KJHM Vol. 15, No. 3, 2002, 25-34

아르스 마그나와 프린키피아에 나오는 수치해석적 기법

영동대학교 교양과정부 **이무현**

Abstract

This paper explains methods of numerical analysis which appear on Cardano's *Ars Magna* and Newton's *Principia*. Cardano's method is secant method, but its actual application is severely limited by technical difficulties. Newton's method is what nowadays called Newton-Raphson's method. But mysteriously, Newton's explanation had been forgotten for two hundred years, until Adams rediscovered it. Newton had even explained finding the root using the second degree Taylor's polynomial, which shows Newton's greatness.

0. 서론

오늘날 수치해석의 여러 기법들은 컴퓨터 응용 분야에서 중요한 비중을 차지한다. 순수수학에서 공부하는 어떤 이론적인 문제가 아니라, 실제 상황에서 생겨나는 수많은 방정식들은 원하는 만큼의 정확도를 가지는 근사해를 구하면 충분하며, 컴퓨터를 돌려서 그러한 근사해를 구하는 방법은 많이 있지만, 수치해석학자들은 가능한 한 효율적인 알고리듬을 구하려고 애를 쓴다.

근사해를 구하려는 시도는 아주 옛날에도 있었다. 원의 넓이를 구하는 문제, 또는 정사각형의 대각선의 길이 문제, 또는 삼차방정식이 등장하는 문제와 같이, 당시로서는 해결할 수 없는 문제를 직면하였을 때, 근사해를 구하려 시도한 것은 당연한 일이다. 그리고 토지의 넓이와 같은 실용 문제에서는, 충분히 정확한 근사해를 구하면 만족할 수 있다. 이런 의미로 보면, 수치해석적 기법은 예나 지금이나 같은 역할을 맡고 있다고 말할 수 있다. 물론, 옛날에는 컴퓨터는 고사하고 편리한 십진 기수법, 소수 표기법조차 없었으니, 수치해석적 기법이 제대로 발달할 수 없었다.

그런데 1500년대 초에 이탈리아 수학자들이 삼차방정식의 풀이법을 구하기 위해서 애를 썼으며, 수학자들 사이의 치열한 논쟁과 대결을 통해서, 여러 가지 풀이법들에 대한 연구가 있었다. 그런 소용돌이 속에서, 수치해석적 풀이법도 한 번 더 조명을 받고 넘어갔을 것이다. 그리고 1600년대에 들어서 천문학적 관측이 발달하면서, 행성 또는 혜성의 궤도를 정밀하게 계산하는 일이 요구되었다. 사인, 코사인 함수가 등장하는 방정식의 경우, 수치해석적 풀이법에 기댈 수밖에 없으며, 그러한 영향 때문에 그 기법들이 발전하게 되었다.

1. 아르스 마그나에 나오는 기법

카르다노(Girolamo Cardano)가 1545년에 출판한 아르스 마그나는 삼차방정식의 풀이법을 최초로 공개한 책이며, 카르다노와 타르탈리아(Tartaglia) 사이의 논쟁 때문에 더욱 유명하다. 아르스 마그나의 제 30 장에서, 카르다노는 오늘날 수치해석에서 할선법(secant method)이라 부르는 방법을 제시해 놓았다[1]. 방정식 $f(x)=0$의 근사해를 구하기 위해서, 두 점 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$과 $(x_n, f(x_n))$을 지나는 할선(secant line)이 x축과 만나는 교점을 x_{n+1}이라 놓는 것이 할선법이다. 이때, x_{n+1}은 다음 공식으로 주어진다.

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

카르다노는 다음과 같이 근에 접근해 들어갔다. 그는 방정식 $x^4+3x^3=100$을 예로 들어 놓았으며, 우선 근에 가까운 정수 $x_1=2$와 $x_2=3$을 택하였다. 다음과 같이 놓자.

$$f(x)=x^4+3x^3$$

그러면 $f(x)=100$이 되는 x가 해이다. 그런데 $f(x_1)=40$이고 $f(x_2)=162$이므로, 그 비율을 계산해서 카르다노는 $x_3=2+\frac{30}{61}$을 잡았다. 그리고 $f(x_3)$은 약 85이니, $f(x_2)=162$와 비율을 계산하여서, $x_4=2+\frac{2775}{4697}$를 잡았다. 그러고는 x_4가 충분히 정확한 해라고 결론을 내렸다.

