

# 구형 압전 변환기의 점대칭 방사모드 진동 특성

## Vibration Characteristics of the Point-symmetric Mode in a Spherical Piezoelectric Transducer

전 한 용\*, 김 진 오\*\*  
(Han-Yong Chun\*, Jin-Oh Kim\*\*)

\* 숭실대학교 대학원 기계공학과, \*\* 숭실대학교 공과대학 기계공학과  
(접수일자: 2002년 7월 25일; 수정일자: 2002년 9월 2일; 채택일자: 2002년 9월 24일)

본 논문은 해석과 실험을 통하여 구형 압전 변환기의 점대칭 방사모드 진동 특성을 규명하는 것을 목적으로 한다. 반경 방향 좌표와 시간의 함수인 반경 방향 변위와 전기 퍼텐셜로 표현되는 지배방정식을 구성한다. 역학적 경계조건과 전기적 경계조건을 적용하여 방사 진동의 특성방정식을 유도한다. 이 식을 이용하여 압전 고유진동수를 계산하고, 그 결과를 측정 결과와 비교한다. 수치계산을 통하여 압전 공진과 탄성 공진의 차이, 구형 압전체의 반경 및 두께에 따른 고유진동수 등을 고찰한다. 그 결과 1차 방사모드의 고유진동수 크기는 압전현상으로 인해 작아지며 구형의 곡률 반지름이 커짐에 따라 지수함수적으로 작아지는 것을 알게 되었다.

**핵심용어:** 압전, 변환기, 방사모드, 고유진동수

**투고분야:** 초음파 및 탄성과 분야 (4.1)

The object of this paper is to examine the vibration characteristics of the point-symmetric radial mode in a spherical piezoelectric transducer. The differential equations of piezoelectric radial motion are derived in terms of the radial displacement and electric potential, which are functions of the radial coordinate and time. Applying mechanical and electrical boundary conditions yields the characteristic equation of radial vibration. Numerical results of the natural frequencies are compared with the experimental measurements. The paper discusses the difference between piezoelectric and elastic resonances and the dependence of the natural frequencies on the radius and thickness of the piezoelectric spheres. As a result it is concluded for the first radial mode that the natural frequency is reduced due to the piezoelectric phenomenon and that the frequency exponentially decreases as the sphere radius increases.

**Keywords:** Piezoelectricity, Transducer, Radial mode, Natural frequency

**ASK subject classification:** Ultrasonic and elastic waves (4.1)

## I. 서론

응력 또는 압력이라는 역학적 물리량과 전압 또는 전하라는 전기적 물리량간의 상호변환인 압전 현상을 이용하는 압전 변환기가 다양한 분야에서 활용되고 있다. 특히 역학적 진동을 감지하여 전기 신호로 변환시키는 정압전 현상은 센서에 활용되고, 전기 신호를 역학적 진동으로

변환시키는 역압전 현상은 액추에이터에 활용된다[1].

압전 변환기들은 대개 원판형 또는 사각판형으로서 압전 소자의 두께 방향 종진동을 여러 용도로 응용하며, 간혹 사각판형 압전 소자의 길이 방향 전단 운동을 이용하기도 한다[2]. 원판형이면서 원주 방향으로 운동을 발생시키도록 압전 소자를 배열하여 전단 운동에 의한 비틀림 진동을 발생시키는 변환기도 있다[3]. 한편, 원통형 변환기가 소개되어 있는데 반경 방향으로 방사 진동을 하는 변환기[4], 원주 방향으로 분극되어 원주 방향의 반복적인 인장과 수축이 결과적으로 방사 진동을 발생시

책임저자: 김진오 (jokim@ssu.ac.kr)  
156-743 서울시 동작구 상도동 1-1  
숭실대학교 공과대학 기계공학과  
(전화: 02-820-0662; 팩스: 02-820-0668)

키는 변환기[5], 축 방향 진단 변형을 하는 종진동을 이용하는 원통형 압전 자이로스코프[6] 등이 있다. 이들과 달리 한 지점에서 모든 방향으로 진동을 방사시키기 위해서는 변환기가 구(球)형인 것이 바람직하겠다. 이는 무지향성 음원[7]이구나 곡면체의 결합탐지[8]에 사용될 수 있다. 수중에서 초음파를 방사시키는 무지향성 진동자를 개발하기 위하여 본 연구를 시작하였다.

본 논문은 구형 압전 변환기를 설계할 때에 구의 크기를 선정하기 위해서 필요한 진동 특성 해석을 다룬다. 이 변환기의 압전 소자는 두께 방향인 반경 방향으로 분극되어 있고, 두께 방향 전압에 의해 구동되는 점대칭 구조이다. 단순한 구형 탄성체의 점대칭 반경방향 진동 응답을 반경방향 좌표와 시간의 함수로 표현하여 해석한 사례가 있다[9]. 본 논문에서는 압전현상이 포함된 점대칭 방사 모드 진동을 대상으로 하므로 반경방향 좌표와 시간의 함수인 반경방향 운동 변위와 전기 퍼텐셜로 표현되는 지배방정식을 구성한다. 여기에 역학적 경계조건과 전기적 경계조건을 적용하여 압전 고유진동의 특성방정식을 유도한다. 이 식을 이용하여 실물 변환기에 대한 압전 고유진동수를 계산하고, 그 결과를 측정 결과와 비교한다. 검증된 해석 이론에 따른 수치계산을 통하여 압전 공진과 탄성 공진의 차이를 살펴보고, 구형 압전체의 반경 및 두께에 따른 고유진동수를 살펴본다.

