KJHM Vol. 15, No. 3, 2002, 17-24

代數體系의 發見에 관한 數學史的 考察

충북대학교 수학과 **한재영**

Abstract

It will be described the discovery of fundamental algebras such as complex numbers and the quaternions. Cardano(1539) was the first to introduce special types of complex numbers such as $5 \pm \sqrt{-15}$. Girald called the number $a \pm \sqrt{-b}$ solutions impossible. The term imaginary numbers was introduced by Descartes(1629) in "Discours la mèthode, La gèomètrie." Euler knew the geometrical representation of complex numbers by points in a plane. Geometrical definitions of the addition and multiplication of complex numbers conceiving as directed line segments in a plane were given by Gauss in 1831. The expression " complex numbers" seems to be Gauss.

Hamilton(1843) defined the complex numbers as pairs of real numbers subject to conventional rules of addition and multiplication. Cauchy(1874) interpreted the complex numbers as residue classes of polynomials in $\mathbb{R}[x]$ modulo x^2+1. Sophus Lie(1880) introduced commutators $[a, b]$ by the way expressing infinitesimal transformation as differential operations. In this paper, it will be studied general quaternion algebras to finding of algebraic structure in Algebras.

0. 서론

이 논문은 복소수와 같은 初복소수 체계(Hypercomplex number system)의 발견과 발전 양상에 관련된 수학사적 역정을 살펴보고, 群性體로서의 抽象代數學이 나아갈 바를 생각해 보는데 주안점을 둔 것이다.

카르다노(Gerolamo Cadano)는 1539년경에 지은 그의 저서 「Ars Magna」의 13장에서 다음 문제를 제시하고 있다. "To divide 10 in two parts, the product of which is 40." 그는 이 질문의 답은 "It is clear that this case is impossible. Nevertheless, we will work thus:"로 시작하는 당시로서는 상상을 초월한 암시를 내뿜고 이었다. 현대적 표현은 "그 두 부분은 $5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$이다."라는 것이었다. T. R. Witmer(1968)에 따르면, 그는 이어

서 이렇게 설파하였다. "Putting aside the mental tortures involved, multiply $5+\sqrt{-15}$ by $5-\sqrt{-15}$, making $25-(-15)$, which is $+15$. Hence this product is 40. This is truly sophisticated." 많은 수학 역사 학자들은 카르다노가 처음으로 복소수를 인유에게 소개한 것으로 여기게 되었다.

봄벨리(Rafael Bombelli)는 1572년 「l'Algebra」에서 입방문제 "$x^3=15x+4$"의 풀이 과정에서 "$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$"라는 꼴의 수의 합성을 얻게 되었다. 그의 놀라운 통찰력은 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$이라는 경이적인 경지에까지 이른다. 그리하여 $x^3=15x+4$의 풀이는 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4$라는 멋진 결론을 내린 것이다.

봄벨리는 "più di meno"라는 이름의 i와 "meno di meno"라는 $-i$을 소개하였다. 그는 이것들의 계산에서 "più di meno uia men di meno fà meno"는 $(-i)\times(-i)=-1$을 의미하는 것이었다. 그런 다음에 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{2+11i}$으로 표시했다. 이런 표시가 오늘날의 허수와 복소수의 표현법이 되었다고 생각된다.

Albert Girard(1629)는 수 $a\pm\sqrt{-b}$을 不可解라고 했다. 가상적인 수(imaginary number)라는 용어는 데카르트(Descartes, 1637)가 처음으로 사용했던 것이다. 데카르트 이후부터 수학자들은 복소수 개념 익숙하게 사용하게 되었다.

Roger Cotes와 드무아브르(de Moivre), 오일러(Leonhard Euler) 등은 1968년경에 오일러의 공식으로 불리는 $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$을 발견하게 된다. 복소수를 사각좌표축 x와 y을 갖는 평면의 점으로 가시적으로 나타낸 것은 오일러의 빛나는 업적이다. 오일러는 극좌표 $(r,\ \theta)$에서 복소수를 $x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$와 같이 표현했다. 그는 z평면의 정다각형의 꼭지점을 $z^n=1$의 근을 표현했고, 복소수 z의 지수 e^z를 정의하였다. 그는 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$라는 것을 증명한 것으로 유명하다.