전자계산기 또는 컴퓨터로 계산해 보면, $f(x_3)=\frac{1176455680}{13845841}\fallingdotseq 84.96816336$이고, 따라서 $x_4'=2.59097176$이 된다. 그리고 이 방정식의 정확한 해는 $x\fallingdotseq 2.61193547$이다. 카르다노가

구한 값은 $x_4=2+\frac{2775}{4697}\fallingdotseq 2.59080264$이었다. 오차는 0.02113283이다. 카르다노의 입장에서 보면, 어차피 한 번 더 근사값을 취하려는 참이니, $f(x_3)$이 약 85라고 한 것은 문제가 될 것이 없다. 그 당시의 계산 도구를 가지고 $f(x_3)=\frac{1176455680}{13845841}$이라는 값을 사용하기는 힘들었을 것이다.

두 번째 예는 방정식 $x^2+20=10x$인데, $x_1=7$과 $x_2=8$을 잡았다. 그리고는 약간 특이하게, 일차항 x의 계수를 기준으로 비율을 계산하였다. 즉, $f(x)=x^2+20$이라 하였을 때, 주어진 방정식의 정확한 해 x는 $f(x)=10x$를 만족시킨다. 그런데 $x_1=7$을 넣으면 $f(x_1)=9\frac{6}{7}x_1$이 되고, $x_2=8$을 넣으면 $f(x_2)=10\frac{1}{2}x_2$가 된다. 그러므로 정확한 계수 10을 기준으로 $9\frac{6}{7}$과 $10\frac{1}{2}$의 비율을 계산하여서, $x_3=7+\frac{2}{9}$를 잡았다. 이 값을 가지고 계산하면 $f(x_3)=9\frac{116}{117}x_3$이 되니, 충분히 정확한 해라고 주장해 놓았다. 실제로 정확한 해는 $5+\sqrt{5}\fallingdotseq 7.23606798$이며, 따라서 카르다노가 구한 해 $x_3=7+\frac{2}{9}\fallingdotseq 7.22222222$의 오차는 0.01384576이다.

오늘날의 관점으로 보면, 일차항 x의 계수를 기준으로 비율을 계산하는 것은 매우 이상하게 느껴질 것이다. 그러나 카르다노 시대의 관점으로는 전혀 이상할 것이 없으며, 방정식의 형태가 이런 경우는 이렇게 계산하는 것이 오히려 자연스럽다. 당시에는 방정식의 어느 한쪽에 있는 항을 다른 한쪽으로 옮기는 일을 상상하기조차 어려웠다. 그러니 이 형태의 방정식에서는, 왼쪽 변 x_n^2+20을 계산한 다음에 x_n으로 나누어서 x의 계수를 구하고, 그것을 기준으로 비율을 계산하는 것이 자연스럽다.

세 번째 예는 방정식 $x^3=6x+20$이며, 그 풀이 방법도 역시 이런 방식이다. 즉, 먼저 오른쪽 변 $6x_n+20$의 값을 계산하고, 그 다음에 x_n^3으로 나누어서 x^3의 계수를 구한다. 이 예에서는 x^3의 계수가 1이 나와야 정확한 해이다. 카르다노는 $x_1=3$과 $x_2=4$로 잡았으며, 이 값들을 가지고 x^3의 계수를 구하면 각각 $1\frac{11}{27}$과 $\frac{11}{16}$이 되며, 그 비율에 따라서 $x_3=3+\frac{176}{311}$을 구하였다. 이 값을 가지고 x^3의 계수를 구하면 $\frac{1245186154}{1363938029}$가 되는데, 이 값은 $\frac{31}{34}$과 거의 같으니, 카르다노는 $\frac{31}{34}$을 가지고 계산을 하였다. 그런데 카르다노는 계산 과

정에서 실수를 했다. 즉, $\frac{31}{34}-\frac{11}{16}=\frac{61}{272}$인데, 카르다노는 이 값을 $\frac{61}{271}$이라 적어 놓았으며, 이후 계산에서 틀린 값인 $\frac{61}{271}$을 사용하였다. 카르다노는 결국 $x_4=3+\frac{120611}{303536}$을 얻었다. 그리고 이 값은 거의 $3+\frac{201}{506}$, 그러니 거의 $3+\frac{2}{5}$라고 적어 놓았다. 카르다노가 계산 과정에서 실수를 하지 않았다면, $x_4{}'=3+\frac{7496}{18971}\fallingdotseq 3.39512941$을 얻었을 것이다.

