Historia Mathematica Vol. 15, No. 2, 2002, 15-32

19세기 기하학에서의 '허'이론

한국교육과정평가원 **한경혜**

Abstract

The first part of this thesis gives some brief explanation of the theory and history of imaginary elements in analytic geometry in the 19th century. The second part of this thesis discusses the theory of imaginary elements of synthetic geometry in the first half of the 19th century. Then the next part mentions the theory of imaginary elements of geometry in the second half of that same century. Particularly Christian von Staudt's and Felix Klein's theories are handled in this part. Von Staudt, who has completed the system of the synthetic projective geometry, used 'involution' in order to introduce a new concept 'imaginary elements'- imaginary points, imaginary lines and imaginary plane-in synthetic geometry. Klein applied von Staudt's theory as he convey the result of the research in algebraic geometry in a picture. Von Staudt's and Klein's research may be regarded as the top of the effort to investigate possible relationship between real and imaginary structures.

0. 서

수학사에서 '진보'는 이미 존재하는 개념의 확장이나 새로운 개념의 도입을 통해 일반적인 정리나 법칙의 예외를 없애고, 하나의 관점으로 다양한 정리를 통일시켜 내려는 지난한 노력의 과정이었다고 할 수 있다. 이는 수 개념과 대수학의 관계에서도 찾아볼 수 있는 것으로, 대수 영역은 음수와 무리수 개념의 도입을 통해서 그리고 마침내 허수를 도입함으로써 근본적으로 넓어졌다고 할 수 있다. 특히 허수의 도입으로 말미암아 'n차 방정식은 n개의 근을 갖는다.'는 대수학의 기본정리가 예외 없이 성립하게 되었다. 이처럼 허수(imaginary number) 라는 새로운 개념은 대수학에서의 진보를 가능케 했을 뿐만 아니라 해석기하를 비롯한 다른 영역에서도 응용됨으로써 많은 이론적 발전의 토대가 되었다.

1. 해석기하의 허수이론

'허'(imaginary)라는 개념은 애초에 대수(Algebra) 영역에서 방정식의 근과 관련하여 그 존재의 불가피성이 제기되었지만 처음으로 그것을 언급하고 천명한 것은 데카르트(Rene Descartes, 1596-1650)였다. 데카르트는 자신의 저서 기하학(*La Geometrie)*에서 삼, 사차 방정식을 풀이하는 과정에서 음수의 제곱근으로 나타나는 수를 '불가능수'(unable number)라 명하였다. 그 이전에 이미 비에트(Francois Viete, 1540-1603)는 처음으로 방정식의 근과 계수와의 관계를 밝히는 과정에서 허수의 존재를 암암리에 가정했었다. 그에 따라 비에트는 5개의 근을 갖는 5차 방정식을 구성하기도 하였다. 그렇지만 실제로 모든 n차 방정식이 n개의 근을 가짐을 밝힌 것은 지라르(Albert de Girard, 1595-1632)였다. 이런 상황에서 데카르트는 다음과 같이 말하고 있다[6, p. 81].

> 마침내 우리는 방정식의 참, 또는 거짓인 근이 항상 실재하는(real) 것이 아니라 때로 가공(imaginary)임을 주목하게 되었다.

데카르트는 이미 '가상의 원소'(ideal elements)의 존재를 전제하고 있다는 것을 알 수 있다. 한편 '허수'란 $a+b\sqrt{-1}$(단, a와 b는 실수) 형태의 수라는 것은 이탈리아의 대수학자 카르다노(Gerlamo Cardano, 1501-1570)가 3차 방정식의 일반적 해법을 구하는 과정에서 밝힌 바 있다. 이처럼 그 존재와 표기 형태가 어느 정도 밝혀진 이차방정식의 복소수근에 관한 기하학적 해석을 처음으로 시도한 것은 월리스(John Wallis, 1616-1702)였다. 월리스는 문제를 다음과 같이 접근하고자 했다[34, Ch. 68]. 양수이든 음수이든 모든 수의 제곱은 양수이므로 음수의 제곱근이라는 것 자체가 무의미해 보인다. 이러한 모순은 '0보다 작은 수인 음수'에서도 마찬가지로 나타났다. 그렇지만 양수와 음수를 반대방향으로 뻗어 나가는 수직선 상의 점을 통해서 나타내면 그 모순이 해소가 된다는 것은 이미 알려진 사실이다. 그렇다면 여기서 제기되는 문제는 "허수를 어떻게 하면 가시적인 대상으로 표현할 것인가?"이다.

월리스는 이차방정식의 근이 실수이면 실직선 위에 나타내고 그렇지 않으면 실직선 밖에 있는 점으로 나타내고자 하였으나 그 기준을 찾아내지 못하여 자신의 뜻을 이루지 못하였다. 그렇지만 후세의 수학자들에게 허수의 표현에 관한 결정적인 사고의 단서를 제공했음은 틀림없는 사실이다.

복소수와 평면상의 점의 대응에 관한 생각을 분명하게 정리한 것은 노르웨이의 측지학자 베셀(Caspar Wessel, 1745-1818)로서, 그는 $\varepsilon=\sqrt{-1}$을 허직선 상의 단위선분으로 도입하였다[35].

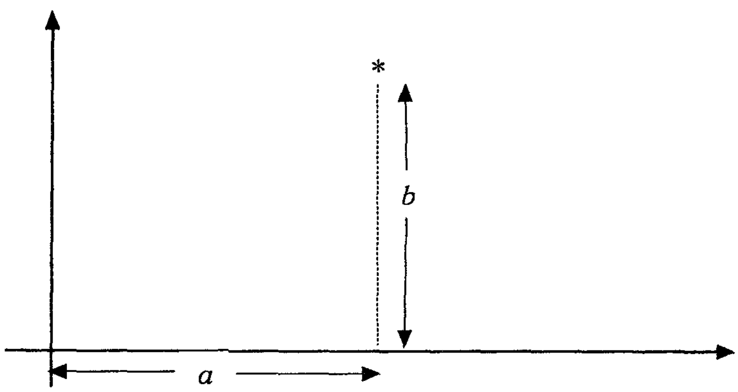
> 직선상의 양의 단위선분을 $+1$을 통해 표현하듯이 같은 원점에서 수직인 직선상의 단위선분은 ε으로 나타낸다[3, p. 316].

