KJHM Vol. 15, No. 3, 2002, 35-48

수학의 역사와 오류

이화여자대학교 수학교육과 **이종희**

Abstract

In this paper, we explore development of mathematical knowledge, especially calculus, non-Euclidean geometry, Euler's theorem, and the comparison of the number of elements in two infinite sets. And we analyze kinds of errors and the roles for errors with respect to increasing knowledge in mathematics.

0. 서론

수학은 실생활에서의 필요에 의해 발전되어 왔으며, 수학의 응용 상황은 수학 발전의 원동력으로서 수학의 가치를 정당화하는데 기여해 왔다. 플라톤 학파의 철학자 프로클로스(Proclos)는 학문의 기원을 다음과 같이 설명하였다[2].

> 현실적인 필요 때문에 기하학을 비롯한 여러 학문이 발전되었으며, 그러기에 불완전한 것에서부터 완전한 것으로 향하려는 노력이 이루어지고, 그것을 위한 형식적인 법칙이 성립한다. 또 감각에서 합리적인 판단으로, 더욱 나아가서 순수한 지성으로 …라는 자연스러운 발전의 과정을 볼 수 있는 것이다.

프로클로스의 말처럼, 수학은 현실적인 필요성에서 출발하여, 그것으로부터 완전한 학문으로서의 수학을 향해 끊임없이 다듬어져 왔다.

바슐라르(Bachelard)는 과학적 이론은 생활의 유용성에 의해서가 아니라 정신적인 내적인 흥미에 의해 이루어 진 것이라고 본다. 그는 필요에 의해서 또는 유용성에 의해서 유발되는 흥미보다는 사색하는 즐거움 속에 정신이 활기를 찾으며, 이러한 필요 이상의 것을 추구하려는 정신에 의해 창조된 것은 필요에 의해 창조된 것보다 더 위대하다고 보고 있다[3].

잘못 제기된 전 과학적 시기의 지식은 기본적인 오류를 드러내는 경우가 많으며, 과학은

스스로 재구성하고 재정복 될 때 진보하게 된다. 새로운 과학은 연속적인 발전이 아니라 단절을 의미하며, 특히 과학적으로 특별한 문제의 진보 이면에는 진정한 정신적 단절이 있다. 기존의 과학적 습관이나 지식 자체는 실제로 과학이 발전하는데는 방해가 되기도 한다.

하이데거(Heidegger)도 '실제 과학 운동은 그 기초 개념이 다소 급진적인 수정이 경험될 때 일어난다"고 하면서 다음과 같이 주장하였다[5].

> 어느 학문의 수준은 어느 정도까지 자기 자신의 근본 개념의 위기에서 견딜 수 있는가에 따라 결정된다. 모든 학문이 그와 같은 내재적 위기 속에서 실증적으로 탐구하면서 묻는 일과 물음을 받은 여러 사상 자체와의 관계가 흔들리게 되는 것이다. 오늘날에는 도처에서 연구를 새로운 기초 위에 바꿔 놓는 경향이 여러 가지 전문 분야에서 눈에 띄기 시작하고 있다.

보다 완전함을 추구하려는 위대한 수학자들도 연구과정에서 오류를 범했음에 틀림없지만, 불행히도 그들의 연구 과정에서 일어나는 사건이나 오류의 경향이나 그 극복 과정 혹은 영향을 알 수 없는 것이 일반적이다. 왜냐하면 우리는 주로 최종적이고 세련된 결과들만을 볼 수 있기 때문이다. 우리가 문헌을 통하여 알 수 있는 것은, 오류들은 최초의 연구자가 발견하지 못했던 것이고 종종 다른 수학자들에 의해서 훗날 지적되어 다루어 진 것이다.

오류는 수학의 역사에서 중요한 역할을 했다. 오류는 수학의 발달을 저해하는 요인이기도 하지만, 한편으로는 수학이 발전하는데 도약대가 되는 중요한 역할을 하였으며, 이것은 수학을 발전시키는 원동력이 되기도 하였다. 본 논문에서는 후자의 관점에 초점을 맞추어 논의하고자 하며, 이를 위하여 수학이 발전하는 과정에서 어떠한 오류가 있었으며 오류가 어떤 역할을 하였는지 고찰해 보고자 한다.[1)]

오류는 일반적으로 참이 아닌 것으로 쓰여진다. 혹은 착각, 관측상의 오차 등으로 인한 지각상의 착오를 가리키기도 한다. 논리학에서는 바르지 못한 추론 과정, 특히 외견상 바르지 못한 추리로 보기도 한다. 본 연구에서는 이러한 정의를 모두 포함한 의미로 사용하고자 하며, 2장에서 구체적으로 논의한다.[2)]

---

1) 이것은 지식에 대한 비판적 접근 방식을 말한다[8]. 비판적 접근 방법은 우리가 우리의 생각이 정당하거나 우리의 행위가 선하다거나 우리의 해결이 옳다는 것을 입증하기가 어렵다는 인식과 인간의 오류 가능성에 그 근원을 두고 있다. 비판을 통해 잘못된 것이 무엇인지 찾아내고, 그것을 개선시키거나 대치시키는 것을 말한다.

