KJHM Vol. 15, No. 3, 2002, 59-64

열방정식 입장에서 바라본 세 방정식*

한양대학교 응용수학전공 **송종철**

Abstract

This paper investigates a history of Fourier Series for the heat equation and how deeply it is related to modern famous three equations, Navier-Stokes equations in fluid dynamics, drift-diffusion equations in semiconductor, and Black-Scholes equation in finance. We also propose improved models for the heat equation with finite propagation speeds.

0. 서론

수리과학분야와 포물형 편미분방정식의 원형인 열방정식의 역사는 매우 오래되었다. 열전도를 연구한 물리학자 Joseph Fourier(1768-1830)는 가열된 막대기의 열방정식을 풀기 위하여 변수 분리를 이용한 Fourier Series를 도입하여 해를 구했다. 그의 업적은 과학 계산의 기초를 제공하였다. 또한, 그의 연구를 좀 더 연구하여 Fourier Series의 정당성을 밝히고 인정하는 데 뛰어난 수학자들이 많은 세월이 흘렀고 200여 년이 지난 오늘의 computerized 시대는 Fourier Series, Fourier transform, wavelet 방법 등으로 모든 학문의 과학적 계산을 위하여서는 elegant한 Fourier 기교를 이용할 만큼 광범위한 응용으로 computational applied mathematics에 더욱 더 위력을 발휘하고 있다.

특히, 이러한 과학적 계산의 근사해에 대한 정당성을 확보하기 위하여 많은 해석학이 요구되었다. 예를 들면 transient 문제의 경우에 steady state 문제로의 convergence rate 등과 같은 qualitative behavior는 변수 분리에 의하여 생성되는 고유치 문제와 연결되며, 이러한 것은 결국 Fourier Series의 초기 및 경계값 문제와 밀접한 관련이 있다[1-17].

* 본 논문은 2002학년도 한양대학교 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

1. 세 방정식의 Gaussian kernel 함수로의 회귀

우선 열방정식의 원형인 다음 초기치 열방정식을 생각한다.

$$\begin{aligned} \phi_{,t} &= \kappa\phi_{,xx}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ \phi(x,0) &= \delta(x) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 κ는 열전도 상수이고 $\delta(x)$는 원점에서의 delta함수이며 콤마는 편미분을 나타내며 $\phi(x,t)$는 구할 온도이다. 열방정식 (1)의 해는 다음과 같다.

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) \tag{2}$$

이 함수는 열방정식 (1)의 기본해로 또는 Gaussian kernel 함수로 잘 알려져 있으며 확률론에서 random variable (η)의 평균값 $E(\eta)$이 0이고 분산 Var (η)이 $\sigma^2 = 4\kappa t$ 임을 보여주는 확률밀도함수이다. 이로부터 diffusion과 확률과는 매우 밀접한 관계가 있으며 실제로 열방정식 (1)을 확률론으로부터 직접 유도할 수 있다.

다음으로 열방정식 (1)의 입장에서 관찰할 세 개의 방정식을 생각한다. 첫 번째 방정식은 항공 및 기계공학에서 가장 중요한 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_{,t} + (u \cdot \nabla)u &= -\nabla p + \nu \Delta u \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 u는 유체속도 p는 압력을 ν는 주어진 kinematic 상수이며 ∇는 gradient를 Δ는 Laplace 연산자를 나타낸다.

둘째는 전기공학과 반도체 물리에서 중요한 drift-diffusion equations은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta \psi &= q(p - n + C) && \text{Potential Equation} \\ n_{,t} &= \frac{1}{q} \nabla \cdot (q\mu_n(U_T \nabla n - n \nabla \psi)) - R && \text{Electron Equation} \\ p_{,t} &= \frac{1}{q} \nabla \cdot [-q\mu_p(U_T \nabla p + p \nabla \psi)] - R && \text{Hole Equation} \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 ε은 device material permitivity, q는 electron charge, U_T는 thermal voltage, C는 doping constant, μ_n과 μ_p는 electron과 hole의 각각 mobility이다. Electrostatic potential $\psi(x,t)$, electron concentration $n(x,t)$, hole concentration $p(x,t)$ 구해야 할 미지수이다.

셋째는 finance dynamics에서 가격을 결정하는 중요한 모델방정식은 다음의 Black-Scholes 방정식이다.

$$V_{,t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 V_{,SS} + rSV_{,S} - rV = 0 \tag{5}$$

여기서 $V(S, t)$는 European future call option value, S는 asset price, σ^2은 asset variance, r은 은행 이자율이다. European future call option의 Black-Scholes 방정식 (5) 해의 Green's function 함수를 이용하여 구하면 다음과 같다[3, p. 435].