오늘날의 방식으로는 x_3과 x_1을 가지고 x_4를 계산해야 한다. 왜냐 하면 정확한 해의 양쪽에 놓여 있는 것들은 x_3과 x_1이기 때문이다. $x_3=3+\frac{176}{311}$과 $x_1=3$을 가지고 계산해 보면, $x_4{}''=3+\frac{65824}{141505}\fallingdotseq 3.46517084$가 나온다. 그리고 이 방정식의 정확한 해는 $x\fallingdotseq 3.43770724$이다. 그러니 카르다노가 구한 $x_4=3+\frac{120611}{303536}\fallingdotseq 3.39735320$의 오차는 0.04035404이다.

이러한 예들을 보면, 카르다노의 시대에는 수치해석적 기법을 실제로 적용하기가 매우 어려웠음을 알 수 있다. 즉, 당시의 분수 표기법이나 계산 도구를 가지고는 이러한 계산 과정을 여러 번 되풀이하기가 매우 어려웠다. 그리고 계산 과정에서 실수를 할 가능성이 항상 잠재해 있으며, 계산 결과로서 얻은 근사해는 오차가 꽤 크게 나온다. 이러한 난관에도 불구하고 카르다노가 이 방법을 소개해 놓은 것은 그만큼 더욱 의미가 있다고 하겠다. 오늘날 수치해석에서 할선법이라 부르는 풀이법을 카르다노가 분명하게 제시해 놓았다. 그러니 이 풀이법을 설명할 때, 카르다노에게 처음 사용한 공을 돌려야 마땅할 것이다.

2. 프린키피아에 나오는 기법

아이작 뉴턴(Isaac Newton)이 1687년에 출판한 프린키피아는 과학 역사상 최고의 명저로서, 근대 과학 혁명을 이룩한 불후의 역작이다. 프린키피아 제 1권 6장 법칙 31 바로 다음의 설명에서, 오늘날 뉴턴 · 랩슨 방법(Newton-Raphson's Method)이라 부르는 풀이법을 뉴턴은 소개해 놓았다([2], [5]). 뉴턴이 풀려고 하는 방정식은 다음과 같다.

$$x-e\sin x=z$$

이 방정식은 케플러가 1609년에 출판한 Astronomia Nova에서 제시해 놓은 것으로, 행성의

궤도 관측에서 나온 문제이다. 여기서 e는 행성 궤도의 이심률(eccentricity), z는 평균 근점이각(mean anomaly), x는 이심 근점이각(eccentric anomaly)이다. 뉴턴이 제시해 놓은 풀이법을 수식을 사용하여 설명하면 아래와 같다. 다음과 같이 놓자.

$$f(x) = x - e\sin x - z$$

그러면 $f(x) = 0$이 되는 x가 바로 우리가 구하려는 해이다. 어떻게든 적당히 추측하여서, 근사해 x_0을 구한다. 그리고 $x_0 - e\sin x_0 = z_0$이라 하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$f(x_0) = z_0 - z,\ f'(x_0) = 1 - e\cos x_0$$

이 함수의 그래프가 매끄러워서, 접선과 거의 같은 모습이라고 하면, 접선이 x축과 만나는 지점이 이 방정식의 좀더 정확한 근사해가 될 것이다. 그러므로 다음이 좀 더 정확한 근사해이다.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{z_0 - z}{1 - e\cos x_0}$$

이 과정을 되풀이하여서, 정확한 해를 향해 점점 더 가까이 갈 수 있다.