베셀이 이처럼 허수를 평면에 나타내는 기본적인 구상을 했지만 실제 그 방법을 보다 명확히 밝힌 것은 아르간(Jean Robert Argand, 1768-1822)이었다. 아르간은 원래의 실직선과 평행인 직선은 실수를 통해서, 실직선과 수직인 직선은 $a\sqrt{-1}$ 형태의 허수를 통해 나타낼 수 있으며, 이들 수직인 두 방향 이외의 직선은 $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ 형태의 허수를 통해서 표현할 수 있다고 주장하였다(cf. [2], [7], [22]).

대수학의 기본정리와 관련하여 허수의 위치에 관해 더욱 분명하게 생각을 밝힌 것은 가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)였다. 가우스는 복소 평면에 관한 아르간의 모델을 최초로 사용한 수학자로서 1799년 자신의 박사 학위 논문에서 '대수학의 기본정리'를 순전히 위상 수학적인 방법으로 증명하고자 하였다. 즉 이 시기에 가우스는 이미 허수를 기하학적으로 표현하려는 구상을 가지고 있었던 것으로 보인다. 가우스는 복소변수 z의 다항식 $P(z)$가 적어도 하나의 근을 가진다는 것을 보이려 하였다. 가우스는 다항식 $P(z)$를 $P(x+iy)=R(x, y)+iS(x, y)$로 나타냈는데 여기서 R과 S는 두 변수 x와 y에 관한 실다항식이며, $R=0$과 $S=0$의 교점과 다항식 $P=0$이 되도록 하는 수 $x+iy$에 대응하는 평면상의 점 (x_0, y_0)이 일치하게 된다. 1811년 가우스는 자신의 생각을 한 친구에게 보내는 편지에서 명확히 밝혔다.1)

> 모든 실수량의 전 범위를 무한 직선을 통해 나타낼 수 있는 것처럼 실수와 복소수량의 전 범위를 무한 평면을 통해, 즉 수평선$=a$, 수직선$=b$로 결정되는 각 점이 크기 $a+ib$를 나타냄으로써, 그 의미를 표현할 수 있게 된다[9, p. 367].

이 편지에서 가우스는 복소수가 실수와 똑같은 자격을 가짐을 천명했으며, 예외적인 경우를 없애기 위해 연산의 범위를 실수 크기에 한정하는 것을 비판했다. 가우스의 생각에 따라 복소수 $a+ib$를 평면의 한 점으로 나타내면 그림 1과 같다.



<그림 1>

1) 여기서 친구란 같은 시대의 수학자 Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)을 말한다.

가우스가 자신의 저서 **이차잉여류에 관한 이론**(*Theoria residuorum biquadraticorum*, 1831)에서 $a+ib$ 형태의 복소수를 상세히 설명하고 난 뒤, 복소수를 위와 같이 기하학적으로 나타내는 방식이 일반적으로 인정되었다. 1840년대 말에 이르러서는 해석학뿐만 아니라 정수론 영역에서도 복소수가 널리 도입되었는데, 위에 언급한 복소수의 기하학적 표현은 사실 해석기하의 좌표체계에 근거한 것으로 '순수' 기하학적이라고 할 수는 없는 것이었다.

2. 19세기 전반 종합기하학의 허(수)이론

해석기하학에서 복소수는 이미 일반성을 획득하였으나 그 당시 종합기하학자들은 이를 '순수' 기하학적인 도입 방식으로 여기지 않았다.[2] 즉 복소수 체계를 통해 표사되는 실질적인 도형이 존재해야만 기하학 본연의 방법으로 간주할 수 있다는 것이었다. 무엇보다도 허점(imaginary point)을 나타내는 실체를 보여주는 공간적인 도형이 있어야만 했다. 해석기하와 달리 어떤 임의의 도형도 허점이라 이름 붙일 수 있는 것이 종합기하학의 장점으로 여겨졌지만 이는 실점, 실직선, 실평면에도 일관성 있게 적용할 수 있는 원칙에 따른 것이어야 했다. 뿐만 아니라 이 원칙은 해석기하학적인 방법을 통한 결론과도 맞아떨어짐을 보일 수 있어야 했다. 19세기를 거치면서 허점(imaginary points), 허직선(imaginary lines), 허평면(imaginary plane)등 '허'원소에 관한 논의가 기하학 연구에서 상당한 정도로 진행이 되었지만 여전히 만족할 만한 해석이 가해지지는 않은 상태였다.

오늘날 많은 수학사 저서에서 19세기 기하학에서의 '허'원소의 역할을 간과하는 경향이 있으며, 이에 따르면 몽주(Gaspard Monge, 1746-1818), 퐁슬레(Victor Poncelet, 1788-1867), 제르곤(Joseph Diaz Gergonne, 1771-1859), 샤슬레(Michel Chasles, 1793-1880) 등 일군의 프랑스 기하학자들이 그리스 시대의 종합기하학을 다시 부활시킨 것처럼 묘사되어 있다. 그렇지만 실제로 이들 프랑스 기하학자들이 그 당시 발전한 대수적 해석학의 영향을 많이 받았음은 부인할 수 없는 사실이다. 예컨대 이 시기의 기하학에서 대수이론의 소거법에 근거한 '베쥬(Bezout)의 정리'의 중요성을 관찰할 수 있다. 기하학적 견지에서 이 정리는 각각 m, n차이며 기약인 두 대수곡선 C_m, 과 C_n이 정확히 $m \cdot n$개의 점에서 만난다는 것을 뜻한다.[3] 여기서 이들 교점 중 일부는 허점일 수도 있는 것이다. 이처럼 '베쥬의 정리'가 기하학적으로 의미하는 바를 퐁슬레가 1822년 자신의 저서 **도형의 사영적 성질에 관하여**(*Traite*

---

2) 종합기하학이란 도형 또는 도형의 성질 자체를 다루는 분야로 고대 그리스 유클리드 기하학이 전형적으로 이에 속한다. 대수와 해석학을 기하학에 적용한 것을 해석기하(analytic geometry)라 부르는 것에 반해서 17세기경부터 이렇게 일컫기 시작했다.

3) 원래 이 정리는 Colin Maclaurin(1698-1746)이 세웠지만, Leonhard Euler(1707-1783)와 Gabriel Cramer(1704-1752) 등 많은 수학자들이 그 증명에 실패한 뒤 Etinne Bezout(1730-1783)가 완벽하게 증명한 이래 그의 이름을 따서 불리고 있다.