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{6}$$

여기서 E는 preset price (exercise price), T는 preset time (expiry date), $N(\cdot)$는 표준정규변수 경우의 cumulative probability distribution, 즉 다음가 같다.

$$\begin{aligned} d_1 &= [\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)(T-t)]/\sigma(T-t)^{1/2} \\ d_2 &= d_1 - \sigma(T-t)^{1/2} \end{aligned} \tag{7}$$

Robert Merton & Myron Scholes는 Black-Scholes 방정식의 연구 덕분에 1997년에 Nobel 경제학상을 수상하였다. 안타깝게도 Fisher Black은 1995년 죽었고 Nobel 상은 죽은 사람에게는 수여되지 않는다.

위의 세 가지 방정식 외에도 다음 식으로 표현되는 Cauchy 문제의 Schrodinger 방정식을 생각한다.

$$\begin{aligned} iu_{,t} + \triangle u &= 0 \quad \text{in } R \times \{t > 0\} \\ u(x, 0) &= \delta(x) \end{aligned} \tag{8}$$

형식적으로는 열방정식 (1)에서 t 대신에 it로 바꾸어 넣으면 Schrodinger 방정식 (8)로 변환된다.

열방정식 (1)과 위의 방정식 (3), (4), (5) 사이의 관계를 기술하기 위하여 먼저 가장 간단한 1차원에서 기술하기로 하고 2차원과 3차원은 간단히 언급하기로 한다. 1차원의 Navier-Stokes 방정식은 비압축성을 고려하는 압력항을 무시하고 slow viscous 흐름을 지배하는 방정식, forcing 항을 무시한 drift-diffusion 방정식, 적당한 변수 변환을 하면 Black-Scholes방정식은 열방정식으로 바뀐다[3, pp. 433-434]. 본질적으로 열방정식이 열에너지의 보존인 것처럼 이 3개의 방정식은 momentum 보존, 전류보전, 가격보존이라는 conservation law이다. 여기에 convective 비선형을 가하게 되면 1차원의 Navier-Stokes 방정식은 압력항을 무시하면 유체의 간단한 모델방정식인 Burgers 방정식으로 되고 다른 2개의 방정식도 convective 비선형이 추가되어 diffusion항과 경쟁하는 매우 복잡한 dynamics가 형성된다.

유체역학의 복잡한 turbulence와 finance dynamics를 analogy시켜서 설명을 하기로 한다. Turbulent velocity fluctuation은 deterministic process 항과 Brown 운동의 Gaussian Normal distribution을 따르는 stochastic process 항이 있는 것과 꼭 같이 finance의 asset price도 deterministic process 항과 Gaussian Normal distribution을 따르는 stochastic process 항이 있다. 또한, 복잡한 turbulent flow의 해를 Monte-Carlo method 로 구해 보면 해가 다변수형태의 Gaussian kernel function 이다[13]. 따라서 이 2개의 deterministic & stochastic process를 고려한 Black-Scholes 방정식의 value(European future call option value)의 해는 (6)식을 고려할 때 근본적으로 Gaussian kernel function이다. 왜냐하면 turbulence와 finance dynamics의 복잡한 stochastic process는 근본적으로 Brown 운동의 diffusion 때문에 Gaussian으로 회귀 (return to isotropy)하기 때문이다[13].

Numerical 계산에서 적당한 경계조건과 초기조건이 주어지고 물리적으로 2차원과 3차원이 의미가 있는 Navier-Stokes 방정식과 반도체의 제작을 지배하는 drift-diffusion 방정식은 finite-difference나 finite-element method 등으로 근사 해를 구할 수 있지만 많은 assets와 investment portfolios등의 수많은 stocks 변수 속에서 asset value를 결정하는 Black-Scholes방정식은 본질적으로 multi-dimension이므로 차원에 거의 영향이 없는 Monte-Carlo method가 적당하다[13]. 최근에 가장 간단한 low-dimension에서의 Black-Scholes를 푸는 수치해석은 기존의 열방정식을 풀기 위하여 사용했던 방법들 예를 들면 Crank-Nicholson과 같은 Fourier Series해석에 의한 stability가 보장된 implicit finite difference method을 사용하여 푼다. 이와 같은 numerical 해석과 계산은 위의 세 방정식이 본질적으로 열방정식의 틀 안에서 수학적 해석이 가능한 것을 보여주고 있다.

또한 주목할 것은 Navier-Stokes 방정식의 해는 2차원과 3차원의 해가 다른 행동을 보이는 것은 아마도 고차원일수록 singularity가 강해지는 물리적 현상(vortex stretch)과 함께 수학적으로는 차원에 의존하는 Sobolev형의 부등식 때문에 3차원의 Navier-Stokes의 수학적 해석은 7개의 millennium prize problems 중 한 문제로써 아직도 풀려지지 않은 문제이다. Convective 비선형항과 dissipative 항이 있는 dynamical 문제는 bifurcation, chaos, turbulence 등의 복잡한 현상에도 불구하고 $E=mc^2$처럼 에너지가 보존되듯이 모든 evolutionary 문제의 해가 Gaussian kernel function 으로 회귀할 것이라고 기대하며 많은 수학적 계산를 해야하는 응용수학자들은 conservation law를 최대한 이용하여 numerical 계산을 한다.