## II. 구형 압전 변환기 모델링

원판형 압전체의 두께방향 진동과 원통형 압전체의 반경방향 진동에 대한 전기-역학적 관계식은 각각 직각 좌표계와 원통 좌표계에 의한 표현으로 잘 정리되어 있다 [10,6]. 본 논문에서는 구형 압전 변환기의 반경방향 진동을 표현하기 위하여 구 좌표계를 사용하며, 공간에서 반경방향 위치에만 의존되는 점대칭 운동을 대상으로 한다.

내면 ( $r = R_i$ )과 외면 ( $r = R_o$ )에 균일하게 분포된 전극을 가진 구형 압전체의 반경방향 운동은 반경방향 변위  $u(r, t)$ 와 전기 퍼텐셜  $\phi(r, t)$ 로 표현된다. 구형 압전체 내에서 반경방향 응력  $\sigma_r$  및 원주방향 응력  $\sigma_\theta$ 는 구형 탄성체 내에서 반경방향 응력 및 원주방향 응력 표현[11]에 반경방향 압전에 의한 양을 추가[10]하면, 반경방향 역학적 변위  $u$  및 전기장 ( $-\partial\phi/\partial r$ )과 다음의 관계가 있다.

$$\sigma_r = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) + 2G \frac{u}{r} \quad (2)$$

또한, 반경방향 전기적 변위  $D_r$ 은 다음과 같다.

$$D_r = \epsilon \frac{\partial u}{\partial r} - \zeta \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3)$$

여기서  $\lambda$ 와  $G$ 는 Lamé 탄성상수로서, 영률 (Young's modulus) 및 포와송 (Poisson) 비로는 다음과 같이 표현된다[11].

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4a)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4b)$$

그리고  $\epsilon (= d_{33}/s_{33}^E)$ 는 압전 응력 상수 (piezoelectric stress constant)이고,  $\zeta$ 는 유전율 (permittivity)이다.

반경방향 힘의 평형으로부터 얻은 식[11]과 정전기적 방정식[10]은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2D_r}{r} = 0 \quad (6)$$

여기서  $\rho$ 는 질량 밀도이다. 식 (1)~(3)을 식 (5)와 (6)에 대입하여 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2 \frac{E_L}{\hat{E}_L} \frac{u}{r^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\epsilon}{\zeta} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (8)$$

여기서,  $c_L (= [\hat{E}_L/\rho]^{1/2})$ 은 압전체 내에서 두께 방향 종파의 전파속도이고,  $\hat{E}_L = E_L + \frac{\epsilon^2}{\zeta}$ 이며  $E_L = \lambda + 2G$ 이다.

구형 압전 변환기의 외면과 내면에 분포된 전극에 전기 신호가 진동수  $\omega$ 로 시간  $t$ 에 따른 조화함수 형태로 가해진다면, 진동 변위들도 시간  $t$ 에 대한 조화함수 형태로 간주할 수 있다. 따라서 반경방향 변위  $u(r, t)$ 와 전기 퍼텐셜  $\phi(r, t)$ 를 다음과 같이 변수분리한다.

$$u(r, t) = \tilde{u}(r) e^{j\omega t} \quad (9)$$

$$\phi(r, t) = \tilde{\phi}(r) e^{j\omega t} \quad (10)$$

식 (9)와 (10)을 식 (7)과 (8)에 대입하면 다음과 같이  $\tilde{u}(r)$ 과  $\tilde{\phi}(r)$ 에 대한 지배방정식을 얻는다.

$$r^2 \frac{d^2 \tilde{u}}{dr^2} + 2r \frac{d\tilde{u}}{dr} + (k^2 r^2 - \beta^2) \tilde{u} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\tilde{\phi}}{dr} \right) = \frac{\epsilon}{\xi} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\tilde{u}}{dr} \right) \quad (12)$$

여기서  $k(= \omega/c_L)$ 는 파동수이고,  $\beta^2 = 2E_L/\hat{E}_L$ 이다. 식 (11)에는 다음과 같은 변환을 적용한다.

$$\tilde{u}(r) = \frac{y(r)}{\sqrt{r}} \quad (13)$$

식 (13)를 식 (11)에 대입하면 일반적인 형태의 Bessel 방정식을 얻는다.

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (k^2 r^2 - p^2) y = 0 \quad (14)$$

여기서  $p^2 = \beta^2 - 1/4$ 이다. 식 (14)의 해는 1종 Bessel 함수이고, 이를 (13)에 대입하면 식 (11)의 해는 다음과 같은 형태로 된다.

$$\tilde{u}(r) = A \frac{J_p(kr)}{\sqrt{r}} + B \frac{J_{-p}(kr)}{\sqrt{r}} \quad (15)$$

식 (15)를 식 (12)에 대입한 후  $\tilde{\phi}(r)$ 의 해를 구하면 다음 식을 얻는다.

$$\tilde{\phi}(r) = \frac{\epsilon}{\xi} \left[ A \frac{J_p(kr)}{\sqrt{r}} + B \frac{J_{-p}(kr)}{\sqrt{r}} \right] - \frac{a}{r} + b \quad (16)$$

식 (15)와 (16)의 상수  $A, B, a, b$ 는 경계조건에 의해 결정된다.