2) 오류는 더욱 세분하여 오류(error)와 실수(mistake)로 나누기도 하는데, 오류와 실수를 구분하는 기준은 오류의 규칙성과 실수의 불규칙성에 있다. 규칙성과 불규칙성은 여러 사람에게서 공통적으로 일어나는가 아닌 가로 판정한다. 본 연구에서의 오류는 그 당시의 여러 수학자들에게서 공통으로 규칙적으로 나타난 잘못된 것을 말한다.

1. 수학의 역사

본 장에서는 수학의 역사에서의 오류와 그 역할을 분석하기 위하여 미적분, 비유클리드 기하학, 오일러 다면체 정리, 무한 집합의 대소 비교를 중심으로 그 역사를 살펴보고자 한다. 여기에서는 모든 과정을 기술 할 수는 없고 오류와 관련 있는 부분을 중심으로 살펴본다.

1) 미적분

수학의 몇몇 영역에서의 발달은 부정확하고 정당화되지 않은 추측, 그리고 논리적 엄밀성의 부족으로 특징지을 수 있다. 그중 미적분의 발달은 이러한 특징을 보이고 있다. 미적분은 그 논리적 체계가 나타나기 이전까지는 불완전한 개념과 물리적이고 직관적인 방법, 심지어는 잘못된 논증을 사용하기도 하였다. 미분의 발달에 대해서 살펴보고자 한다.
수학자들은 한 세기를 넘게 도함수와 적분 개념을 연구하였다. 예를 들어 페르마(Fermat, 1601-1665)는 순간 속도(즉, 미분 계수를 계산하는 것)에 대해 다음과 같이 생각하였다[6].

> 우리는 다음 함수에 의해 설명되는 시간이 4초일 때 낙하하는 공의 속도를 계산할 것이다.
>
> $$d = 16t^2$$
>
> $t=4$일 때, $d = 16 \times 4^2$, 즉 256이다.
>
> 시간의 증가량을 h라 하면, 시간이 $4+h$에서 공은 256ft+(증가한 거리 k)만큼 낙하할 것이다. 그러면 $256 + k = 16(4+h)^2$이므로 $k = 128h + h^2$이 된다. 그리고 h초 동안의 평균 속도는 다음과 같다.
>
> $$\frac{k}{h} = \frac{128h + h^2}{h}$$
>
> 페르마는 이러한 간단한 함수의 경우에서 좋은 결과가 나왔고, 우변의 분모와 분자를 h로 나눌 수 있다고 생각된 다른 함수에서 다음을 얻었다.
>
> $$\frac{k}{h} = 128 + h$$
>
> 그런 다음, 그는 h를 0이라 하고, 4초일 때의 낙하 속도를 얻었다.
>
> $$\dot{d} = 128$$
>
> ($\dot{d}$는 뉴턴이 사용한 기호이다)

따라서 $\dot{d}$는 $t=4$에서 $d=16t^2$의 도함수이다.

페르마는 h가 0이 아니라고 가정하고 출발하였다. 이어서 그는 h가 0이 될 것이라고 생각하고 $t=4$일 때의 순간 속도의 값을 구했다. 즉, 페르마는 h에 대한 두 개의 모순된 가정에 의존하고 있었다.

뉴턴(Newton)도 페르마의 방법을 사용하였는데, 그도 이 방법을 논리적으로 정당화하지 못했다. 그는 이와 같은 방식으로 얻어낸 결과를 정당화 할 수는 없으나 기하학적 해석을 줄 수 있으므로 자신이 옳은 과정을 얻은 것이라고 생각하고 만족하였으며, 또 언젠가는 기하학적 증명이 발견될 것이라고 믿었다[6].

17세기 수학자들은 이러한 논리적 오류를 인식하지 못하고 있었다. 오히려 이러한 오류들을 무시하였는데, 이러한 방법은 기하학적 혹은 물리적 문제를 해결하는데 아주 강력하고 효과적이라고 생각했기 때문이었다.[3] 이러한 방법을 신뢰한 결과 과학 뿐 아니라 수학의 여러 분야를 발전하도록 했다. 그러나 미적분의 개념과 절차에 대한 부적당한 일반화는 결과적으로 오류를 이끌어 내었다.[4] 지금까지의 방법으로 얻은 많은 결과에 한계가 있다는 것을 알게 되면서 18세기 말부터는 엄밀성에 보다 더 관심을 가지게 되었다. 극한을 수학적으로 정의한 것(ε-δ 방법), 실수 개념 등의 기초가 확립되고서야 미적분이 논리적 체계를 갖추게 되었다.

무한 급수는 미적분을 연구하는데 사용되었는데, 수학자들은 무한 급수를 다루는 과정에서도 오류를 범하였다. 처음에 그들은 무한 급수를 전통적으로 대수에서 쓴 규칙과 방법을 사용하여 다룰 수 있을 것이라고 생각했다. 이러한 방법으로 많은 옳은 결과를 얻었다. 그러나 이 방법을 사용하여 얻어진 서로 모순된 결과들이 나왔을 때, 이에 대한 정당화가 부족함을 인식하기 시작했다. 예를 들면 다음과 같다[6].

다음 무한 합을 구한다고 하자.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

또한 이 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

그러므로 다음을 얻는다.