그런데 뉴턴은 이렇게 수식을 사용하여 설명해 놓지 않고, 말로서 길게 설명해 놓았으며, 그 후 200여 년 간 사람들은 뉴턴이 도대체 무엇을 설명해 놓았는지 이해하지 못 하고 있었다. 사람들이 이 내용을 이해하게 된 것은 아담스(J. C. Adams)가 1882년에 논문 "On Newton's Solution of Kepler's Problem"(Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol 53, 43-49, 1882)을 발표하고 나서였다[3]. 아담스는 이 논문에서 케플러 방정식에 대한 두 가지 수치해석적 풀이법을 소개해 놓았다. 첫째 방법이 바로 이 방법인데, 아담스는 위에서와 같이 수식을 써서 설명해 놓고, 뉴턴이 프린키피아에서 이 방법을 말로 설명해 놓았음을 밝혔다.

한국어로 된 프린키피아(이무현 번역, 교우사 출판, 1998년) 책의 본문 내용을 수식으로 표현하면 다음과 같다. 우리는 각의 단위로 라디안을 사용하니, 각 57.29578도(라디안 1)라는 말은 신경 쓰지 않아도 된다. 그리고 뉴턴은 B를 두 가지 뜻으로 사용하였다. 즉, 지름 AB의 끝점인 점 B로 사용하였고, 이것과는 전혀 관계가 없는 어떤 각 ∠B로 사용하였다. 그렇지만 크게 문제가 되지는 않는다.

뉴턴은 결국 비율로 계산을 하니, 우리는 반지름 OA=OB가 1이라고 가정해도 된다. 그러면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{OS} = \mathrm{OH} = e,\ \angle \mathrm{B} = e,\ \mathrm{L} = \frac{1}{e}$$

그리고 다음이 성립한다.

$$\angle \mathrm{AOq} = x$$

이것이 바로 우리가 구하려 하는 정확한 해, 이심 근점이각이다. 물론, 우리는 이 정확한 해를 모르고 있으며, 이것을 구하기 위해서 접근해 들어가는 것이다. 그 출발점은 다음과 같다.

$$\angle \mathrm{AOQ} = x_0$$

그리고 각 N은 평균 근점이각이다. 즉, 다음과 같다.

$$\angle \mathrm{N} = z$$

그 다음에 각 D를 잡는데, ∠D와 ∠B와의 비율은, ∠AOQ의 사인(sine)과 반지름과의 비율이 되도록 잡는다. 그런데 우리는 반지름이 1이라 가정하고 있고, ∠AOQ= x_0이니, 다음이 성립한다.

$$\angle \mathrm{D} = e \sin x_0$$

그러므로 다음을 얻는다.

$$\angle \mathrm{N} - \angle \mathrm{AOQ} + \angle \mathrm{D} = z - x_0 + e \sin x_0$$

이제, 각 E를 잡는데, ∠E와 위의 각과의 비율이, 길이 L과, 길이 L을 ∠AOQ의 코사인(cosine)만큼 줄인 것과의 비율과 같게 되도록 잡는다. 뉴턴의 설명을 보면, ∠AOQ가 직각보다 작은 경우는 그만큼 줄인 것과의 비율과 같게 되도록, ∠AOQ가 직각보다 큰 경우는 그만큼 늘인 것과의 비율과 같게 되도록 잡으라고 되어 있지만, 오늘날의 방식으로는 그냥 뺄셈이라고 보면 된다. 왜냐 하면 ∠AOQ가 직각보다 작은 경우는 코사인이 양수가 되고, ∠AOQ가 직각보다 큰 경우는 코사인이 음수가 되기 때문이다. 즉, 뉴턴이 여기서 말한 비율은 (∠AOQ가 직각보다 작든, 크든 관계없이) 다음과 같다.

$$\frac{1}{e} : \left(\frac{1}{e} - \cos x_0\right)$$

양쪽에다 e를 곱해 주어도 비율은 바뀌지 않으니, 이 비율은 다음과 같다.

$$1 : (1 - e\cos x_0)$$

즉, ∠E는 다음과 같다.

$$\angle \mathrm{E} = \frac{z - x_0 + e\sin x_0}{1 - e\cos x_0}$$

그러면 $x_1 = \angle\mathrm{AOQ} + \angle\mathrm{E}$는 좀 더 정확한 근사해이다. 이 값은 위에서 아담스가 수식을 써서 구한 것과 똑같다.