가우스(Carl Friedrich Gauss, 1831)는 복소수라는 표현 "complex number"를 제일 먼저 사용한 사람으로 인식되고 있다.

복소수를 실수의 짝으로서 인식하여 복소수들의 합과 곱을 조작을 용이하게 소개한 사람은 해밀턴(William Rowan Hamilton, 1943)이다. 1847년 코시(Augustin Cauchy)가 법 x^2+1에 관한 다항식환 $\mathbb{R}[x]$의 잉여류로서 복소수를 표시하게 되었다.

이 논문에서는 해밀턴이 복소수의 개념을 확장하여 오늘날과 같은 추상 대수적 체계를 발견하여 온 과정을 "위대한 발견의 경로"라는 부제로 논술하고자 한다.

1. 해밀턴의 발견술

평면상의 점 (a, b)의 복소수의 표현 $a+bi$의 형태를 살펴 본 해밀턴은 공간상의 점 (a, b, c)을 $a+bi+cj$으로 표시해 보기에 이른다. 여기서 1, i, j는 서로 수직인 방향을 가진 길이가 1인 공간상의 선분으로 보았다. 그 이후에는 오늘날과 같이 벡터로 간주되는 것들이다. 이른바 "law of the moduli"라는 조건이 충족되는가를 확인하는 과정이 필요했던 것이다. $(a+bi+cj)(x+yi+zj)=\alpha+\beta j+\gamma k$가 성립해야 수학적 체계에 합당하기 때문이다.

$ij=ji$라는 가정에서 다음을 관찰해 보자.

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)=(ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)+ij(bz-cy)$$

$i^2=j^2=-1$은 복소수의 표현에서 이끌어낸 것이다. 그런 견지에서 $(ij)^2=1$이어야 하지 않겠는가? 그렇게 되려면 $ij=1$ 또는 $ij=-1$이다. $(a+bi+cj)^2=a^2-b^2-c^2+2iab+2jac+2ijbc$의 왼쪽의 1, i, j의 계수들의 제곱의 합은 $(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$을 만족한다. 공간 벡터 $(a+bi+cj)^2$의 길이가 $(a^2+b^2+c^2)^2$에 대응한다면, 같은 벡터 $a^2-b^2-c^2+2iab+2jac+2ijbc$의 길이도 $(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2$에 대응해야 한다는 논리를 법의 규칙이라는 것이었다. 이런 규칙은 $ij=0$인 경우에 한하여 만족된다는 것을 알 수 이 있다.

$ij=1$임에도 불구하고 $ij=0$이어야 수학적으로 의미를 갖는다는 것은 분명한 모순이다. 이러한 자기 모순에 당면한 해밀턴은 사고의 대전환을 강요받게 되었던 것이다.

2. 사원수 체계에의 도전

해밀턴은 그의 절친한 친구 그레이브(John Grave)에게 보낸 서신에서 $ij=-ji$가 되어야 하지 않을까 하는 소신을 피력하게 되었다. 그는 다음 관계에서 $k=0$으로 생각해 보았다.

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)=(ax-by-cz)+i(ay-bx)+j(az+cx)+k(bz-cy),$$
$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\neq(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2$$

$ij=-ji=1$이라 놓으면 아래의 식에서 "law of the moduli"이 성립하게 된다는 것에 그는 감탄했다고 전한다.

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(bz-cy)^2=(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2$$

해밀턴은 이러한 위대한 발견에서 $i,\ j,\ k$ 사이의 관계를 설정하기에 이른다.

$$ik = iij = -j,\ \ kj = ijj = -1,\ \ ki = j,\ \ jk = i,\ \ k^2 = ijij = -iijj = -1$$

단위 벡터 1, $i,\ j$에 이어 새로운 단위 벡터 k를 얻게 된 해밀턴의 발견술은 4차원이라는 미지의 세계를 개척하는 신작로를 개설한 것이다. $(a+bi+cj+k)(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k)$의 전개식의 구조를 생각하기에 이르는 그의 발견술의 역정은 계속된다. 사원수를 발견한 하루 후인 1843년 10월 17일에 그는 그레이브에게 이 위대한 발견의 내역을 편지로 서 보냈다. 같은 해 9월 이미 8개의 기본 원 $i,\ i,\ j,\ k,\ m,\ n,\ o$을 가진 대수를 발견했던 그레이브는 해밀턴의 편지를 받은 즉시 이들의 다음과 같은 연산표를 착안하게 되었다.