3) 뉴턴과 라이프니츠(Leibniz) 모두 자신의 방법을 정당화시키지 못하게 되면서, 자신의 방법의 일관성에 의존하여 엄밀성보다는 유용성을 택하였다.

4) 버클리(Berkeley, 1685-1753)는 1734년 출판된 책 **해석학자 또는 한 이단 수학자를 위한 강론**에서 페르마와 뉴턴이 사용한 위의 방법에 대해서 비판했다[6].

$$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=1+\frac{1}{2}x$$

x에 대한 이 방정식을 풀면 $x=2$를 얻는다.

따라서 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$가 된다.

이러한 방법을 일반화하여 다음과 같이 유도하였다.

$$\begin{aligned} x&=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots \\ &=1+\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots\right) \\ &=1+\frac{1}{a}x \end{aligned}$$

이 방정식을 풀면, 다음과 같다.

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots=\frac{a}{a-1}$$

이 식은 $a=3$혹은 4일 때는 옳은 결과가 나오지만 a가 $\frac{1}{2}$ 혹은 -1일 경우에는 모순된 결과가 나온다.

따라서 수학자들은 급수를 전통적인 방법과 유사한 방법을 사용하여 구할 수 있는 것과 그렇게 할 수 없는 것으로 구분하기 시작하였다. 즉, 기대한 것과는 달리 어떤 급수는 절대로 계산할 수 없다는 것을 깨닫게 되었으며, 이로 인해 수렴하는 급수의 개념이 나오게 되었다. 그리고 수렴하는 급수와 발산하는 급수에 대한 차이점을 명확히 했다. 무한 급수를 가지고 연구하면서 발견한 문제들과 그것들을 해결하기 위한 시도는 수학자들이 기대했던 것 이상의 결과를 얻게 되었다. 이것은 수학의 기초를 수정하는 출발점이 되기도 하였다.

클라인(Kline)이 지적했듯이[6], 수학자들이 수학의 영역에서 그러한 질문을 하게 된 것은 미적분학에서 발생한 모순된 결과, 즉 오류였다.

2) 평행선의 공리와 비유클리드 기하학

수학의 역사에서 비유클리드 창조만큼 수학자들을 방해하고 도전하는 사건은 없었다. 이러한 사건은 많은 수학자들이 그리스 시대 이래로 유클리드의 제 5공리가 복잡하다고 느꼈던 곳으로 거슬러 올라갈 수 있다. 유클리드 원론에서 제 5공리는 다음과 같다.

두 개의 직선과 만나는 한 직선이 같은 쪽에 두 배의 직각보다 작은 내각을 만들 때에는, 두 개의 직선을 계속 연장하면 두 배의 직각보다 작은 각들이 있는 직선과 같은 쪽에서 만날 것이다.

여러 수학자들은 유클리드 원론의 제 5공준과 동치이지만 보다 자명한 문장으로 대체하고자 하였으며, 유클리드 기하학의 다른 9개의 공리로부터 정리로서 그것을 연역하고자 노력하였다. 첫 번째를 위한 노력들은 오늘날에도 훌륭한 것으로 여길 수 있다. 그러나 두 번째 것은 현재의 지식으로 볼 때 오류로 생각될 수 있다. 그러나 이러한 잘못된 시도는 수학자들에게 새로운 영역을 연구하도록 했다.

몇몇의 수학사가들은 사케리(Saccheri, 1667-1733)가 자신의 연구 결과의 중요성을 잘 알지 못했어도 그를 비유클리드 기하학의 창시자로 본다[4]. 사케리는 평행 공리를 귀류법에 의해 증명하려고 생각했다. 즉, 만일 평행 공리를 부정하는 대안적인 공리가 가정된다면, 유클리드 기하학의 이미 확립된 정리 중 하나에 모순이 되는 정리를 유도할 수 있다는 것을 보이고자 했으나 모순을 유도할 수가 없었다. 그는 유클리드 기하학만이 옳은 것이라고 알고 있었기 때문에 또 다른 기하학의 가능성에 대하여 깨닫지 못했다. 그러나 후에 다른 수학자들은 사케리의 연구에서 오류를 발견했다. 실제로 그가 모순이라고 생각했던 어떤 것도 실제로는 모순이 아니었다. 그러나 실제 목적에서는 실패했어도, 사케리의 부정확한 증명은 많은 정확한 결과들보다 수학의 미래 역사에 큰 영향을 주었다.

사케리와 다르게 가우스(Gauss), 로바체프스키(Lovachevsky), 볼리아이(Bolyai)와 같은 수학자들은 그 체계를 인식하고 연구함으로써, 비유클리드 기하학을 체계적으로 발전시키는데 선구자가 되었다. 이러한 기하학의 발달을 둘러싼 커다란 논쟁에서, 결과적으로 수학자들은 그 체계를 인식하고 그로 인하여 창조된 세계가 유클리드 기하학 만큼이나 논리적인 관점에서 적절하다고 인정하였다. 그리고 이러한 기하는 유클리드 기하만큼 정확하게 물리적 공간의 성질을 설명하는데 사용할 수 있다는 것을 알게 되었다. 이러한 결과들이 의미가 있다는 것을 알기 위해서는 수학적 진리에 대안 기본적인 신념에 도전해야만 했다. 따라서 비 유클리드 기하학의 창조와 그 타당성의 인식은 수세기 동안 수학자들이 알아왔던 유클리드 기하학 만이 진리이고 유일하게 물리적 공간을 대표한다는 생각을 잘못된 것으로 인식할 수 있게 되었다. 이러한 오류를 극복하는 과정에서 수학의 본성은 이미 결정된 절대적 진리가 아니라 인간 정신의 산물로 보게되었다.

