n[R]]\{\phi_n\} = \{0\} \quad (26)$$

이 식에서  $\lambda_n$ 과  $\phi_n$ 은 각각 고유치와 고유벡터이다. 고유벡터  $\phi_n$ 은  $[S]$ 에 대하여 정규화(normalize) 되었다고 가정한다. 고유벡터의 행렬  $[\phi] = [\{\phi_1\} \dots \{\phi_{2(N+1)}\}]$ 을 이용하여 다음과 같은 모달좌표계(modal coordinate)로의 변환을 정의할 수 있다.

$$\{z\} = [\phi]\{\xi\} = \sum_{n=1}^{2(N+1)} \{\phi_n\}\xi_n \quad (27)$$

식 (27)을 식 (23)에 대입하고 고유벡터의 직교성을 이용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\dot{\xi}_n - \lambda_n \xi_n = \{\phi\}^T \{Q\} \quad (28)$$

충격 가진인 경우  $f(t) = f_0\delta(t)$ 라고 놓고 식 (28)의 양변을  $t=0^-$ 에서  $t=0^+$ 까지 적분하면 다음과 같은  $\xi_n$ 에 대한 초기 조건을 얻을 수 있다.

$$\xi_n(0) = \{\phi_n\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ f_0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

식 (28)의 해는 식 (29)의 초기 조건을 만족하는 동차식  $\dot{\xi}_n - \lambda_n \xi_n = 0$ 의 해와 동일하며 이는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\xi_n(t) = \{\phi_n\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ f_0 \end{Bmatrix} e^{\lambda_n t} \quad (30)$$

주 구조물과 부 구조물의 응답은 식 (27, 30)을 식 (25)에 대입하여 구할 수 있다.

Fig. 4는 충격응답에 대한 주 구조물의 변위를 보여준다. Fig. 4(a)는 Fig. 2(a)에서 사용된 부 구조물에 대한 충격응답 결과이다. 주 구조물은 자체의 감쇠력과 부 구조물에 의한 영향으로 시간에 따라 진동이 감소하다가 어느 순간에 에너지의 유입으로 다시 진동이 시작됨을 알 수가 있다. 가진 직후를 살펴보면 진동의 주기는 주 구조물의 공진 주파수에 해당하는 주기(1/100 Hz = 0.01 sec)와 거의 일치한다는 것을 확인할 수 있다. 부 구조물에 의한 임피던스의 허수 부분에 해당하는 리액턴스 항이 부가적인 질량으로 작용하여 이 주기를 변화시키지만 부 구조물의 질량의 합이 주 구조물 질량의 1%에 불과하기 때문에 그 영향은 크지 않음을 알 수 있다. 변위의 포락(envelope)은 계의 감쇠상수(damping constant)에 따라 결정되는데 이는 주 구조물의 감쇠상수와 부 구

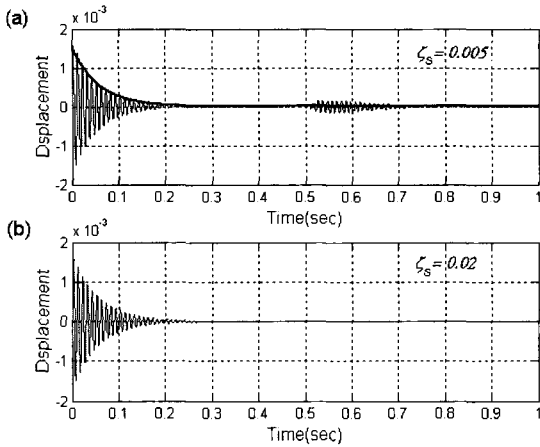


Fig. 4 Unit impulse response( $m_T/m_0=0.01, \delta\omega/\omega_0=0.02$ ): (a)  $\zeta_s=0.005$ : (b)  $\zeta_s=0.02$ .