*des proprietes projektives des figures)*에서 이른바 '연속성의 원리'(Principle of continuity)와 더불어 밝혀놓았다. 그에 따르면 '연속성의 원리'란 다음과 같다[26, p. 14]

> 하나의 도형이 연속적인 변환을 통해 새로운 도형으로 전환될 때 원래의 도형에서 발견된 성질이 그대로 새로운 도형에도 옮겨간다.

이 원리에 따르면 실점에서 서로 만나지 않는 두 개의 원추곡선은 두 개의 '허'할선을 공유하게 되고, 두 개의 원추곡선은 예외 없이 네 점에서 만나게 된다. 또한 어떠한 두 개의 원도 반드시 두 점에서 만나게 되는데 이를 원의 방정식을 사용한 해석적(analytic) 방법으로 설명해 보면 다음과 같다. 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

이를 제차좌표(齊次座標, homogeneous coordinate)4)를 이용하여 나타내어 보면, $\xi/\tau=x$이고 $\eta/\tau=y$일 때 다음과 같다.

$$(\xi-a\tau)^2+(\eta-b\tau)^2-r^2\tau^2=0$$

이 원과 무한원직선 $\tau=0$과의 교점은 다음과 같다.

$$\xi^2+\eta^2=0, \quad \tau=0$$

즉, 임의의 원과 무한원직선과의 교점은 $(1, i, 0)$ 및 $(1, -i, 0)$으로 나타낼 수 있으며, 이를 원의 무한원점(point of infinity)이라 일컫는다. 이처럼 퐁슬레 등이 종합기하학적인 방법론에서도 '허'원소에 대한 설명을 해석기하에서와 마찬가지로 일관성 있게 해 나갈 수 있는 기본적인 원리를 제시한 이후 어느 정도 일반성을 획득해 나갔다. 그렇지만 순수종합기하학의 엄밀한 기초를 체계적으로 세울 가능성을 비로소 보여준 독일의 기하학자 슈타이너(Jacob Steiner, 1796-1863) 조차 "기하학에서 '허'의 크기는 여전히 명확한 표상을 형성할 수 없고 다만 그 영향에 대해서만 감지할 수 있는 '유령'(Gespenster)과 같은 존재"로 여길 정도로 아직도 그 실체에 대해 순수기하학적인 연구가 제대로 이루어지지 않았다[20, p. 129].

순수종합사영기하학의 체계를 세움과 동시에 그에 입각하여 '허'이론을 세운 것은 당시에는 상대적으로 그 명성이 널리 알려지지 않았던 독일 에를랑엔(Erlangen) 대학의 수학 교수 폰 슈타우트(Karl Georg Chiristian von Staudt, 1798-1867)였다. 그는 해석기하 분야에서는 새로운 좌표체계에 근거한 설명이 일반성을 획득해 갔지만 여전히 종합기하학의 방법으로

---

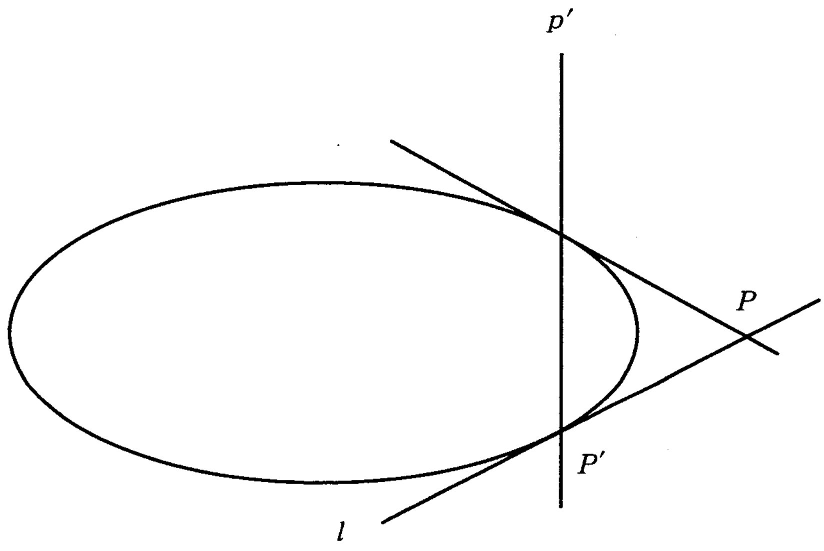
4) 동차(同次)좌표라고도 한다.

설명할 수 없는 '허'원소에 관한 이론을 완벽하게 세웠다.

3. 폰 슈타우트의 '허'이론

폰 슈타우트의 주요 저서는 위치기하학(*Geometrie der Lage,* 1847)과 그 내용을 심화, 확장시킨 세 개의 논문을 모은 위치기하학에 관한 소고(*Beitraege zur Geometrie der Lage,* 1856-1860)이다. 폰 슈타우트는 그 중 나중에 출간한 책에서 '허'이론을 전개했으나 먼저 쓴 저서 위치기하학에서 이미 '허'원소의 도입에 관한 구상은 밝혔다.

폰 슈타우트는 극체계(polar system)의 성질을 이용하여 원추곡선 위의 허점에 관한 해석을 시도하였는데 그의 구상을 요약하면 다음과 같다: 직선 l 위에 임의의 점 P가 놓여 있을 때 P에 대응하는 극선을 p'라 하고 p'와 l의 교점을 P'라 하면 극과 극선의 관계에서 P'의 극선은 P를 지나게 되고 P와 P'의 관계는 쌍대적이므로 l 위에서의 대합(involution)[5]을 형성하게 된다(그림 2 참조).



<그림 2>

5) 사영변환이 항등변환이 아니면서 역변환과 같을 때 대합이라 한다.

정의에 따르면 원추곡선 C 위의 점은 자신의 극선 위에 놓여 있는 점 P들로 구성되며 이러한 성질로 인해 C와 l의 교점의 특징이 드러난다. 특히 두 점의 쌍 (P, P')가 $P=P'$를 만족할 때 이를 'l 위에서의 대합의 기점'(fundamental points of the involution on l)이라 일컫는다. 폰 슈타우트는 여기서 P를 지나는 임의의 직선 l 위에서의 C의 극체계에서 생성되는 대합의 특성에 따라, 즉 l 위의 대합의 기점이 실점(real)인가, 허점(imaginary)인가 또는 일치(coincide)하는가에 따라 C 위의 점 P가 실점인가 허점인가로 나누고자 하였다.

폰 슈타우트의 방법을 해석적으로 구성하면 다음과 같다. $P^2(C)$에 속하는 실계수 원추곡선 C가 다음 식으로 주어진다고 하자.