3) 오일러 다면체 정리

라카토스(Lakatos)는 수학적 지식은 종종 부분 추측으로부터 시작되어 점점 세련되는 과정을 통해 성립된다고 말하였다[7]. 이러한 과정은 초기 추측의 취약점을 명확히 하고 수정하는데 필요한 것을 알 수 있게 한다는 점에서 중요하다. 그는 다면체의 표수

(characteristic)와 분류에 대한 기본적인 문제를 역사적 발달의 관점에서 논함으로써 자신의 생각을 제시하였다.[5)]

오일러(Euler)는 처음으로 다면체의 점, 면, 변의 개수 사이의 관계가 존재한다는 사실을 관찰하고, 1958년에 다음과 같은 추측을 제안하였다[7].

> 다면체에서 면(F), 모서리(E), 꼭지점의 개수(V) 사이의 관계는 $V+F-E=2$의 관계를 만족한다.

1813년 코시(Cauchy)는 오일러 추측에 대해 다음과 같은 부분 추측(증명)을 시도하였다.[6)]

1단계: 표면이 얇은 고무로 만들어진 오목한 다면체를 상상해 보자. 만일 우리가 그 중 한 면을 절단한다면, 우리는 남아있는 표면을 찢지 않고 칠판에 그릴 수 있다. 면과 모서리는 형체를 잃게 될 것이고, 모서리들은 곡선이 될 것이지만 V와 E는 변경될 것이다. 원래의 다면체에 대한 $V-E+F=2$라는 필요충분 조건을 만족시키기 위해서 이러한 평면의 네트워크는 $V-E+F=1$이다.

2단계: 네트워크를 삼각형으로 분할한다. 다각형에 대각선을 그린다. 각각의 대각선을 그려서 $V-E+F$의 값이 변경되지 않도록 E와 F를 하나씩 증가시킨다.

3단계: 삼각형의 네트워크에서 하나씩 삼각형을 제거한다. 삼각형을 제거하면, 한 모서리와 한 면이 제거되거나 제거하거나 한 면, 두 모서리와 한 꼭지점이 사라진다. 따라서 한 삼각형이 제거되기 전에 $V-E+F=1$을 만족했다면, 그 삼각형이 제거된 후에도 그 식이 성립한다. 이 절차의 마지막에서 하나의 삼각형이 남는다. 이것은 $V-E+F=1$을 만족하고, 참이 된다.

이 증명은 임시적이다. 여기에서 다면체는 "그 표면이 다각형인 면으로 구성되는 3차원 도형"으로 정의된다. 이 증명에 대해 다음과 같은 반례가 존재한다. 즉, 정육면체 속에 작은 정육면체가 들어있는 입체, 가운데 네모 구멍이 뚫린 사진틀, 볏달린 정육면체가 그것이다.[7)]

---

5) 라카토스는 증명과 반박의 과정을 통해 수학이 발전해 왔음을 주장하였는데, 그는 수학의 역사가 논리적으로 완벽한 논증의 과정을 따라 발전하는 것이 아니라 추측, 부분 추측, 반례, 추측의 개선이라는 역동적인 과정을 통해 이루어진다고 보았다. 본 절에서는 오일러의 다면체 정리의 발달을 라카토스의 관점을 토대로 제시한다.

6) 라카토스는 "추측을 부분 추측 또는 보조 정리로 분해하여 그것을 가능한 한 매우 멀리 떨어져 있는 지식 가운데 끼워 넣는 것"을 증명이라고 하였다. 수학 공동체에서 받아들이고 있는 증명의 정의와 구분하기 위하여, 본 연구에서는 부분 추측(증명)이라는 용어를 쓸 것이다.

Lhuiller는 1812년에 정육면체 속에 작은 정육면체가 들어있는 입체를 반례로 제시하였다. 이로써 정의가 수정되게 되었는데, 다면체는 "다각형의 체계로 구성되는 곡면"이라고 Jonquieres에 의해 재정의 되었다. 그러나 이러한 다면체의 정의로도 전면적인 반례가 나오게 되었다.

후에 뫼비우스(Möbius)는 1865년에 다면체는 그러한 방식, 즉 "정확히 모든 모서리에서 꼭 두 개의 다각형이 만나고, 임의의 다각형으로부터 임의의 다른 다각형으로 다각형의 꼭지점을 전혀 통과하지 않는 방식으로 배열된 다각형 체계"라고 정의를 수정하였다.

전면적 반례가 나타날 때마다 나타나는 오류를 해석하는 한가지 방식은 반례가 틀렸다고 결론짓고 정의를 조정할 것을 생각하는 방법이다.[8] 이러한 접근은 수학적 정의가 확고하고 고정된 것이 아니라, 오히려 수학자들이 현재의 정의를 보다 정밀하게 만들 뿐 아니라 개념을 수정하여 개념을 새롭게 형성하고 결과적으로 그 정의가 학문에서 새로운 관점에서 발전하는 것으로 보아, 시간에 따라 변화할 수 있다는 것을 보여준다. 정의에 대한 이러한 생각은 수학의 절대적 진리를 믿는 사람에게는 충격이 된다.