### III. 반경방향 진동 특성방정식

구형 압전 변환기의 개략도는 그림 1에 보인 바와 같고, 내면 반지름이  $R_i$ 이고 외면 반지름이  $R_o$ 이다. 변환기의 내면과 외면 사이에 전압  $V_0 e^{i\omega t}$ 가 작용한다면 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$r = R_i \text{에서} \quad \tilde{\sigma}_r = 0 \quad (17a)$$

$$\tilde{\phi} = 0 \quad (17b)$$

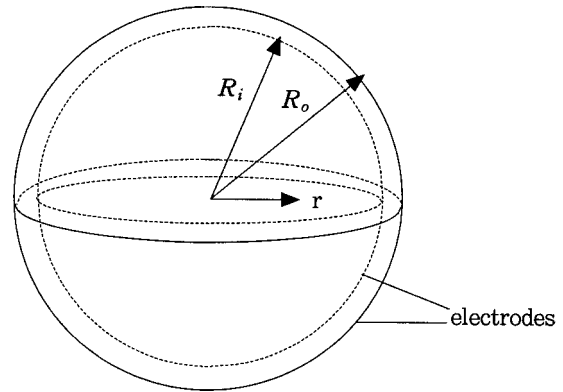


그림 1. 구형 변환기의 개략도  
Fig. 1. Schematic diagram of a spherical transducer.

$$r = R_o \text{에서} \quad \tilde{\sigma}_r = 0 \quad (17c)$$

$$\tilde{\phi} = V_0 \quad (17d)$$

반경방향 응력  $\sigma_r$ 은 식 (1)로부터 계산될 수 있으므로, 식 (15)와 (16)을 경계조건 (17a~d)에 적용하면 다음과 같다.

$$f_1(k, R_i)A + f_2(k, R_i)B + \frac{\epsilon}{R_i^2} a = 0 \quad (18a)$$

$$g_1(k, R_i)A + g_2(k, R_i)B - \frac{1}{R_i} a + b = 0 \quad (18b)$$

$$f_1(k, R_o)A + f_2(k, R_o)B + \frac{\epsilon}{R_o^2} a = 0 \quad (18c)$$

$$g_1(k, R_o)A + g_2(k, R_o)B - \frac{1}{R_o} a + b = V_0 \quad (18d)$$

여기서

$$f_1(k, r) = (\lambda + 2G + \frac{\epsilon^2}{\xi}) \frac{d}{dr} \left[ \frac{J_p(kr)}{\sqrt{r}} \right] + 2\lambda \frac{J_p(kr)}{\sqrt{r^3}} \quad (19a)$$

$$f_2(k, r) = (\lambda + 2G + \frac{\epsilon^2}{\xi}) \frac{d}{dr} \left[ \frac{J_{-p}(kr)}{\sqrt{r}} \right] + 2\lambda \frac{J_{-p}(kr)}{\sqrt{r^3}} \quad (19b)$$

$$g_1(k, r) = \frac{\epsilon}{\xi} \frac{J_p(kr)}{\sqrt{r}} \quad (19c)$$

$$g_2(k, r) = \frac{\epsilon}{\xi} \frac{J_{-p}(kr)}{\sqrt{r}} \quad (19d)$$

이다.

식 (18a~d)의 연립방정식에서 상수  $a$ 와  $b$ 를 소거하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$D_{11} = R_o^2 f_1(k, R_o) - R_i^2 f_1(k, R_i)$$

$$D_{12} = R_o^2 f_2(k, R_o) - R_i^2 f_2(k, R_i)$$

$$D_{21} = g_1(k, R_o) - g_1(k, R_i) - \frac{R_o(R_o - R_i)}{\epsilon R_i} f_1(k, R_o)$$

$$D_{22} = g_2(k, R_o) - g_2(k, R_i) - \frac{R_o(R_o - R_i)}{\epsilon R_i} f_2(k, R_o)$$

식 (20)으로부터 상수  $A$ 와  $B$ 를 구하고, 식 (18c)와 (18b)에 대입하여  $a$ 와  $b$ 를 구하면 다음과 같다.

$$A = -\frac{V_0}{\Delta} D_{12} \quad (21a)$$

$$B = \frac{V_0}{\Delta} D_{11} \quad (21b)$$

$$a = -\frac{R_o^2}{\epsilon} \frac{V_0}{\Delta} [-D_{12} f_1(k, R_o) + D_{11} f_2(k, R_o)] \quad (21c)$$

$$b = -\frac{R_o^2}{\epsilon R_i} \frac{V_0}{\Delta} [-D_{12} f_1(k, R_o) + D_{11} f_2(k, R_o)] + \frac{V_0}{\Delta} [D_{12} g_1(k, R_i) - D_{11} g_2(k, R_i)] \quad (21d)$$

여기서  $\Delta$ 는 식 (20)에서  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$ ,  $D_{22}$ 로 표현된 행렬의 행렬식 (determinant)으로서, 다음과 같이 이 값

이 0일 때 진폭이 무한히 큰 공진이 발생한다.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

식 (22)가 구형 압전 변환기의 반경방향 공진을 나타내는 특성방정식이다. 또한 식 (21a-b)를 식 (15)에 대입하고  $V_0/\Delta$ 를 1로 두어 상대적 변위 분포를 구하면, 반경방향 좌표  $r$ 의 함수인 방사 진동 모드 형상을 알게 된다.