본문에서 "그 다음에 어떤 각 F를 잡되"라는 부분부터는 이 연산 과정을 한 번 더 적용하여 x_2를 구하는 대목이다. ∠F와 ∠B와의 비율은, $x_1 = \angle\mathrm{AOQ} + \angle\mathrm{E}$의 사인(sine)과 반지름과의 비율이 되도록 한다. 반지름은 1이니, 다음을 얻는다.

$$\angle \mathrm{F} = e\sin x_1$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$\angle \mathrm{N} - (\angle\mathrm{AOQ} + \angle\mathrm{E}) + \angle\mathrm{F} = z - x_1 + e\sin x_1$$

이제, 각 G를 잡는데, ∠G와 위의 각과의 비율이 다음이 되게 잡는다.

$$1 : (1 - e\cos x_1)$$

즉, ∠G는 다음과 같다.

$$\angle \mathrm{G} = \frac{z - x_1 + e\sin x_1}{1 - e\cos x_1}$$

그러면 $x_2 = \angle\mathrm{AOQ} + \angle\mathrm{E} + \angle\mathrm{G} = x_1 + \dfrac{z - x_1 + e\sin x_1}{1 - e\cos x_1}$는 좀 더 정확한 근사이다.

뉴턴은 이 연산 과정을 한 번 더 적용하는 것을 설명해 놓았고, 이런 식으로 한없이 계속해 나갈 수 있다고 했다.

이 방법은 접선을 이용해 근에 접근해 들어가는 방법이라고 할 수 있다. 아담스가 제시해 놓은 둘째 방법은 이차 곡선을 이용해 근에 접근해 들어가는 방법이다. 찬드라세카(S. Chandrasekhar)는 프린키피아에 대한 해설서인 Newton's Principia for the Common Reader에서 이 방법을 설명해 놓았다[4]. 그러나 찬드라세카의 설명은 약간 부족하게 되어 있다. 찬드라세카의 설명을 보충해 넣으면, 이 방법은 다음과 같다. 근사해 x_n에 대해서, 우리는 $x_{n+1} = x_n + \delta x_n$이 더욱 정확한 근사해가 되도록 만들고 싶다. 이 값을 방정식에다 넣는다. 여기서 δx_n은 매우 작은 값이니, 사인(sine) 함수를 x_n에서 이차 테일러 다항식으로 전개한다. 그 다음에 그것을 코사인(cosine) 함수의 일차 테일러 다항식으로 본다. 즉, 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
z &= x_n + \delta x_n - e\sin(x_n + \delta x_n) \\
&= x_n + \delta x_n - e[\sin x_n + \delta x_n \cos x_n - \tfrac{1}{2}(\delta x_n)^2 \sin x_n] \quad \text{(이차 테일러 다항식)} \\
&= x_n + \delta x_n - e[\sin x_n + \delta x_n \cos(x_n + \tfrac{1}{2}\delta x_n)] \quad \text{(그 차수까지 같음)}
\end{aligned}
$$

그러므로 다음 식을 얻게 된다.

$$z - (x_n - e\sin x_n) = \delta x_n[1 - e\cos(x_n + \tfrac{1}{2}\delta x_n)]$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$\delta x_n = \frac{z - (x_n - e\sin x_n)}{1 - e\cos(x_n + \frac{1}{2}\delta x_n)}$$

그런데 오른쪽 변의 분모에 δx_n이 등장한다. 그러니 이 상태로는 이것을 구할 수 없으며, 먼저 오른쪽 변의 분모에 나오는 δx_n에 대해서 적당한 근사값을 찾아서 넣어 주어야 한다. 케플러 방정식은 행성의 궤도에 관한 것이며, 케플러가 특히 신경을 써서 계산한 것은 화성의 궤도이다. 화성 궤도의 이심률은 $e = 0.093$이다. 이 값은 상당히 작다. 그러므로 위의 방

정식 오른쪽 변의 분모가 1이라 치고, 일단 다음을 구한다.

$$\delta x_n = z - (x_n - e\sin x_n)$$

그 다음에 이 값을 위의 방정식 오른쪽 변의 분모에 넣어서, 이번에는 정확하게 계산한다. 즉, 다음을 얻는다.

$$\delta x_n = \frac{z - (x_n - e\sin x_n)}{1 - e\cos(x_n + \frac{1}{2}(z - (x_n - e\sin x_n)))}$$

이것이 δx_n의 정확한 공식이다. 이 값을 x_n에다 더하면, 더욱 정확한 근사해 x_{n+1}을 얻게 된다.