반례의 발견에 대해 반응하는 다른 방법은, 추측 그 자체에서 어떤 오류가 존재하는 증거로 반례의 발견을 생각한다. 이것은 추측을 버려야 한다는 것을 의미하는 것이 아니라 재조사하고 추측이 수정될 수 있음을 의미한다. 반례는 추측을 가치 있게 변화시킨다. 반례가 반박하는 특수한 부분 추측을 구별하려는 목적을 가지고 원래의 부분 추측(증명)을 분석하고 그런 다음 추측 그 자체의 조건을 변화시킴으로써 추측과 부분 추측(증명)을 동시에 옳게 수정시킬 수 있다. 사진틀에서는 $V-E+F=0$이기 때문에 전면적 반례가 된다. 그리고 부분 추측의 단계 1에도 적용할 수가 없다. 따라서 한 면을 제거하고 펼쳐질 수 있는 다면체로 정의된 단순 다면체(simple polyhedron)로 새로운 개념을 만듦으로써 추측을 조정하게 된다. 오일러의 추측에 대해서 여러 수학자들이 제시한 반례는 표수(characteristic)의 측면에서 다면체를 분류하도록 동기 유발하였다.[9]

4) 무한 집합의 대소 비교

가장 기본적인 개념 중 하나인 무한 개념은 수학의 역사를 통해 상당한 논쟁을 일으켰다. 유한에 대한 우리의 제한된 경험을 무한까지 확장하려는 경향 때문에 무한에 대한 직관적인 생각은 전반적인 모순을 포함하고 있다. 두 유한 집합에 대하여 두 집합이 같은 수의 원소를 갖는지를 확인할 때 다음과 같은 상호 보완적인 판단 기준으로 비교한다[4].

7) 구체적인 그림은 라카토스의 저서[7] 참고할 것.
8) 이를 라카토스는 괴물 배제법이라고 불렀다.
9) 이것은 라카토스의 보조정리 합체법으로서, 이는 초기 추측을 그 응용의 영역에서 보다 잘 정의함으로써 세련되게 하였을 뿐 아니라 그것을 확장시키는데 공헌을 한다고 본다.

1. 만일 우리가 이 두 집합에서 원소들 사이의 일대일 대응을 발견할 수 있다면, 이 두 집합이 같은 수의 원소들을 갖는다는 결론을 내릴 수 있다(일대일 판단 기준).

2. 만일 한 집합이 다른 집합의 진부분 집합이라면(즉, 모든 원소가 다른 집합에 속하고, 다른 집합은 첫 번째 집합이 갖고 있지 않은 원소들을 갖고 있다), 또는 한 집합이 다른 집합의 진부분 집합에 대해 일대일 대응을 할 수 있다면, 그 두 집합이 서로 다른 개수의 원소들을 가진다고 결론을 내릴 수 있다(부분-전체 판단 기준).

무한 집합을 생각해 보자. 자연수 집합, 자연수 제곱의 집합, 정수 전체의 집합을 차례로 N, S, Z라 하자. N과 S는 명백하게 일대일 대응이 될 수 있다. 그런데 S는 N의 진부분 집합이다. 또한, N과 Z도 일대일 대응이 될 수 있으나 N은 Z의 진부분 집합이다. 무한 집합에 대한 이러한 모순은 수학자들을 괴롭혔다. 수학자들은 수세기 동안 무한의 집합을 비교하는 문제를 피했다. 그것은 실무한의 개념, 예를 들면 모든 자연수들과 같이 전체로 생각하는 것의 가능성을 수용할 수 없었기 때문이었다. 고대 그리스의 수학에서부터 아주 오랫동안 잠재적 무한 즉 끝이 없는 증가 가능성이 있는 것은 수학 공동체에서 받아들여졌다.

갈릴레이(Galilei, 1564-1642)는 이미 언급한 역설 즉, S가 N의 진부분 집합이라도 N와 일대일 대응을 할 수 있다는 사실을 명확히 논하였다. 그는 무한과 유한의 차이를 인식했고, 무한이 갖는 본질적인 성격을 알고 있었다. 그러나 그는 같다, 보다 큰, 보다 작은과 같은 속성은 유한에만 적용된다고 생각했다.

이와는 대조적으로 볼차노(Bolzano, 1781-1849)는 실무한을 생각하고 그 비교의 문제를 해결하려고 시도했다. 그는 무한 집합이 같은 수의 원소를 갖지 않을 수도 있다는 사실을 수용하였고, 두 무한 집합의 크기를 비교하기 위해서 일대일 판단 기준보다는 부분-전체의 원리에 의지 할 것을 제안하였다. 그의 연구는 동시대에는 잘 알려지지 않았고, 무한 개념의 발달에 큰 영향을 주지 못했다.