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0,$$
$$A, B, C, D, E, F \in \mathrm{R}, \quad (x,y,z) \in \mathrm{C}^3-(0, 0, 0)$$

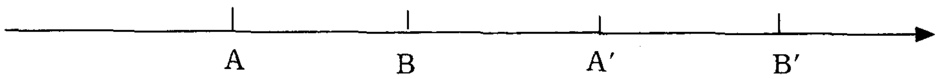
그러면 극체계는 다음과 같다.

$$Axx'+B(xy'+x'y)+Cyy'+D(xz'+x'z)+E(yz'+y'z)+Fzz'=0$$

이때, $\mathrm{P}=(x',y',z') \in l$이라면 위의 식은 극선 p'를 뜻하게 된다. 또한 다음이 성립한다.

$$l \cap p'=P \quad \Leftrightarrow \quad P \in C$$

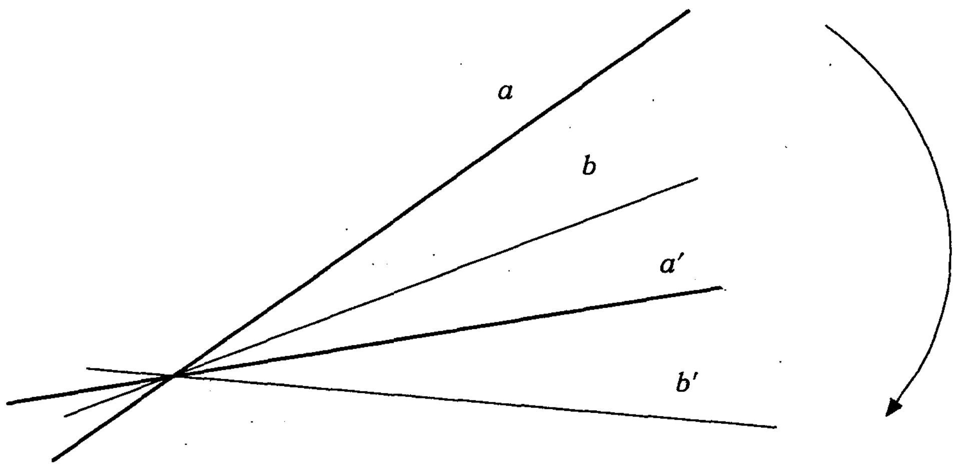
이처럼 위치기하학에서 폰 슈타우트는 원추곡선 상에서 실점과 허점을 구분하는 방법을 제시하면서 일반적인 '허'원소의 도입을 구상하였다. 위치기하학에에 관한 소고에서 폰 슈타우트는 대합(Involution)을 이용하여 '허'원소-허점, 허직선, 허평면 등-를 도입한다. 이에 따르면 이중점[6](Doppelelement, double point)이 없는 타원적 대합에 방향[7]을 주면 허원소를 나타낼 수 있는데 허점, 허직선을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



<그림 3>

그림 3에서 실직선 위의 대합이 화살표 방향으로 주어진다면 이 대합을 결정하는 두 쌍의 점 (A, A′)과 (B, B′)로 하나의 허점이 결정되며 ABA′B′로 나타낸다.

6) 사영변환에 의한 부동점을 일컫는다.
7) Orientierung; 폰 슈타우트는 이를 위해 새로운 개념 -'Sinn'- 을 도입하였다.



<그림 4>

마찬가지로 그림 4에서 실직선군의 대합이 화살표 방향으로 주어질 때 대합을 결정하는 두 쌍의 직선 (a, a')과 (b, b') 이 하나의 허직선을 결정하며 $aba'b'$로 나타낸다. 이를 다시 해석적으로 구성해 보면 다음과 같다.[8] 폰 슈타우트의 기본 구상은 두 공액허점(conjugate imaginary points) P와 $\overline{P}$를 잇는 실직선 l과 이들 두 점의 쌍을 '방향이 주어진'(oriented) l 위에서의 대합의 기점으로 삼아 고찰하는 데에서 비롯한다. 주어진 허점 P를 제차복소좌표(homogeneous complex coordinate)를 써서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\zeta=\zeta_1+i\zeta_2,\quad \eta=\eta_1+i\eta_2,\quad \tau=\tau_1+i\tau_2$$

이는 다음의 두 실점 P_1과 P_2를 결정한다.

$$P_1=(\zeta_1, \eta_1, \tau_1),\quad P_2=(\zeta_2, \eta_2, \tau_2)$$

$P_1\neq P_2$ ($P_1=P_2$라면 P는 실점이 된다)이므로 P_1, P_2는 P의 공액허점(conjugate imaginary point) $\overline{P}$를 지나는 실직선 P_1P_2를 결정한다. $\overline{P}$의 제차좌표는 다음으로 나타낼 수 있다.

$$\zeta=\zeta_1-i\zeta_2,\quad \eta=\eta_1-i\eta_2,\quad \tau=\tau_1-i\tau_2$$

---

8) 폰 슈타우트의 종합적 방법을 해석적 방법으로 구성해 낸 것은 오토 슈톨츠(Otto Stolz, 1842-1905)였다. cf. [33].

폰 슈타우트는 허점 P로 결정되는 점의 쌍 {P_1, P_2}들이 P_1P_2 위에서의 실점의 대합 I를 생성한다는 것을 보였다. I의 기점이 바로 허점 P, $\overline{P}$인 것이다. 역으로 실직선 l 위의 두 점의 쌍 P_1, P_2와 P_1', P_2'를 취하면 대합 I가 유일하게 결정된다. 여기서 I의 기점이 허점일 때 두 쌍의 점도 겹치게 되고 역으로 (P_1, P_2)=(P_1', P_2')이면 I의 기점이 허점이 된다. 그리고 이렇게 결정된 대합이 두 공액허점을 나타낼 때 P_1'과 P_2' 중 한 점은 반드시 P_1과 P_2 사이에 놓이고 다른 한 점은 그 바깥에 놓이게 된다.

주어진 점의 쌍 P_1과 P_2에 대응하는 대합 I의 다른 쌍을 매개변수 λ를 써서 나타내면 다음과 같다.

$$P_1=(\zeta_1', \eta_1', \tau_1')=(\zeta_1+\lambda\zeta_2, \eta_1+\lambda\eta_2, \tau_1+\lambda\tau_2)$$

$$P_2=(\zeta_2', \eta_2', \tau_2')=(\zeta_1-\frac{1}{\lambda}\zeta_2, \eta_1-\frac{1}{\lambda}\eta_2, \tau_1-\frac{1}{\lambda}\tau_2)$$

위에서 방향이 주어진 대합은 λ를 변화시킴에 따라 다르게 생성된다. λ를 계속해서 증가시킴으로써 나타나는 방향을 점 P에 대응시켜 나타낸다면, λ의 값을 감소시킴으로써 나타나는 방향은 점 $\overline{P}$를 나타낸다.