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1,$$
$$i = jk = lm = on = -kj = -ml = -no\,,$$
$$j = ki = \ln = mo = -ik = -nl = -om,$$
$$\cdots,$$
$$o = ni = jm = kl = -in = -mj = -lk$$

3. 후르비츠의 발견술

후르비츠(Adolf Hurwitz, 1896)는 논문 "Über die Zalhlentheorie der Quaternionen"에서 정수 사원수를 "모든 정수는 네 제곱의 합으로 표시된다."는 "Bachet's Theorem"의 확인에 사용하였다. 1621년 C.G. Bachet는 "모든 정수는 2, 3 또는 4 제곱의 합으로 표시됨."을 알고 있었다. 그는 325까지 이러한 사실을 확인했다. 영인 항은 포함해서 모든 정수 $N=s^2+x^2+y^2+z^2$의 꼴로 표시된다. 이른바 네제곱 표현에 관한 증명은 1772년 라그랑주(Joseph-Loui Lagrange)가 완성했다. 1년 후 오일러가 보다 간결한 증명을 제시하기에 이른다. 자연수 N을 네제곱의 합으로 표시하는 방법의 가지수에 관한 연구는 1828년 야코비(Kar Gustav Jacobi)에 의해서 진행되었다. 영과 음의 정수를 포함해서 $N=s^2+x^2+y^2+z^2$이 되는 서로 다른 $(s,\ x,\ y,\ z)$의 개수는 N의 홀수인 약수 모두의 합을 S일 때, N이 짝수이면 $24S$이고 N이 홀수이면 $8S$라는 것이었다.

후르비츠는 계수가 실수인 사원수 $q=s+ix+jy+kz$ 중에서 모든 계수가 정수이거나 모든 계수가 $n+\frac{1}{2}$인 것을 정수 사원수라 불렀다. 이것은 $\rho=\frac{1}{2}(1+i+j+k)$, $i,\ j,\ k$의

일차결합인 사원수를 뜻한다. 정수 사원수의 환 내에서 24개의 단위원이 존재하여 야코비의 표현 $24S$을 얻을 수 있었다. 정수 사원수 $q=s+ix+jy+kz$의 노름에서 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$N=qq'=(s+ix+iy+kz)(s-ix-iy-kz)=s^2+x^2+y^2+z^2$$

여기서 N이 짝수이면 $s,\ x,\ y,\ z$는 모두가 정수이고, N이 홀수이면 $n+\frac{1}{2}$이 될 수 있다는 것을 발견하였다. 그러므로 N이 짝수이면 네제곱 표시법은 $24S$이고, N이면 $24S$의 $\frac{1}{3}$인 $8S$가지라는 것이 후르비츠의 이론이다. 후르비츠는 $\pi=ab$인 단원 a와 b가 존재하면 정수 사원수 π를 소수라 하고, 두 가지 정리를 완성하게 된다. π가 소수일 필요충분조건은 노름 $\pi\pi'$이 일상적인 소수 p가 되는 것이다. 노름이 소수 p와 같은 준소수는 $(p+1)$개가 있다. 준소수란 법 $2(1+i)$에 관한 잉여가 1 또는 $1+2\rho$인 사원수를 말한다.

4. 장애를 극복한 새로운 발견

해밀턴(1853)은 계수가 복소수까지 확장된 사원수를 복소 사원수(biquternion)이라 불렀다. 복소수체 $\mathbb{C}$와 행렬환 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \middle| a,\ b\in\mathbb{R}\right\}$은 대응 $f(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$에 의하여 (환)동형이다. 복소사원 代數(algebra)는 복소수행렬 전체가 이루는 환과 대수적으로 동형이다. 해밀턴은 복소계수 $a,\ b,\ c,\ d$에 관한 사원수 $a+bi+cj+dk$는 행렬 $\begin{pmatrix} a+bi & -c+di \\ c+di & a-bi \end{pmatrix}$로 표현됨을 알았다.