무한 집합의 대소에 대한 엄밀한 정의는 칸토어(Cantor, 1845-1918)에 의해 발전되었다. 그는 기수와 서수를 제안하였다. 볼차노와는 달리 그는 부분-전체의 원리를 무시하기로 결정하고, 대신에 두 개의 무한집합의 원소들의 개수를 비교하기 위해 일대일 대응을 사용하기로 결정했다. 그는 이러한 기준을 근거로 기수의 개념을 제시하였다. 그리고 이 기준으로 한가지 유형보다 많은 무한집합이 존재함을 보였다.

그리고 그는 전순서가 정의될 수 있는 집합에 대해 서수에 대한 개념을 제시하였다. 이러한 기준에 따르면, N과 S는 같은 순서 유형을 갖는 집합이지만, N과 Z는 서로 다른 순서 유형의 집합이다. 이러한 관점에서 보면, 농도의 개념을 적용할 때 원소의 개수가 같은 두 무한 집합은 순서 개념을 사용할 때는 서로 다른 개수를 가질 수 있다.

일반적으로 수학에서는 개념에 대해서 의견의 일치 하에 사용해 왔기 때문에, 칸토어가

기수와 서수를 구분하여 크기를 비교하는 상황은 혼란스러워 보인다. 이 경우에 어떤 기준이 적절한지 수학자들이 식별해야 한다.

이러한 무한 수 개념의 발달에서 초기의 오류를 볼 수 있다. 즉, 두 개의 유한 집합을 비교하도록 개발된 판단 기준을 정당화 없이 새로운 영역인 무한 집합에 적용하는 것이 그것이다. 이 때문에 즉, 정당화되지 않은 일반화에 의해 발생되는 모순에 의해서 수학자들은 유한 집합과 무한 집합이 차이가 있음을 분명히 알게 되었고, 새로운 상황에서 이해해야 하는 "수"의 새로운 정의가 필요하게 되었다. 그리고 "무한 수"의 비교에 대한 두 가지 방법 중 어떤 것을 사용해야만 하는 지를 결정하는 것은 절대적이고 논리적인 용어로 결정될 수 있는 것이 아니라 맥락에 달려있다고 볼 수 있다.

2. 수학의 역사와 오류

1장에서 살펴본 바와 같이 수학의 역사에서 오류는 여러 곳에서 나타난다. 본 장에서는 어떠한 유형의 오류가 있었으며, 이러한 오류는 수학이 발전해 나아가는데 어떠한 역할을 했는지 살펴보기로 한다.

일반적으로, 오류는 잘못된 생각이나 거짓된 믿음을 가리키는 말로 쓰인다. 이러한 오류에 대한 정의는 좀 더 좁은 의미로 추론 혹은 논증에 있어서의 잘못을 가리키는 말로 사용되기도 한다. 오류는 기준이 되는 어떤 가치에서 벗어나는 것 또는 그 가치와 들어맞지 않는 것이라고도 할 수 있다. 그렇다면 그 기준은 무엇인가. 그 기준을 어떤 것으로 해야 하는가. 본 연구에서는 기준이 되는 가치를 현재 수학 공동체에서 합의된 수학적 지식 혹은 정당화의 방법이라고 본다.

이렇게 보았을 때, 오류는 크게 지각적 측면, 논리학적 측면, 그리고 문화적 측면에서 구분하여 볼 수 있다. 지각적 측면에서의 오류는 착각, 표면적인 관찰에 의해 잘못 생각하는 것 등이 있다. 논리학적 관점에서 보면, 오류는 옳은 것처럼 보이지만 검토해보면 사실은 옳지 않은 논증의 형태라고 할 수 있다. 이러한 측면에서의 오류는 형식적 오류, 비형식적 오류로 분류되고, 형식적 오류에는 타당한 논증형식, 부당한 논증 형식이 포함되며, 비형식적 오류에는 심리적 오류, 자료적 오류, 언어적 오류가 포함된다[1].[10] 문화적 측면에서의 오류는 수학적 문화의 3수준[9]으로 설명할 수 있다. 1수준인 비공식적 수준에서는 사고의 무의식적 스킴, 문제에 접근하는 방법, 상황을 해석하는 방법 등이 사회화 과정에서 모방과 실천에 의해서 배우게 되며, 예로는 '관계', '같다' 등의 단어는 이용하지만 그 수학적인 정확한 의미는 갖지 않는 경우를 들 수 있다. 2수준인 공식적 수준에서는 믿음을 그 기초로 하고 있으며, 이 수준에서의 수학 문화의 예로는 수학적 이론의 무 오류에 대한 믿음, 수학은 실

10) 이에 대한 자세한 내용은 김광수[1]을 참고할 것.

제와 관련해 보면 쓸모 없다는 확신 등을 들 수 있다. 3수준인 전문적 수준에서는 수학 문화를 합리적이고 정당화되는 분명한 지식에 기초를 두고 있으며, 공식적 수준에서의 지식보다 가치나 타당성이 좀 더 합리적인 기준에 의해 평가된다. 문화적 측면에서의 오류는 주로 비공식적 수준과 공식적 수준에서 나온다.

이러한 분류에 근거하여 1장에서 논한 내용을 중심으로 수학자들이 범한 오류를 분석해 보고자 한다.