이러한 방법은 두 '허'직선과 한 점의 관계에서도 쌍대적으로 적용된다. 즉, 위에서 언급한 대로 사영평면에서 실직선 l의 대합은 실점을 통한 실직선군의 대합을 통해 표현되고 이를 '허'직선으로 도입한다. 여기서도 허점의 도입에서와 마찬가지로 이중선(real double rays)이 없어야 한다. 이렇게 해서 도입된 '허'원소까지 감안하면 점과 직선 사이의 결합관계(incidence relation)는 다음의 네 가지 경우에서 형성된다.

1. 실점과 실직선
2. 실점 P와 허직선 l ($P\in l \Rightarrow P\in l$ 이므로 P는 l을 나타내는 직선속의 꼭지점과 같다.)
3. 허점 P와 실직선 l (실직선 l과 허점 P를 나타내는 대합으로 생성되는 직선이 동일하다.)
4. 허점 P와 허직선 l (허점 P를 나타내는 대합으로 생성되는 직선속 l_p와 허직선 l을 나타내는 직선속은 배경적(perspective)이다.)

이러한 기본적인 구성방식을 통해 폰 슈타우트는 사영복소평면 $\mathbf{P}^2(\mathrm{C})$ 위에서의 실도형과 허도형을 구분할 수 있게 됨과 동시에 실점, 실직선, 실평면 등 '실'영역에서 성립하는 결합관계(Inzidenzrelation, incidence relation)가 '허'영역에서도 여전히 유효함을 입증하였다.

4. 클라인의 '허'이론

위에서 설명한 폰 슈타우트의 방법은 철저히 종합적(synthetic)인데다 폰 슈타우트는 자신의 저서에서 그림을 전혀 사용하지 않고 읽는 사람으로 하여금 그 표상을 직접 만들어 낼 것을 권함으로써 한층 그 이해가 쉽지 않았다. 다른 수학자들과의 교류도 거의 없었던지라 폰 슈타우트의 이론이 널리 알려지지 않은 가운데 오스트리아의 수학자 슈톨츠(Otto Stolz, 1842-1905)가 처음으로 폰 슈타우트의 '허'이론을 해석적으로 구성하였다. 슈톨츠는 1869-70년 겨울학기에 베를린(Berlin)에서 머무는 동안 클라인(Felix Klein, 1849-1925)에게 폰 슈타우트의 이론을 소개시켜 주었다.

한편 클라인은 이 무렵 노르웨이 수학자 리(Sophus Lie, 1842-1899)와 학문적 교류를 두터이 하고 있었는데, 특히 프랑스의 계량(metrical)기하학자들의 방법에 관해 깊은 관심을 공유하고 있었다. 당시 프랑스 기하학자들은 주로 평면 위에서의 원(circle)이나 공간에서의 구(sphere)를 기본 요소로 취하고 이들의 포락선(envelope)으로 나타나는 기하학적 대상을 적당한 좌표체계를 채택하여 해석하는 게 주된 연구 기조였다. 반면 대부분의 독일 기하학자들은 뫼비우스(August-Ferdinand Möbius, 1790-1868)에서 비롯하여 플뤼커(Julius Pluecker, 1801-1868)의 연구 결과를 통해 한층 심화된 직선기하학(line geometry)을 주로 연구 대상으로 삼는 풍조였는데, 리와 클라인은 프랑스와 독일의 연구 경향 사이에 직접적인 연결 고리를 찾는 데에 강한 의욕을 보였다.

원래 리는 실재하는 기하학적 구조를 가지고 허점을 해석하는 문제에 천착하였다. 그 결과로서 리가 펴 낸 최초의 논문은 사영복소평면 $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$에서의 점과 실공간 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$에서의 직선의 합동을 결합하는 내용을 담고 있다(cf. [23], [28, pp. 224-226]).

프랑스의 계량기하학에서 허원소의 구조는 오랫동안 중심 테마가 되어 왔다. 예를 들면 평면에서 모든 원(circle)에 공통인 무한원점(circular points at infinity)과 공간에서 모든 구에 공통인 대원(spherical circle)은 그 당시 기하학 연구에서 핵심적인 요소였다. 그렇지만 이들의 방법이 유클리드 기하학과 완전히 그 뿌리를 달리하는 것은 아니었다. 이미 전술(前述)한 바 있지만 퐁슬레는 계량적인 대상으로부터 적당한 변환과 '연속성의 원리'를 써서 사영적인 성질을 유도해 내었다. 샤슬레는 초점을 공유하는 원추곡선의 체계를 연구하는 데 몰두하였는데, 그로부터 무한원점 I, J에서 임의의 원추곡선에 그은 접선은 그 초점(그중 둘은 실점이고 다른 둘은 허점)에서 만난다는 성질을 밝혔다. 초점을 공유하는 원추곡선과 사영적인 개념을 결합시킨 것은 라게레(Edmond Laguerre)로서 그는 점 P에서 만나는 두 직선 l_1, l_2로 결정되는 각 Θ에 관한 공식을 다음과 같이 제시하였다.

$$\Theta(l_1,\ l_2) = \frac{1}{2i}\ \log(CR(l_1,\ l_2,\ l_I,\ l_J))$$

여기서 CR은 복비(cross ratio)를 뜻하며, l_I, l_J는 점 P에 의해서 결정되는 등방(isotropic)직선으로 점 P와 I, J를 각각 연결한 직선이다. 초점을 공유하는 두 개의 원추곡선에 공통인

점 P에서의 접선 l_1, l_2이 l_i, l_j와 조화선속을 이룬다는 것과 위의 공식으로부터 초점이 같은 원추곡선은 수직으로 만난다는 사실이 유도된다.