조물에 상당하는 감쇠상수의 합으로 볼 수 있다. 부 구조물에 의한 감쇠상수는 식 (18)로 근사할 수 있기 때문에 결과적으로 주 구조물의 변위는 다음과 같은 경향을 가진다고 예측할 수 있다.

$$x_0(t) \sim \exp(-i\omega_0 t) \exp\left(-\frac{c_0 + R_s}{2m_0} t\right) \quad (31)$$

Fig. 4(a)에 식 (31)에 의한 포락을 굵은 선으로 나타냈다. 식 (18)은 모드 중첩 조건을 만족하는 경우에 성립하는 식이지만 충격응답의 초기에는 적용되는 것을 알 수 있다. 이 Fig. 4(a)에서 보면  $t=0.5$  sec 부근에서 진동이 다시 유발되는 것을 발견할 수 있는데 이는 부 구조물의 진동에너지가 다시 주 구조물로 유입되는 것으로 부 구조물의 임피던스를 이용하여 설명할 수 있다. Fig. 4(b)에서는 앞의 예와 다른 조건은 같으나 부 구조물의 평균 감쇠비  $\zeta_s$ 가 0.02인 경우의 결과이다. 이 경우에는 부 구조물의 진동에너지가 충분히 소멸되기 때문에 진동에너지가 주 구조물로 다시 유입되지 않는다는 것을 알 수 있다.

식 (12)에 의해 주어지는 부 구조물의 임피던스  $Z_s(\omega)$ 는 주 구조물과 부 구조물 사이에 작용하는 힘으로 생각할 수 있는데 충격력이 작용하는 경우에는 이것의 푸리에변환(Fourier transform)인  $\bar{Z}_s(t)$ 를 부 구조물에 의한 힘으로 생각할 수 있다. Fig. 5와 6에서는 그림 4의 (a)와 (b), 즉  $\zeta_s=0.005$ 와  $\zeta_s=0.02$  일 때의 부 구조물의 임피던스  $Z_s(\omega)$ 와 이것을 푸리에 변환한 충격 가진시의 부 구조물에 의한 힘

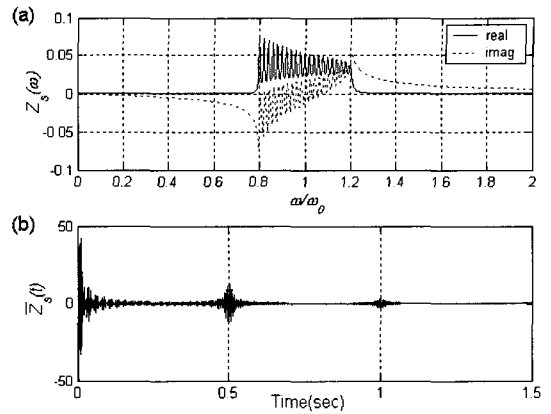


Fig. 5 Impedance of substructures for the case of  $m_T/m_0=0.01, \delta\omega/\omega_0=0.02$ , and  $\zeta_s=0.005$ : (a) In frequency domain: (b) In time domain.

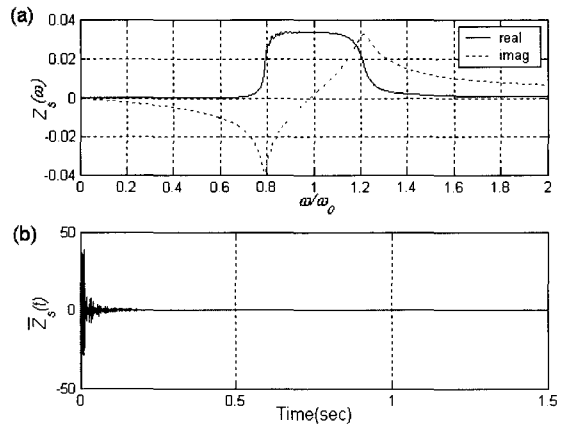


Fig. 6 Impedance of substructures for the case of  $m_T/m_0=0.01, \delta\omega/\omega_0=0.02$ , and  $\zeta_s=0.02$ : (a) In frequency domain: (b) In time domain.

$\bar{Z}_s(t)$ 를 보여준다. 이 그림에서 임피던스 값은  $m_0\omega_0$ 에 대하여 정규화 하였다. 모드중첩 조건을 만족하지 않는 경우에는 임피던스에 부 구조물의 공진 주파수에 해당하는 정점들이 뚜렷하게 나타나고, 이 영향으로 시간영역에서의 가진력은 주기적인 형태로 나타나게 된다. 이때 주기는  $t_2=2\pi/\delta\omega$ <sup>(6)</sup>이며 Fig. 5와 4(a)에서 확인할 수 있듯이  $t_2=0.5$ sec가 된다. 충격 가진 초기에는 부 구조물이 주 구조물의 운동에너지를 흡수하지만 부 구조물의 공진 주파수 간격의 역수에 비례하는 주기에 도달하면 운동에너지가 다시 주

구조물로 유입되는 것이다. Fig. 6의 경우처럼 부 구조물 자체의 감쇠가 충분하면  $t_2$ 의 시간이 경과하는 동안 부 구조물의 에너지가 거의 소멸되어 없어지기 때문에 주 구조물의 에너지 유입은 없게 된다. 부 구조물의 공진 주파수 간격이 아주 작아  $t_2$ 가 매우 큰 경우라도 부 구조물 자체의 감쇠가 작은 경우에는 에너지의 재 유입 현상이 발생하게 되는데 이는 모드 중첩 조건을 만족하지 못하는 경우에 해당한다.