### IV. 수치계산 및 실험

이론적으로 해석한 결과를 검증하기 위하여 구체적인 치수를 가진 구형 압전 변환기를 대상으로 수치계산과 실험을 행하였다. 실험에 사용된 구형 압전 변환기의 치수 및 물성치들을 특성방정식 (22)에 대입함으로써,  $k$ 의 값을 얻는다.  $k$ 는 수치계산 도구인 Mathematica[12]의 FindRoot 기능을 사용하면 계산이 간편하다. 파동수  $k$ 와 파동속도  $c_L$ 로부터 고유진동수  $f$ 를 다음과 같이 구한다.

$$f = \frac{k c_L}{2\pi} \quad (23)$$

수치계산과 실험에 사용한 압전소자는 독일 Ceramtec사의 PZT (SONOX P5)로서, 이에 관한 물성치들이 표

표 1. 압전 소자의 물성치 (Ceramtec SONOX P5)  
Table 1. Material properties of PZT (Ceramtec SONOX P5).

		Values
Mechanical	Mass density, $\rho$	$7.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
	Elastic compliance, $s_{33}^E$	$0.190 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$
	Elastic compliance, $s_{44}^E$	$0.5 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$
Dielectric	Relative permittivity, $\epsilon_{33}^S/\epsilon_0$	865
Electromechanical	Charge constant, $d_{33}$	$4.50 \times 10^{-10} \text{ C/N}$

표 2. 압전 소자의 환산된 물성치 (Ceramtec SONOX P5)  
Table 2. Converted properties of PZT (Ceramtec SONOX P5).

		Values
Mechanical	Young's modulus, $E (= 1/s_{33}^E)$	52.6 GPa
	Shear modulus, $G (= 1/s_{44}^E)$	20.0 GPa
	Poisson's ratio, $\nu (= E/2G - 1)$	0.315
	Lame constant, $\lambda (Eq. 4a)$	34.1 GPa
Dielectric	Permittivity of free space, $\epsilon_0$	$8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$
	Permittivity, $\epsilon (= (\epsilon_{33}^S/\epsilon_0) \times \epsilon_0)$	$7.0 \cdot 10^2 \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$
Electromechanical	Piezoelectric stress constant, $\epsilon (= d_{33}/s_{33}^E)$	23.68 C/m <sup>2</sup>

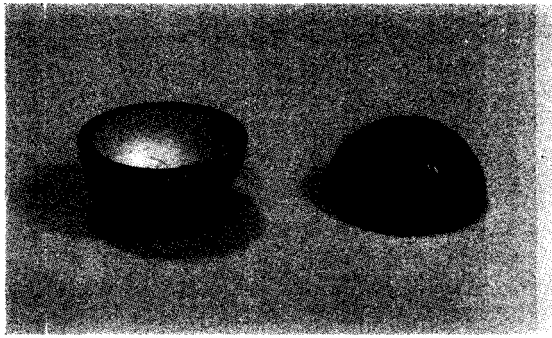


그림 2. 반구형 변환기 사진  
Fig. 2. Photograph of the hemispherical transducers.

1에 정리되어 있는데, 일반 문헌에 나와 있는 물성치와 비슷하다[13,14]. 본 논문에 표현된 물성치들로 환산한 값들이 표 2에 정리되어 있다. 그림 2의 사진에 보인 2개의 반구형 변환기를 접합시켜 구형 변환기를 만들었다. 이 변환기의 외부 반경  $R_o$ 는 12.9 mm이고 내부 반경  $R_i$ 는 10.7 mm이다. 이 변환기에 대하여 압전 고유진동수를

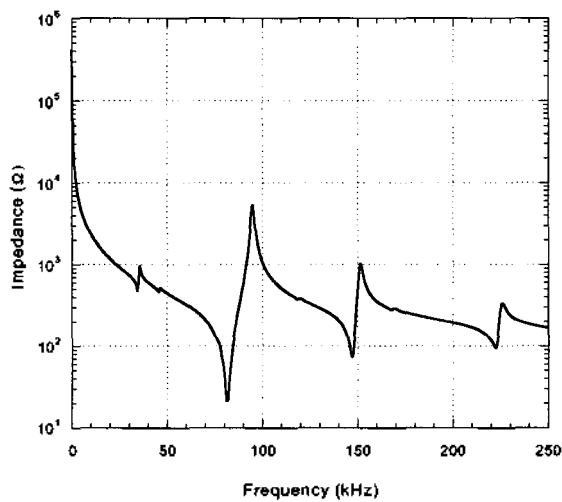
식 (22)와 (23)으로부터 계산하여 1차~3차 고유진동수를 표 3에 기재하였다.