실사원수환 $Q(\mathbb{R})$의 원 $p=a+bi+cj+dk$의 공액원 $\overline{p}=a-bi-cj-dk$에 대하여 $N(q)=q\cdot\overline{q}=a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0$인 경우 역원은 $q^{-1}=\overline{q}/N(q)$이다. $Q(\mathbb{R})$은 항등원 $1=1+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$을 갖는 가환이 아닌 환이다. 영이 아니 모든 사원수의 역원이 존재하므로 $Q(\mathbb{R})$은 나눗셈환이다. 항등원을 갖는 가환인 나눗셈환이 체이므로 사원수환은 체가 되지 못한다. 결과적으로 체가 아닌 나눗셈환의 존재를 확인한 셈이다.

해밀턴이 삼원수들 전체의 집합 $T=\{a+bi+cj \mid a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\}$의 대수적 구조를 밝히는데 실망하고 사원수체계를 연구하게 된 직접적인 이유를 찾아보자.

T 내에 결합법칙과 배분의 법칙 그리고 항등의 법칙이 성립한다. $i,\ j\in T$, $i^2=-1$, $j^2=-1$이므로 $ij\in T$에서 $ij=r+si+tj$인 실수 $r,\ s,\ t$가 존재해야 연산의 정의가 가

능할 것이다. 그런데 $-i=0+(-1)\cdot i+0\cdot j$이므로 아래의 식에서 $s^2=-1$을 얻게 된다. 실수 s에 대하여 $s^2=-1$은 불가능한 것이다.

$$-i=(ij)j=rj+sij+tj^2=rj+s(r+si+tj)+tj^2=(sr-t)+s^2i+(st+r)j$$

비가환인 나눗셈환을 사체라고 한다. 실사원수 사체의 영이 아닌 원 $U(Q(\mathbb{R}))=Q(\mathbb{R})-\{0\}$은 단원 전체의 집합이다. 부분집합 $H=\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$은 위수가 8인 비가환 부분군이다. 그러면서 H의 모든 부분군은 H 내에서 정규부분군이 됨을 알 수 있다.

5. 하세의 국소보편적 원리

표수가 2가 아닌 체 F 위의 代數 $Q(F)=\{q=s+ix+jy+tz \mid s, x, y, z\in F\}$은 $\{1, i, j, k\}$에 의하여 생성된 F-代數로서 $Q_F(\alpha, \beta)$의 기본연산과 노름은 다음과 같이 정의된다.

$$i^2=\alpha,\ j^2=\beta,\ k^2=\gamma,\ ij=k,\ jk=-i\beta,\ ki=-j\alpha,\ ji=-k,\ kj=i\beta,\ ik=j\alpha,$$
$$N(q)=(s+ix+jy+tz)(s-ix-jy-tz)=s^2-\alpha x^2-\beta y^2-\alpha\beta z^2$$

여기서 관심이 쏠리는 부분은 언제 $N(q)=0$이 되느냐 하는 것이다. $q=s+ix+jy+zk=(s+ix)+j(y-iz)$에서 $z=0$이면 $q=s+ix+jy$이다. $N(q)=0$이면 $s^2-\alpha x^2-\beta y^2=0$이다. $z\neq 0$이면 사원수 $p=q(y+iz)=[(s+ix)+j(y-iz)](y+iz)=s'+ix'+jy'$의 꼴이다. $N(q)=0$이면 $N(p)=0$이므로 $s'^2-\alpha x'^2-\beta y'^2=0$이다. 어느 경우이든 디오판토스(Diophantine) 방정식 $s^2-\alpha x^2-\beta y^2=0$을 푸는 것으로 귀착된다.

르장드르(Legendre)는 1798년 유리수체 $F=\mathbb{Q}$에서 이 방정식이 해를 갖는 조건을 발표했다.

1923년 하세(Helmut Hasse)는 정수론의 새로운 개념들로 이 문제에 관한 해법을 제시하였다. 하세가 개발한 원리를 "local-global principle"이라 한다. "모든 $p-$adic체와 실수체 $\mathbb{R}$에서 가해한 이차 디오판토스 방정식은 유리수에서 가해하다"

체 F의 원 $\alpha(=0)$, $\beta(=0)$에 관한 일반사원 대수 $Q_F(\alpha, \beta)$는 대수적 구조의 형성에 수학사적으로 기여한 바가 실로 엄청난 것이다.