미적분학의 발전 과정에서는 언어적 오류에 속하는 애매어의 오류와 자료적 오류에 속하는 성급한 일반화의 오류를 보임을 알 수 있다. 페르마는 순간 속도를 구하는 과정에서 h를 처음에는 0이 아니라고 하였다가, 나중에는 0인 것으로 사용하였다. 이는 애매어의 오류라고 할 수 있다. 애매어의 오류란 말이 두 가지 의미로 사용되는 경우를 의미하는데, 이 경우 어떤 의미가 사용되었는가는 문맥에 의존할 수밖에 없다. 그리고 무한 급수의 합을 구하는 과정에서 $a=2$인 경우에 사용했던 방법을 일반적인 경우로까지 확장하여 서로 다른 값을 얻게 되는 경우가 있었다. 이는 성급한 일반화의 오류로 볼 수 있다. 일반화는 지식의 발달 과정에서 무엇보다도 중요한 사고 방법인데, 일반화의 근거는 특수한 사례들이기 때문에 어떤 특수한 사태가 어떤 일반적 사태의 사례라고 일반화하는 데에는 많은 문제점이 있다.

평행선의 공리와 비유클리드 기하학의 발견 과정에서는 두 가지의 오류가 발견된다. 하나는 유클리드의 평행 공리가 너무 부담스럽고 비직관적인 것처럼 보인다는 사실에 의해서 유클리드 기하학의 다른 9개의 공리로부터 평행선의 공리를 연역하려고 했었다. 이것은 지각적인 오류라고 할 수 있는데, 그 이유는 논리적인 근거에 의해서가 아니라 평행선의 공준의 내용이라든가 표현으로 보아서 그럴 것이라고 생각했기 때문이었다. 이러한 추측은 나중에 잘못된 것으로 밝혀졌다. 두 번째는 사케리가 자신의 증명을 틀린 것이라고 한 것이 그것이다. 이는 사케리를 비롯한 그 시대의 수학자들이 생각했던 것으로 유클리드 기하학은 물리적 공간이며, 그것은 공간에 대한 진리라고 생각했기 때문이다. 이러한 수학적 진리에 대한 기본적인 신념은 문화적 측면에서의 오류로 분류할 수 있는데, 이 때문에 수학자들이 잘못 생각하게 되었다. 이러한 공식적 수준에서 나올 수 있는 문화적 측면에서 오류는 문화적 직관으로도 설명할 수 있다. 문화적 직관이란 증명이 필요 없이 분명한 것으로 생각하는 것을 말하며 수학에 대한 기본적인 확신이다. 문화적 직관의 예로는 모든 선분은 같은 표준으로 잴 수 있다는 초기 그리스의 수학 공동체에서의 믿음, 모든 대수와 수의 연산은 가환이라는 글라스만(Glassmann)-해밀턴(Hamilton) 이전의 믿음, 어떤 연속 함수도 유한 개의 점만을 제외하고는 미분 가능하다는 볼차노-바이어슈트라스(Weierstrass) 이전의 직관 등을 들 수 있다[9]. 기하학과 관련된 문화적 측면에서의 오류 중 하나는 유클리드 기하학만이 참이라고 하는 신념이 그것인데, 공간은 시간과 함께 존재의 기본 전제가 되며, 이렇게 공간 개념을 단순하게 생각하면 공간은 오직 하나여야 하고 여러 개의 공간이 존재할 수는 없다고 생각하였다.

오일러의 다면체 정리의 발견 및 증명 과정에서 다면체의 점, 선, 면의 개수 사이의 관계

에 대한 오일러의 추측은 논리학적 측면에서 보면 근시안적인 귀납에 의한 오류로 분류될 수 있다. 근시안적인 귀납에 의한 오류는 이미 알려진 사실을 외면 또는 망각하거나 여러 가능한 자료를 폭넓게 조사하지 않은 채 어떤 결론에 도달하려 할 때 범하는 오류이다. 그리고 오일러의 추측을 코시가 부분 추측(증명)한 것에는 여러 가지 문제점이 드러났는데, 이는 반례로서 설명되어 진다. 반례가 나올 때마다 반례를 틀렸다고 결론짓고 정의를 조정하는 경우가 있었다. Jonquieres가 다면체를 정의하는 과정이 여기에 속한다. 이러한 정의를 받아들여도 다시 반례가 나옴으로써 뫼비우스는 다면체의 정의를 수정하게 된다. 이러한 과정에는 논리학적인 오류 중 언어적 오류에서 암묵적인 재정의의 오류가 포함되어 있다고 볼 수 있다. 어떤 말이든지 고정불변의 의미를 가지는 것은 아니고, 인간의 지식 체계가 변화하는데 따라 말의 의미도 변하거나 새로운 의미를 부여받게 된다. 의미의 가변성은 어떤 말이든지 자의적으로 변화시킬 수 있다는 것을 뜻하는 것이 아니다. 그러나 어떤 과정에서 말의 의미를 자의적으로 변화시키는 오류를 범하기도 하는데 이러한 오류를 암묵적 재정의의 오류라고 부른다.