1860년경의 프랑스 기하학자들은 더 이상 '허'원소 때문에 곤란을 겪지 않았으며 오히려 기하학 연구를 위한 기본적인 장치의 일부 정도로 받아들이게 되었다. 그들은 '허'원소의 존재론적 실체가 어떤지에 대해서는 별 관심이 없었고 다만 적당한 허변환(imaginary transformation)을 채택하여 중요한 허구조를 보여줄 수만 있으면 된다고 여겼다. 예컨대 무한원점은 다음과 같이 $\mathbf{P}^2(\mathrm{C})$ 상에서의 변환을 채택하면 가시적인 대상으로 환원할 수 있다고 믿었다.

$$x = x', \qquad y' = iy, \qquad z' = z$$

이 변환에 따라 $x^2 + y^2 = 0$은 $x^2 - y^2 = 0$이 되고 무한허원점 $(1, \pm i, 0)$은 실점 $(1, \pm 1, 0)$으로 옮겨가는 동시에 원족(family) $\{x^2 + y^2 = r \mid r \in R\}$은 쌍곡선족 $\{x^2 - y^2 = r \mid r \in R\}$으로 옮겨간다.

이처럼 허구조의 '가시적인' 접근 방식에 리와 클라인 둘 다 매력을 느꼈으나 리는 고차복소공간기하학으로, 클라인은 실구조와 허구조의 관계를 밝히는 쪽으로 연구의 가닥을 잡았다. 클라인은 특히 비유클리드기하학의 사영적 기초를 세우는 데 폰 슈타우트의 방법을 차용하였다(cf. [12], [19]). 이미 언급한 대로 클라인은 슈톨츠에게서 처음으로 폰 슈타우트의 방법을 소개받았지만 괴팅엔(Göttingen)에서 강사로 재직할 당시 폰 슈타우트의 이론에 관해서 강의를 할 정도로 깊은 이해를 가지게 되었고 그 이론을 널리 알리는 데 기여하였다. 그의 강의를 들은 학생 중 폰 슈타우트의 허이론에 관심을 가진 린데만(Ferdinand Lindemann, 1852-1939)은 후에 클렙쉬(Alfred Clebsch, 1833-1872)와 공동으로 펴낸 강의록 기하학 강의(*Vorlesungen über Geometrie*)에서 허이론에 많은 분량을 할애하기도 하였다.

에를랑엔대학 취임 강연 "에를랑엔 프로그램"(Erlangen Programm)에서 모든 종류의 기하학을 군개념을 이용하여 정리하려는 구상을 밝힌 클라인은 정작 교수로 재직하면서는 대수기하학에서의 허원소의 역할을 구명하는 데 더 많은 힘을 쏟았다. 사영기하학을 해석적 방법으로 정리한 플뤼커의 수제자였던 클라인은 대수적 곡선의 기하학적 형상과 그와 관련된 리만곡면(Riemann surface)을 연구 대상으로 삼았다. 그리하여 (사영적) 리만곡면의 '새로운 형태'를 개발해 내었다(cf. [14], [16], [17], [18]).

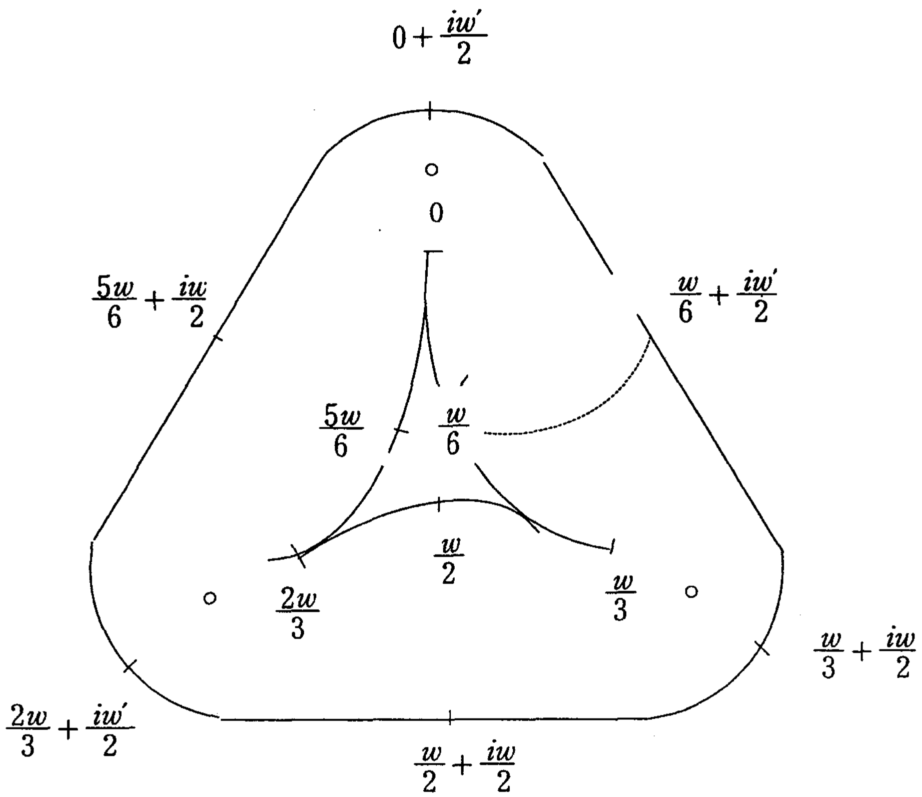
대수기하학에 리만함수를 이용할 가능성은 이미 10여년 전 클렙쉬가 제기한 바 있으나 그와는 달리 클라인은 통상 리만곡면이 대수곡선이론에 적합하지 않음을 깨닫고 대신 사영적 유사성에 주목하였다.

클라인의 기본적인 발상은 실평면 곡선 $C \subset \mathbf{P}^2(\mathrm{R})$을 그의 쌍대 C^*로 치환하는 것이었다. C^*를 C의 접선의 자취이며 C의 차수와 그 급수가 같은 곡선(class curve)로 해석하면 C에 상응하는 특징을 관찰할 수 있다. 클라인은 여기서 C^*를 사영적 리만곡면을 구성할 수 있는 틀로 삼았다. 이러한 접근 방식은 사영적 리만곡면에서 쌍대화된 곡선을 특성을 보

존한 채로 다룰 수 있는 잇점이 있다.