계산 결과와 비교하기 위하여 구형 변환기에서의 압전 고유진동수를 측정하였다. Impedance Gain/Phase Analyzer (HP 4194A)를 사용하여 변환기의 임피던스를 주파수의 함수로 측정한 결과가 그림 3에 있다. 이 그래프에서 임피던스가 극소값을 나타내는 주파수가 압전 고유진동수이며, 그중 가장 작은 진동수가 1차 모드의 고유진동수이다. 이와 같이 측정된 압전 고유진동수를 표 3에 기재하였다.

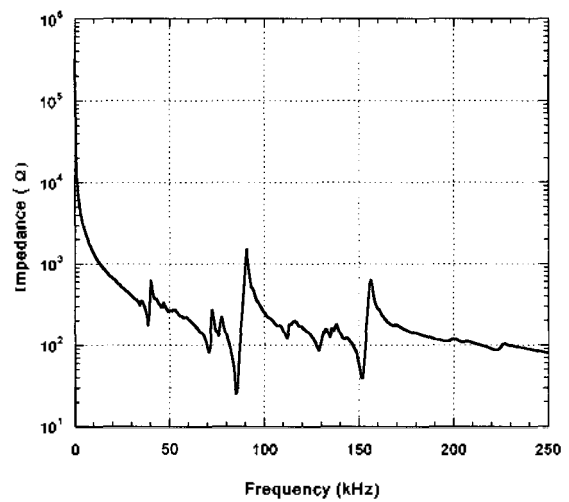
표 3에서 압전 고유진동수의 계산 결과와 측정 결과를 비교한다. 해석과정에서 구의 중심에 대해 점대칭인 모드에 국한했기 때문에 계산되지 않은 비대칭 모드의 고유진동수도 측정 결과에는 나타나고 있다. 변환기 사용에서 특히 관심가는 1차 고유진동수에서 두 결과가 약 24%의 차이를 보이고 있다. 제작된 변환기가 완벽한 구형이 아니고 두께가 위치에 따라 조금 다르며, 반구형체에 접착

표 3. 구형 변환기의 고유진동수의 계산값과 측정값 비교 (외부 반경 = 12.9 mm, 내부 반경 = 10.7 mm)  
Table 3. Comparison of the calculated and measured natural frequencies of the spherical transducer (outer radius = 12.9 mm, inner radius = 10.7 mm).

Mode	Piezoelectric natural frequency (kHz)		Difference, $\frac{f_c - f_m}{f_m}$
	Calculated, $f_c$	Measured, $f_m$	
1st	42.8	34.4	0.24
-	-	85.0	-
-	-	151.3	-
2nd	819	970	-0.15
3rd	2245	3130	-0.28



(a) 반구형 변환기  
(a) A hemispherical transducer



(b) 구형 변환기  
(b) A spherical transducer

그림 3. 주파수의 함수로 측정된 압전 변환기의 임피던스 곡선  
Fig. 3. Impedance curves of the piezoelectric transducers measured as a function of the frequency.

제를 사용하여 접합한 점 등을 감안할 때 실험에 사용된 변환기가 해석 대상과 정확하게 일치하지는 않기 때문에 나타난 차이로 보인다. 그렇더라도, 유도된 특성방정식으로부터 압전 고유진동수를 어느 정도의 오차 범위 내에서 계산할 수 있음을 보여준다. 구를 얇은 셸 (shell)로 모델링하여 해석한 결과[15]와 비교해 보면 1차 고유진동수가 타당한 범위에 있고, 측정치에 나타난 85.0 kHz와 151.3 kHz는 접대칭이 아닌 모드에 해당함을 알 수 있다.

### V. 고찰

앞 절에서 실험과의 비교를 통하여 검증된 해석 이론에 따라 수치해석을 하여 고유 모드형상을 살펴보고, 압전

공진과 탄성 공진의 차이를 살펴보면, 구형 압전체의 반경 및 두께에 따른 고유진동수를 고찰한다.

#### 5.1. 모드 형상

변환기의 반경방향 좌표  $r$ 의 함수인 방사 진동 모드형상은 식 (15)로부터 구할 수 있다. 실험에 사용된 변환기 치수를 사용하여 모드형상을 계산하여 그림 4에 나타내었다. 그림 4(a)에 보인 1차 방사모드는 두께 변형이 별로 없는 강체 모드 양상이며, 구의 크기의 증가/감소를 반복하는 팽창/압축 진동을 의미한다. 그림 4(b)에 보인 2차 방사모드는 절면 (nodal plane), 즉 반경방향 진동 변위가 0인 구면이 한 개로서 구의 두께의 증가/감소를 반복하는 인장/수축 진동을 의미한다.