무한 집합의 대소 비교에서는 유한 집합에서의 원소의 개수 비교의 기준을 무한 집합에 적용하려는 오류가 보인다. 이는 논리학적 측면에서 자료적 오류 중 잘못된 유추의 오류로 볼 수 있다. 서로 다른 일회적 사건들과 서로 다른 특수한 대상들 가운데에서 무엇인가의 공통점을 찾아내어 일반화하는데, 유사한 사건들이나 대상들은 유사한 특징이나 속성을 공유할 것으로 추리하는데 이를 유추라고 한다. 어떤 유추가 받아들여지기 위해서는 비교되는 대상들이 본질적으로 중요하고 유관한 것들이어야 하는데, 이러한 조건들이 지켜지지 않으면, 유추는 오류에 빠지게 된다. 유한 집합의 원소의 개수비교 기준을 무한 집합에도 그대로 적용하는 과정에서 유추를 사용하게 되고, 이로써 오류가 생기게 되었다.

이상에서 고찰한 바와 같이 수학의 역사에서의 다양한 오류가 확인되었다. 오류가 있음이 확인되면, 일반적으로는 그 분야에서의 근본적인 오해에 대해 깨닫게 되고 그것을 고치게 된다. 한편, 오류는 수학이 발전하는데 도약대로서 역할을 하였는데, 이를 수학적 개념의 측면, 정리의 측면, 새로운 체계의 발견의 측면에서 논의하고자 한다.

우선 수학적 개념의 측면에서는, 오류가 무시됨으로써 미적분이 더욱 발전되게 되었으며, 후에 오류를 수정하는 과정에서 엄밀성을 추구하게 되었다. 이로써 극한에 대한 정의와 실수의 정의가 나오게 되었고, 따라서 미분과 적분의 개념을 명확히 하게 되었다. 그리고 수렴급수에 대한 개념이 나오게 되었다. 오일러의 다면체 정리에서는 추측과 부분 추측에 대한 반례가 나옴으로써 다면체 용어를 정교하게 재정의하게 되었다. 한편, 오일러의 추측이 성립할 수 있는 다면체의 성질을 확인함으로써 단순 다면체가 정의되고, 이를 바탕으로 표수에 대한 개념이 생기게 되어 위상수학으로 발전하게 되었다.

정리의 측면에서는, 오일러의 다면체 정리의 발견과정에서 추측에 대한 반례가 나옴으로써 추측이 보다 엄밀하게 수정되게 되었다. 이를 라카토스는 보조정리 합체법이라고 불렀는

데, 이러한 방법을 통해서 추측이 수정되어 보다 올바른 정리가 되도록 하였다.

새로운 체계의 발견의 측면에서는 오류를 확인하고 이에 도전함으로써 새로운 연구 분야를 개척하는 것을 말한다. 잘못된 생각을 가지고 연구함으로써 수학에서 새로운 분야가 나오게 된 경우가 있었는데, 비유클리드 기하학의 발견이 그것이다. 그리고 무한 집합의 원소의 개수 비교에서도 일대일 대응에 의한 판단 기준을 채택함으로써 논리적으로 원소의 개수를 비교할 수 있게 되었으며, 집합론에서 기수와 서수의 개념이 나오게 되었다.

3. 결론

본 연구에서는 수학의 역사를 오류와 관련 시켜봄으로써, 오류에 의해서 수학이 어떻게 발전하였는가를 수학에서의 몇 가지 영역을 중심으로 살펴보았다. 미적분, 비유클리드 기하학, 오일러의 다면체 정리, 무한 집합의 원소의 개수 비교 등을 중심으로 살펴보았는데, 오류를 지각적 측면, 논리적 측면, 문화적 측면에서 논의해 보았다. 2장에서 살펴본 여러 가지 오류 는 이를 극복하고 수학의 발달에 기여한 것으로 확인되었는데, 이를 수학적 개념, 정리, 새로운 체계의 발견의 측면에서 살펴보았다. 그러나 몇몇의 개념을 중심으로 논의되었기 때문에 주제별로 좀 더 세밀한 논의가 필요할 것으로 보인다.

본 연구에서는 수학의 발달에서 오류의 잠재력을 확인할 수 있었다. 이를 역사발생적 원리에 터해 보면, 수학의 학습-지도에도 도움이 될 것이다. 본 연구의 관점을 수학 학습-지도에서 논의해 본다면 학생들의 오류는 수정되어야 할 대상이 아니라 탐구를 위한 도약대로서의 역할을 충분히 수행할 수 있을 것이며 이를 위한 다양한 아이디어를 얻을 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. 김광수, **논리와 비판적 사고**, 철학과 현실사, 1993.
2. 김용운, 김용국, **수학사의 이해**, 우성, 1997.
3. Bachelard, G., *La Philosophie du Nom, Presses Universitaires de France*, 1970. [김용선 역, **부정의 철학**, 인간사랑, 1991.]
4. Borasi, R., *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*, Ablex Publishing Corporation, 1996.
5. Heidegger, M., *Being and Time*, Harper and Row, 1962. [전양범 역, **존재와 시간**, 시공사, 1991.]
6. Kline, M., *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, 1980.

[박세희 역, **수학의 확실성**, 민음사, 1988.]

7. Lakatos, I. *Proofs and refutation*, Cambridge University Press, 1976.
   [우정호 역, **수학적 발견의 논리**, 1991.]
8. Perkins, H. *The Possibilities of Error: An Approach to Education.*
   [장상호 역, **오류 가능성의 교육적 의의**, 교육과학사, 1984.]
9. Sierpinska, A., *Understanding in mathematics*, The Falmer Press, 1994.