C_n이 n차식으로 주어진 실곡선이라면 급수(class) n인 곡선 $C*$의 허접선은 공액인 (conjugate) 점의 쌍으로 나타난다. 즉 $P \in \mathbf{P}^2(\mathrm{R})$이면 P를 지나는 $C*$의 n개의 접선 위에 있는 $2t$개의 점응 허접선으로 해석할 수 있는 것이다. 클라인은 이 $2t$개의 허접선이 점 P에서 $\mathbf{P}^2(\mathrm{C})$에 수직인 직선 위의 서로 다른 점임을 확인하였다. 점 P를 $\mathbf{P}^2(\mathrm{C})$에서 움직이면 이 $2t$개의 점이 $2t$개의 새로운 형태의 리만곡면 위를 지나게 되며 이들 $2t$개의 리만곡면은 다시 $C*$의 점들을 품게 된다.(클라인은 $C*$에 속하는 점 P에 대응하는 곡면 위의 점을 다시 P로 정의하였다.)

이러한 접근방법을 잘 볼 수 있는 예로 클라인은 두 개의 실구성성분(real components)을 가지는 비정칙삼차곡선(nonsingular cubic)을 들었다. 이 곡선은 역시 두 개의 실구성성분을 갖는 C_3*로 쌍대화시킬 수 있으며 이 곡선의 급수는 3이므로 임의의 점 $P \in \mathbf{P}^2(\mathrm{C})$에서 정확히 3개의 접선을 그을 수 있다(그림 5 참조). 이 도형 바깥이나 삼각형 모양 안쪽의 점에서 그은 접선은 모두 실접선이고 두 실성분 사이의 점에서 그은 세 개의 접선 중 하나만이 실접선이고 나머지 두 접선은 고리 모양 위에 놓여 있는 곡면 위의 두 점에 상응하는 허접선으로, 이는 곡선 C_3* 상에서 만난다. 즉 이렇게 생겨나는 곡면은 종수(genus) 1인 토러스(torus)임을 알 수 있다.



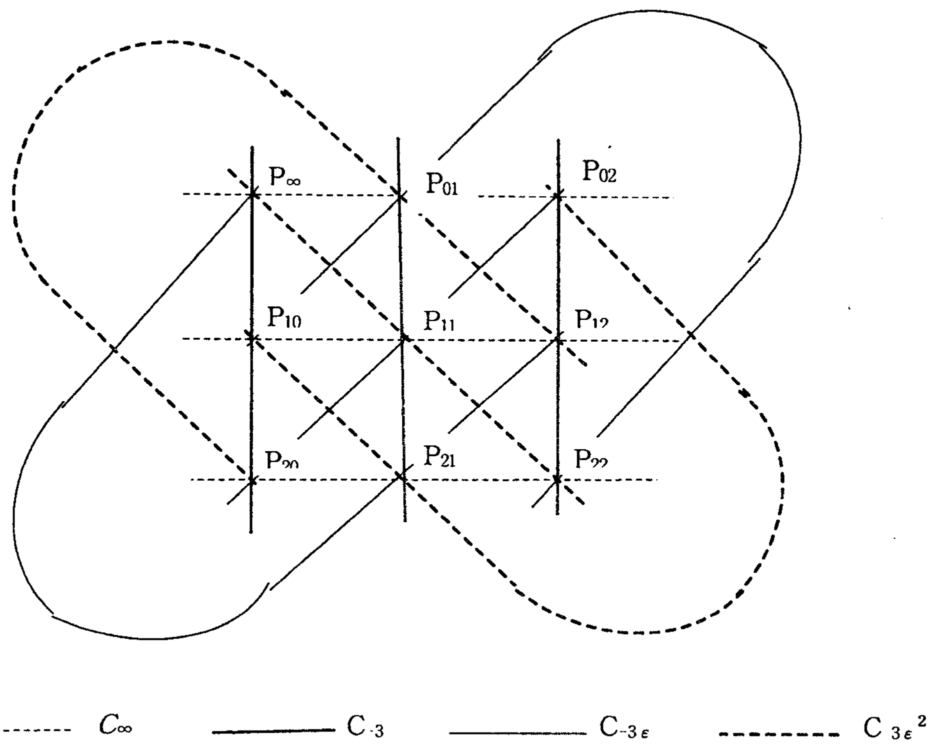
<그림 5>

클라인은 나아가 타원곡선 C_3의 변곡점과 관련해서도 허이론을 펼쳤다. 이미 헤쎄(Otto Hesse)는 $f(x_1, x_2, x_3)=0$으로 주어지는 비정칙곡선(nonsingular curve) C의 변곡점은 C와 다음과 같은 그의 Hessian의 교점으로 얻어짐을 보였다(cf. [10], [32]).

$$H_C = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 0$$

C의 차수가 n이므로 Hc의 차수는 $3(n-2)$이고, 베쥬의 정리에 따라 C는 $w=3n(n-2)$개의 변곡점을 가지게 된다. 즉 비정칙삼차곡선 C_n은 9개의 변곡점을 가진다. 세몬(George Salmon)은 이 중 기껏해야 세 점이 실점이라고 추측했으며 후에 이 추측은 맞는 것으로 드러났다. 이를 표준형으로 다시 써보면 다음과 같다.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda x_1 x_2 x_3 = 0,$$
$$C_\lambda \Leftrightarrow \lambda^3 + 27 \neq 0$$



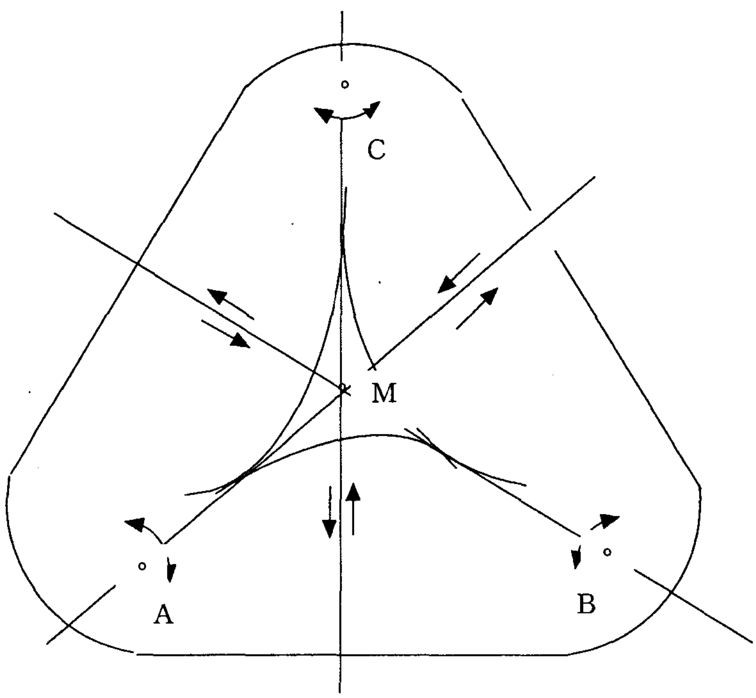
<그림 6>

헤쎄는 P^2 (C)상에서 고정된 9개의 변곡점을 결정하는 216개의 공선군(collineation, Hessian Group G_{216})을 찾아내었다. 여기서 G_{216}에 의한 변환으로 한 곡선 C_λ가 다른 한 곡선 C_λ'으로 사상될 때 이 두 곡선 C_λ, C_λ'는 사영적으로 동등하며 그 역도 성립한다.