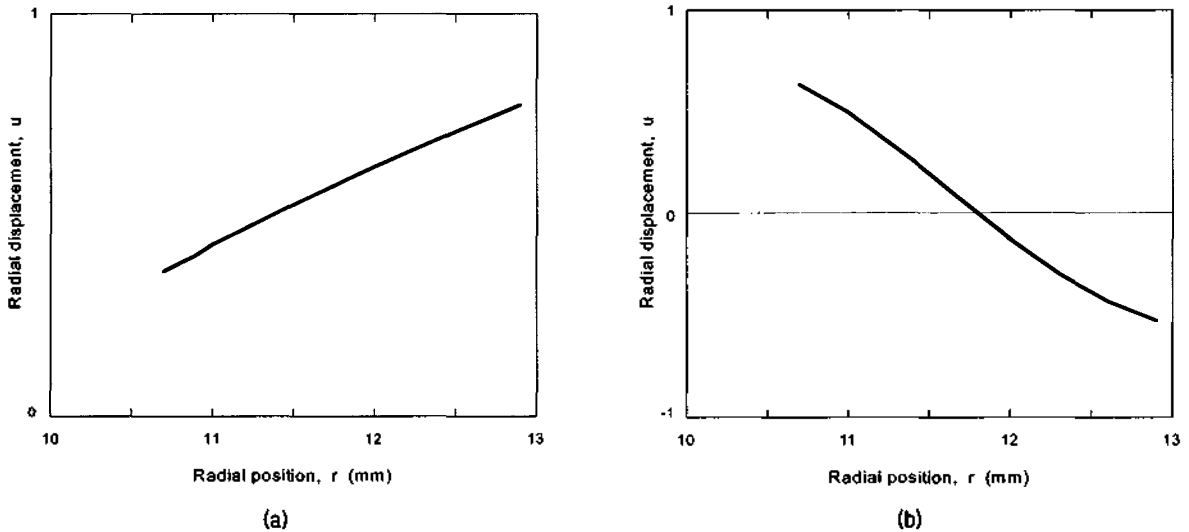


그림 4. 변환기의 방사 진동의 1차 및 2차 모드 형상  
Fig. 4. Mode shapes of the 1st and 2nd modes for the radial vibration of the transducer.

표 4. 구형 압전체의 탄성체의 1차 고유진동수 비교  
Table 4. Comparison of the 1st natural frequencies of the piezoelectric and elastic spheres.

Piezo. $f_p$	Elastic $f_e$	Natural Frequency (kHz)		Ratio, $\frac{f_p}{f_e}$
		Piezoelectric $f_p$	Elastic $f_e$	
5	3	129	183	0.70
10	8	56.2	79.7	0.71
15	13	36.0	51.1	0.70
20	18	26.5	37.6	0.70
25	23	21.0	29.7	0.71
30	28	17.4	24.6	0.70
40	38	12.9	18.3	0.70
50	48	10.3	14.6	0.71
70	68	7.30	10.3	0.71
100	98	5.08	7.21	0.70

5.2. 압전 현상이 고유진동수에 미치는 영향

구형 변환기의 공진에 압전 현상이 얼마나 기여하는지를 파악하기 위하여, 압전 변환기와 동일 재질이되 압전성이 없는 탄성 구형체의 고유진동수와 압전 구형체의 고유진동수를 비교하였다. 탄성 고유진동수는 해석의 모델링 과정에 표현되었던 압전용력상수  $\epsilon$ 을 0으로 두고 식 (18a)와 (18c)에서 상수 A와 B가 0이 아닌 해를 가질 조건으로부터 계산된다. 두께는 2 mm로 일정하되 크기가 다른 여러 가지 구형체에 대하여 1차 모드의 압전 고유진동수와 탄성 고유진동수를 계산하여 표 4에 기재하였다.

압전 고유진동수  $f_p$ 가 탄성 고유진동수  $f_e$ 의 70% 정도이다. 즉, 압전 현상으로 인해 고유진동수가 30% 정도 작아졌다. 한편 구형체가 커질수록 고유진동수가 작아짐을 알 수 있는데, 이에 관해서는 다음 절에서 다룬다.

5.3. 반경과 고유진동수의 관계

구형 압전 변환기의 외면 반경에 따른 고유진동수를 식 (22)와 식 (23)으로부터 계산하여 그림 5에 나타내었다. 변환기의 두께 2 mm, 4 mm, 6 mm의 세 가지 경우에 대해서 1차 방사모드와 2차 방사모드의 고유진동수를 각각 그림 5(a)와 그림 5(b)에 나타내었다. 변환기의 1차 방사모드의 고유진동수는 그림 5(a)에 보이듯이 반경이 증가할수록 지수함수 형태로 감소하며 0에 수렴한다. 이는

판의 강체 모드에 해당하는 것으로 판단되며, 그림 4(a)에 보인 모드 형상이 이를 뒷받침한다. 즉, 곡률 반경이 무한대인 판의 두께 방향 변형이 없는 운동과 같으며, 곡률 반경이 작아짐에 따라 약간의 변형이 차츰 수반되어 고유진동수가 커지는 양상이다. 반면에 2차 모드는 두께 방향 변형이 주로 나타나는 운동이므로 2차 방사모드의 고유진동수는 그림 5(b)에 나타나듯이 반경에 따른 차이가 거의 없다.

5.4. 두께와 고유진동수의 관계

구형 압전 변환기의 두께와 압전 고유진동수의 관계를 살펴보기 위하여 내경의 치수는 일정하게 하고, 외경의 치수 변화로 두께를 변화시켜 식 (22)와 식 (23)으로부터 계산한 고유진동수를 그림 6에 나타내었다. 그림 6(a)는 1차 방사모드에 대한 것으로서 두께에 따른 고유진동수의 차이는 그다지 크지 않다. 두께가 증가함에 따라 고유진동수가 다소 감소한 것처럼 보이는 것은 두께의 증가에 의한 것이라기 보다는 평균 반경의 증가에 의한 것으로 보인다. 이는 그림 5(a)를 통해서 살펴본 바와 같다.