이상의 결과를 정리하면 MTMD 등에서 부 구조물에 의한 감쇠효과는 부 구조물의 질량에 의해 결정되고 각각의 감쇠비와는 무관하지만, 부 구조물의 감쇠가 충분하지 못하여 모드 중첩 조건을 만족하지 못하는 경우에는 진동저감의 효과가 떨어지고 특히 충격 응답의 경우에는 일정한 주기가 지난 후에 주 구조물로 에너지가 재 유입된다.

#### 4. 결 론

다중 동조 질량 감쇠기(MTMD)의 진동 특성에 대한 연구를 통해 복합 구조물에서 부 구조물이 주 구조물의 동특성에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 부 구조물에 의한 감쇠 효과는 부 구조물 각각의 감쇠비에는 무관하고 전체 질량에 의해 결정된다는 것을 확인하였다. 다만 이 결과는 부 구조물의 공진 특성이 서로 중첩되는 모드중첩(modal overlapping) 조건이 만족하는 경우에 적용되기 때문에 부 구조물 각각의 감쇠비와 공진 주파수의 간격에 제약이 따른다. 정상상태 운동의 경우 주 구조물의 운동 에너지는 부 구조물에 의하여 흡수되고 부 구조물이 가지는 댐핑에 의하여 소멸되는 것이다. 충격 가진 시 모드중첩 조건을 만족하지 못하는 경우에는 부 구조물의 공진 주파수 간격에 의해 결정되는 주기가 지난 후 부 구조물의 운동 에너지가 주 구조물로 재 유입되는 현상이 발생한다. 본 논문은 가장 단순한 질량-스프링-댐퍼로만 구성된 모델에 대해서만 다루었으나 향후 보 (beam)나 판(plate) 등의 연속체로 구성된 일반적인 복합 구조물에서의 구조물간의 상호작용에 대한 연구의 시발점이 되리라 생각한다.

#### 참 고 문 헌

(1) Langley, R. S., 1997, "Can an Undamped

Oscillator Dissipate Energy?," Journal of Sound and Vibration, Vol. 206, No. 4, pp. 624~626.

(2) Lin, Y. K., 1967, Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McDraw-Hill, New York.

(3) Sozie, C., 1993, "A Model and Numerical Method in the Medium Frequency Range for Vibro-acoustic Predictions Using the Theory of Structural Fuzzy," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 94, pp. 849~865.

(4) Pierce, A. D., Sparrow, V. W. and Russel, D. A., 1995 "Fundamental Structural-acoustic Idealizations for Structures with Fuzzy Internals," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 117, pp. 339~348.

(5) Strasberg, M. and Feit, D., 1996, "Vibration Damping of Large Structures Induced by Attached Small Resonant Structures," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 99, No. 1, pp. 335~344.

(6) Weaver, R. L., 1996, "The Effect of an Undamped Finite Degree of Freedom "fuzzy" Substructures: Numerical Solutions and Theoretical Discussion," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 100, No. 5, pp. 3159~3164.

(7) Drexel, M. V. and Ginsberg, J. H., 2001, "Modal Overlap and Dissipation Effects of a Cantilever Beam with Multiple Attached Oscillators," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 123, pp. 181~187.

(8) Xu, K. and Igusa, T., 1992, "Dynamic Characteristics of Multiple Substructures with Closely Spaced Frequencies," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 21, pp. 1059~1070.

(9) Brennan, M. J., 1997, "Characteristics of a Wideband Vibration Neutralizer," Noise Control Engineering Journal, Vol. 45, No. 5, pp. 201~207.

(10) Lyon, R. H., 1996, "Statistical Energy Analysis and Structural Fuzzy," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 97, No. 5, pp. 2878~2881.

(11) Ginsberg, J. H., 2001, Mechanical and Structural Vibration, John Wiley & Sons, New York.