이 과정을 계속 되풀이하여서, 원하는 만큼 얼마든지 정확한 해를 구할 수 있다. 그런데 아담스에 따르면, 뉴턴이 접선을 이용한 접근 방법을 약간 바꾸어 놓은 것이 프린키피아의 초판에 나오는데, 뉴턴이 의도한 것은 이차 테일러 다항식을 이용한 이 접근 방법임이 분명하다. 물론, 뉴턴은 말로서 길게 설명해 놓았다. 그런데 뉴턴의 설명에 약간 실수가 있어서, 분모가 다음과 같아야 한다.

$$1 - e\cos(x_n + \frac{1}{2}(z - (x_n - e\sin x_n)))$$

그런데 뉴턴이 설명해 놓은 분모는 다음에 해당한다.

$$1 - e\cos(x + \frac{1}{2}e\sin x_n)$$

이것은 $x_0 = z$라 놓고 이 과정을 처음 적용할 때에만 성립한다.

프린키피아에 나오는 접선을 이용한 접근 방법의 설명을 후대 사람들이 200여 년 간 이해하지 못 하고 있었다면, 설령 뉴턴이 실수 없이 완벽하게 설명해 놓았다 하더라도, 초판에 나오는 이차 테일러 다항식을 이용한 접근 방법은 더욱더 수수께끼로 남아 있었을 것임은 당연한 일이다. 아담스는 다음과 같이 결론을 내렸다.

"초월함수의 방정식 $x - e\sin x = z$를 푸는 데 뉴턴이 이 방법을 적용한 것은 그리 놀라운 일이 아니다. 왜냐 하면 이 방법은 보통의 대수방정식의 근사해를 구하는 널리 알려진 방법과 근본 원리가 같기 때문이다."

아담스의 결론은 아마 이차 테일러 다항식을 이용한 접근 방법보다 접선을 이용한 접근 방법을 염두에 둔 것 같다.

3. 결론

모든 실용 문제는 충분히 정확한 근사해를 구하면 된다. 그러니 토지의 넓이 등의 문제에서 근사해를 구하고 만족하는 경우는 동양·서양을 막론하고 흔히 있는 일이다. 카르다노의 **아르스 마그나**에 나오는 수치해석적 풀이법은 당시 수학계에서 온갖 종류의 방정식들을 풀려고 노력하는 과정에서 나온 부산물이라 할 수 있다. 그러나 당시의 기술적 한계 때문에, 그 방법은 그리 실용적이지 못했다. 뉴턴의 **프린키피아**에 나오는 풀이법은 또 다른 시대적 필요에 따라서 등장하였다. 천문학 분야에서 케플러 방정식이 등장하였다. 천문학자들은 그 방정식을 관측 오차 이내로 정확하게 풀어야 했으며, 관측할 때마다 매번 풀어야 했다. 게다가 그 방정식은 초월함수를 포함하고 있다. 그들의 입장에서 이러한 풀이법은 필수불가결한 수단이었을 것이다. 뉴턴은 미분을 발견하였기 때문에, 기울기를 이용한 이 풀이법을 발견할 수 있었다. 그런데 후대 사람들이 뉴턴의 이 풀이법을 잊어버린 것은 정말 불가사의한 일이다. 고전을 이해하려는 학자들의 노력이 너무 부족했던 것 같다. 지금 와서 **프린키피아**를 읽어 보면, 뉴턴은 이 풀이법을 분명하고 명쾌하게 설명해 놓았음을 알 수 있다. 뉴턴이 프린키피아의 초판에서 이차 테일러 다항식을 이용한 접근 방법도 제시해 놓았다는 아담스의 설명을 보면, 뉴턴의 천재성에 새삼 감탄하지 않을 수 없다.

참고 문헌

1. 카르다노/이무현 옮김, **아르스 마그나**, 교우사, 2000
2. 아이작 뉴턴/이무현 옮김, **프린키피아** 제 1 권, 교우사, 1998
3. J.C. Adams, "On Newton's Solution of Kepler's Problem," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* Vol 53(1882), 43-49.
4. S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader*, Oxford University Press, 1995
5. Isaac Newton/Revised by F. Cajory, *Principia* Vol. I, University of California Press, 1934