그림 6(b)에 보인 2차 방사모드에서는 두께가 증가함에 따라 고유진동수가 현저히 감소한다. 이는 일반적인 두께 방향 종진동 압전 판에서 관찰되는 경향과 일치한다.

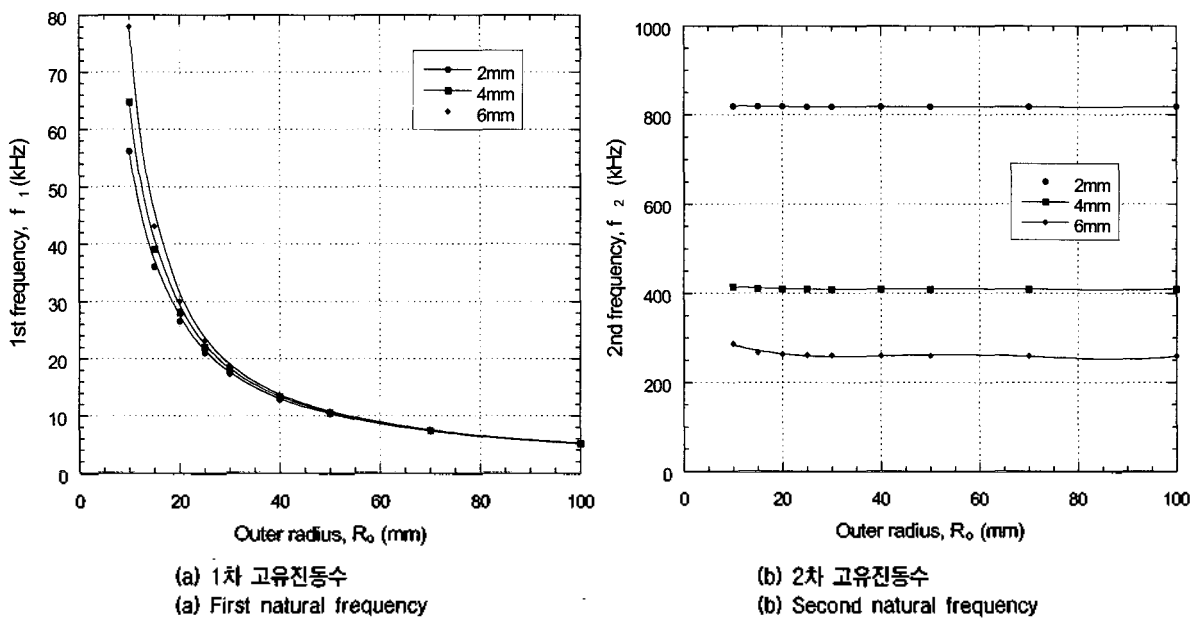


그림 5. 여러 두께에 대해서 외부 반경의 함수로 계산된 고유진동수  
 Fig. 5. Natural frequencies calculated as a function of the outer radius for various thicknesses.

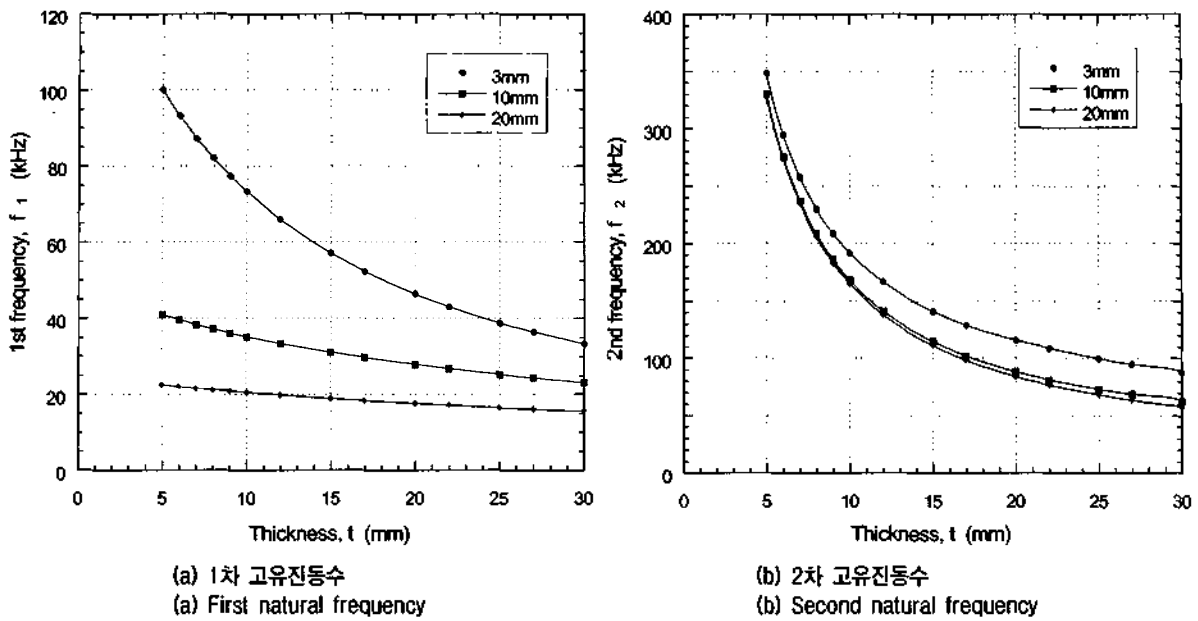


그림 6. 여러 반경에 대해서 두께의 함수로 계산된 고유진동수  
Fig. 6. Natural frequencies calculated as a function of the thickness for various radii.