2. 열방정식의 단점을 극복한 perturbed heat equations

열방정식 (1)의 단점인 열의 전파속도가 무한대라는 점을 극복하기 위하여 열의 전파속도가 finite하도록 modeling 한 perturbed heat equations [15]의 모델방정식들이 도입되고 최근에 활발히 많이 이용되고 있다. 대표적 perturbed heat equation은 다음의 hyperbolic 방정식이다.

$$\phi_{,t} - \Delta\phi + \varepsilon\Delta\phi_{,t} = 0 \tag{9}$$

여기서 $\phi(x, t)$는 온도이며 $\varepsilon(\ll 1)$인 주어진 상수이다. 다른 3개의 perturbed heat equation은 연구 논문 [15]에 있다. 이러한 유한한 전파속도를 갖도록 하는 improved 된 모델방정식은 최근에는 heat flux u와 온도 T를 지배하는 연립방정식으로 구성된 generalized heat conduction인 Generalized Maxwell-Carttaneo equations이 있다[2, 4, 12].

$$\begin{aligned} \tau u_{,t} &= -u - \tilde{\chi}\nabla T + \mu\Delta u + \nu\nabla(\nabla\cdot u) \\ cT_{,t} &= -\nabla\cdot u \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 τ는 relaxation 시간, $\tilde{\chi}$는 열전도계수, c는 일정한 부피 하에서 비열, μ와 ν는 phenomenological 상수들이다. 이 모델방정식 (10)에 대한 자세한 내용과 연구들은 최근의 연구 논문들에 잘 나와 있다[4, 7, 12].

참고 문헌

1. K.A. Ames, L.E. Payne and J.C. Song, "Spatial decay in the pipe flow of a viscous fluid interfacing a porous medium," *Math. Models Meth. Appl. Sci.* 11(2001), 1547-1562.
2. F. Franchi and B. Straughan, "Continuous dependence on the relaxation time and modelling, and unbounded growth, in theories of heat conduction with finite propagation speeds," *J. Math. Anal. Appl.* 185(1994), 726-746.
3. K.E. Gustafson, *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*, 3rd ed., Dover, 1999.
4. A. Morro, L.E. Payne and B. Straughan, "Decay, growth, continuous dependence and uniqueness results in generalized heat conduction theories," *Applicable Analysis* 38 (1990), 231-243.
5. L.E. Payne, P.W. Schaefer, and J.C. Song, "Bounds and decay results for some

second-order semilinear elliptic problems," *Math. Meth. Appl. Sci.* 21(1998), 1571-1591.

6. L.E. Payne, P.W. Schaefer, and J.C. Song, "Growth and decay results in heat conduction problems with nonlinear boundary conditions," *Nonlinear Analysis* 35(1999), 269-286.
7. L.E. Payne and J.C. Song, "Phragmen-Lindelof and continuous dependence type results in generalized heat conduction," *Z. angew. Math. Phys.* (ZAMP) 47(1996), 527-538.
8. L.E. Payne and J.C. Song, "Spatial decay for a model of double diffusive convection in Darcy and Brinkman flows," *Z. angew. Math. Phys.* 51(2000), 867-889.
9. L.E. Payne and J.C. Song, "Convergence results for generalized heat conduction as the relaxation time tends to zero," *J. Math. Anal. Appl.* 256(2001), 175-189.
10. L.E. Payne and J.C. Song, "Growth and decay in generalized thermoelasticity," *International Journal of Engineering Science* 40(2002), 385-400.
11. L.E. Payne and J.C. Song, "Spatial decay bounds for the Forchheimer equations," *International Journal of Engineering Science* 40(2002), 943-950.
12. L.E. Payne and J.C. Song, "Spatial decay estimates for the Maxwell-Cattaneo equations with mixed boundary conditions," *Z. angew. Math. Phys.* (2003), to appear.
13. J.C. Song, "A velocity-biased turbulent mixing model for passive scalars in homogeneous turbulence," *Phys. Fluids* 30(1987), 2046-2053.
14. J.C. Song, "Decay estimates in steady semi-infinite thermal pipe flow," *J. Math. Anal. Appl.* 207(1997), 45-60.
15. J.C. Song, "Spatial decay for solutions of Cauchy problems for perturbed heat equations," *Math. Models Meth. Appl. Sci.* 11(2001), 797-808.
16. J.C. Song, "Spatial decay estimates in time-dependent double-diffusive Darcy flow," *J. Math. Anal. Appl.* 267(2002), 76-88.
17. J.C. Song, "Decay estimates for Steady Magnetohydrodynamic pipe flow," *Nonlinear Analysis* (2003), to appear.