6. 리의 발견술

1874년에서 1879년에 발표된 리(Sophus Lie)의 논문의 "finite continuous group"를 리 군이라 한다. 리와 엥겔(Engel)은 극소미분의 형태 $x' = f_i(x_1, \cdots, x_n)$, $i = 1, \cdots, n$에서 r개의 매개변수 $a_1, \cdots, a_r$을 첨가하여 새로운 극소미분 $x' = f_i(x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_r)$, $i = 1, \cdots, n$을 생각하게 되었다. 無限小 變換의 개념으로 $\delta x_i = X_i(x)\delta t$라는 표현을 고안했다.

그는 다변수함수 $F(x_1, \cdots, x_n)$에 관한 야코비의 기호로 알려진 $X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}$을 AF= $X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}$로 표시했다. 가환자 $(A, B) = AB - BA$는 야코비 기호로 알려진 것이고, $(A, (B, C)) + (B, (C, A)) + (C, (A, B)) = 0$은 야코비 항등식이다.

무한소변환들에 대하여 일차결합 $A = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n$들의 선형집합에서 $(A, B) = -(B, A)$, $(A, (B, C)) + (B, (C, A)) + (C, (A, B)) = 0$을 동시에 만족하는 연산 (A, B)을 부여할 때, 이 집합족을 리 代數라고 하게 되었다. 이러한 새로운 대수는 P. M. Cohn(1957)의 논문 "Lie algebra"에 처음으로 소개되었다.

7. 대수적 구조의 발견

일반 사원대수 $Q_F(\alpha, \beta)$의 중심을 구하는 문제는 이 구조의 가환성을 검증하는 작업의 일환이다. 리 기호를 $[x, y] = xy - yx$로 표시한다. 모든 $[x, y] = 0$이면 $xy = yx$이므로 가환성이 유지된다. 그러므로 $[x, y] \neq 0$인 경우를 생각해 보자는 것이다. 임의의 $x = c_0 + ic_1 + jc_2 + kc_4 \in Q_F(\alpha, \beta)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$[i, x] = j(2ac_1) + k(2c_2),$$
$$[j, x] = i(-2bc_3) + k(-1c_1),$$
$$[k, x] = i(2bc_2) + j(-2ac_1)$$

특히, $x \in Z(Q_F)$이면 $[i, x] = [j, x] = [k, x] = 0$이다. 그러므로 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$이 되어 $Z(Q_F) = Q_F$이다. 이것은 일반사원대수은 중심이 바탕인 체가 된다는 중요한 의미한다. 다음으로 $Q_F(\alpha, \beta)$ 내의 이데알은 자명한 이데알 $\{0\}$과 그 자신뿐임을 확인하여 보기로

하자.

임의의 이데알 $I \ni x \neq 0$에 대하여 리의 곱은 다음과 같다.

$$[j, [i, x]] = i(-4bc_2),$$
$$[k, [j, x]] = j(4ac_3),$$
$$[i, [k, x]] = k(-4ac_1)$$

c_1, c_2, c_3, c_4 중 적어도 하나는 0이 아니므로 $c_1 \neq 0$, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$이라 볼 수 있다. 단원을 포함하는 양쪽 이데알은 그 자체이므로 $I = Q_F(\alpha, \beta)$이다. 이것은 이데알 개념에서 $Q_F(\alpha, \beta)$가 단순대수라는 사실을 입증한다.

8. 결론

복소수와 같은 평면 체계로부터 初복소수 체계 발견에 이르는 수학사적 인물들이 걸어온 길을 추상대수적 구조론의 발전과 연계하여 소개하여 보았다. 해밀턴이 복소수의 개념을 확장하여 오늘날과 같은 추상 대수적 체계를 발견하여 온 과정을 해설하였다.

중심이 바탕체와 같으면서 단순적인 일반 사원대수는 추상대수학의 시대를 창출하였다. 대수적 구조론의 원천이며 실제적 상황이 해밀턴의 사원수 체계인 것이다. 수학의 많은 이론은 실존하는 모형을 근간으로 발견과 발전을 거듭해온 것이다. 현대대수학과 위상수학의 여러 이론은 해밀턴의 일반 사원수 체계를 근간으로 리의 착상 그리고 갈루아의 천재성에 의하여 암호론적 발전을 거듭하게 될 것이다.

참고 문헌

1. B.L van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer-Velag, 1985.
2. Louis Shapiro, *Introduction to Abstract Algebra*, McGraw-Hill, 1975.
3. Richard S. Pierce, *Associative Algebras*, Springger-Verlag, 1982.
4. Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Springger-Verlag, 1974.