## VI. 결론

반경 방향으로 진동하는 구형 압전 변환기의 고유진동을 해석하여 중심에 관해 점대칭인 모드의 특성방정식을 유도하였다. 구한 방정식에 물성치를 대입하여 압전 고유진동수를 계산하고, 구형 압전 변환기 실물에서 압전 고유진동수를 측정하여 두 결과를 비교함으로써 해석 결과를 검증하였다.

수치계산을 통하여 점대칭 고유모드 형상을 살펴보고, 압전 현상이 고유진동수에 미치는 영향을 파악하였으며, 구형 압전체의 반경 및 두께에 따른 고유진동수를 살펴보았다. 점대칭 진동 모드에서 1차 모드는 두께 변화가 별로 없는 강체 모드 양상이고, 2차 모드는 한 개의 절편을 기준으로 두께가 증가/감소를 반복하는 양상이다. 1차 모드의 압전 고유진동수는 압전 현상에 의해 탄성체에 비해 감소하며 곡률 반경이 작아질수록 커지는데 두께에 따른 차이는 별로 없다. 반면에 2차 모드의 압전 고유진동수는 두께가 클수록 커지는데 반경에 따른 차이는 거의 없다.

## 감사의 글

본 논문은 숭실대학교 2002년도 교내 학술연구비 지원 과제로 수행된 연구의 결과입니다. 실험에 사용하도록 압전 변환기를 제공한 센서텍(주)에 감사를 드립니다.

## 참고문헌

1. K. Uchino, *Piezoelectric Actuators and Ultrasonic Motors*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
2. I. J. Busch-Vishniac, *Electromechanical Sensors and Actuators*, Springer, New York, 1999, Ch. 5.
3. 권오수, 김진오, "량주방향 압전 비틀림 변환기의 진동특성," 대한기계학회논문집(A), 25 (8), 1197-1205, 2001.
4. 김진오, 정형근, "원통형 압전 변환기의 반경방향 진동특성," 한국소음진동공학학회논문집, 11 (7), 247-252, 2001.
5. P. Lu, K. H. Lee, W. Z. Lin, F. Shen, and S. P. Lim, "An approximate frequency formula for piezoelectric circular shells," *Journal of Sound and Vibration*, 242, 309-320, 2001.
6. 이명신, 강이석, 김용환, 문충기, 오재문, 변영철, "원통형 압전 진동 자이로 개발," 한국항공우주학회지, 25 (1), 106-116, 1997.
7. 木原高榮, "スピーカ," 日本 特許 P2001-45588A, 2001.
8. 川崎啓治, "超音波探傷検査方法," 日本 特許 2-167468, 1990.
9. A. K. Ghosh and M. K. Agrawal, 1994, "Radial vibrations of spheres," *Journal of Sound and Vibration*, 171 (3), 315-322, 1994.
10. D. K. Miu, *Mechatronics: Electromechanics and Controlmechanics*, Springer-Verlag, New York, 1993, Ch. 6, 43.
11. J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North Holland, Amsterdam, 128, 54, 1975.
12. S. Wolfram, *The Mathematica Book*, 4th ed., Wolfram Media, Cambridge University Press, 1999.
13. 岡崎清, *セラミツク誘電体工学*, 第3版, 學獻社, 1983, 第8章.
14. D. A. Berlincourt, C. Cmolik, and H. Jaffe, "Piezoelectric properties of polycrystalline lead titanate zirconate compositions," *Proceedings of the IRE*, 220-229, 1960.
15. M. C. Junger and D. Feit, *Sound, Structures, and Their Interactions*, 2nd Ed., The MIT Press, Cambridge, 1986, 228-233.



---

## 저자 약력

---

• 전 한 용 (Han-Yong Chun)



1999년 2월: 송실대학교 기계공학과 (공학사)  
2001년 2월: 송실대학교 기계공학과 (공학석사)  
2002년 3월~ 현재: 송실대학교 기계공학과 (박사과정)  
※ 주관심분야: 초음파 현상, 역학적 진동, 압전 변환기

• 김 진 오 (Jin-Oh Kim)



1981년 2월: 서울대학교 기계설계학과 (공학사)  
1983년 2월: 서울대학교 기계설계학과 (공학석사)  
1983년 5월~ 1985년 6월: 한국표준과학연구원 음향  
진동연구실 (연구원)  
1989년 12월: 미국 University of Pennsylvania,  
기계공학과 (Ph. D.)  
1989년 11월~ 1994년 1월: 미국 Northwestern Uni-  
versity (연구조교수)  
1994년 3월~ 1997년 8월: 삼성종합기술원 그룹기술  
지원센터 (수석연구원)

1997년 9월~ 현재: 송실대학교 기계공학과 (조교수, 부교수)  
※ 주관심분야: 역학적 진동을 이용한 초음파 센서 및 액추에이터 연구/개발