헤쎄는 이들 9개의 변곡점과 그를 잇는 12개의 직선을 다음과 같이 도식적으로 구성하였다(그림 6 참조).

9개의 점 가운데 세 점씩 조를 이루어 각각의 직선 위에 놓이며, 12 직선 중 네 개는 각 점을 통과한다. 클라인은 이를 비정칙삼차곡선에 적용하여 9개의 변곡점에 상응하는 쌍대의 결과를 내놓았다. 즉 9개의 변곡점은 12개의 교점으로 이루어지는 9개의 정류접선(cuspidal tangent)에 대응하게 된다. 이들 9개의 접선 중 세 개씩 조를 이루어 12개의 점을 지나게 되며, 12점 중 각 4개씩 조를 이루어 9개의 접선 위에 놓이게 된다.

클라인은 C_3* 위에서 쌍대화된(dualized) 구조에서 실구조와 허구조를 구분하기 위해 폰 슈타우트의 이론을 차용하였다. 즉 12점에서 만나는 9개의 직선(정류접선)을 상정할 때 이 중 세 직선은 실직선이고 나머지 6개의 정류접선은 실직선 위의 한 점에서 만나는 공액점의 쌍으로 허직선이라는 것이다(그림 7 참조).



<그림 7>

클라인은 수학 전반에 관한 그의 탁월한 통찰력을 보여주는 저서 19세기 수학의 발전에 관한 강의(*Vorlesungen ueber die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert)*에서 폰 슈타우트의 이론을 통해 놓쳐버린 허원소의 구조를 볼 수 있다고 강조하고 있다(cf. [21, pp. 138-140]). 즉 위의 그림에서 해석을 해보면 12점은 9개의 정류접선의 교점에 의해서 결정되는데 이 중 세 직선은 실직선이고 12점 중 네 점(A, B, C, M)이 실점으로 나타난다. 6개의 허정류접선은 세 개의 실정류접선 AM, BM, CM 중 한 직선 위의 점 A, B, C 중 한 점에서 만나는 공액점의 쌍으로 나타난다. 여기서 화살표는 각 대합이 주어지는 방향을 나타내는 것이다. 이를 다시 정리해 보면 9개의 정류접선으로 결정되는 12개의 점은 다음과 같다.

1. 실점 M
2. 세 개의 실점 A, B, C (이는 하나의 실점과 두 개의 공액복소접선(complex conjugate tangents)의 교점으로 나타난다.)
3. 직선 AM, BM, CM 위에서 방향이 주어진 대합에 대응하는 6개의 허점(이는 비공액 접선의 교점으로 나타난다.)
4. 무한원직선의 대합에 의해 결정되는 두 개의 무한원점

5. 결론

19세기 기하학에서의 허이론은 크게는 해석학과 대수학의 발전에 힘입어 제기된 문제를 기하학에 적용하여 발전시킨 해석기하학에서의 내용과, 순수기하학적으로 이를 도입하여 전개시켜 나간 종합기하학 영역에서의 내용으로 나눌 수 있다. 또한 종합기하학에서의 허이론의 전개는 후에 다시 해석기하학의 방법으로도 일관성 있게 재구성할 수 있음을 보게 된다. 그 과정에서 특히 당시의 시대적인 연구정신이랄 수 있는 '방법의 순수성'을 견지하여 순전히 모든 이론체계를 종합기하학의 방법으로 구축하고자 폰 슈타우트가 기울인 노력과, 수학이 실재하는 물리적인 세계와 맺는 관계를 끊임없이 추구하고자 했던 클라인이 끝까지 기울였던 노력을 엿볼 수 있다.

19세기 후반에 이처럼 기하학의 양대 영역에서 허이론에 관한 탐구가 진행되는 한편 경험과학으로서의 기하학과 물리학이 완전히 결별하는 여러 계기를 맞게 된다.[9] 또한 20세기에 들어서 공리주의적인 이론의 구성 방식이 일반화됨으로써 실구조와 허구조 사이의 관계를 존재론적으로 탐구할 만한 동기는 사실상 사라진 셈이다.

9) 비유클리드기하학의 창시를 들 수 있으며, 리만이 물리적 표상으로서의 공간과 구분하여 기하학의 대상으로서 새로운 개념인 다양체를 도입한 것 등을 들 수 있다(cf. [27]).

참고 문헌

1. 한경혜, *Zur Geschichte der Geometrie der Lage*, Dissertation zur Erlangung des Grades "Doktor der Naturwissenschaften" am Fachbereich der Johannes Gutenberg-Universitaet, 2000, Mainz.
2. Argand, R. "Essai sur une maniere der representer les quantites imaginaires dans les constructions geometriques," 1806, *Gergonn's Annales des Mathematiques*, vol. 4(1813-1814), vol. 5(1814-1815).
3. Cantor, Moritz, *Vorlesungen ueber Geshcichte der Mathematik*, 4 vols., Leipzig, Teubner, 1880-1908.
4. Chasles, Michel, *Apercu Historique sur l'origine et le Developpement des Methodes en Geometrie,* Paris, Gauthier-Villars, 1837.
5. Clebsch, Alfred, "Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 63(1864), pp. 189-243.
6. Descartes, Rene, *Geometrie,* Ludwig Schlesinger(german), Wissenschaftliche Buch-gesellschaft, Darmstadt, 1969.
7. Coolidge, Julian Lowell, *A History of Geometrical Methods*, Oxford, Clarendon Press, 1940.
8. Freudenthal, Hans, "The Impact of von Staudt's Foundations of Geometry," *For Dirk Struik. Scientific, Historical and Political Essays in Honor of Dirk J. Struik*, ed. R. S. Cohen, J. J. Stachel, and M. W. Wartofsky (Boston Studies in the Philosophy for Science, vol.15), Boston, D. Reidel, 1974, pp. 189-200.
9. Gauss, C. F., *Werke* I-XII, Hrsg. Ges. Wiss., Goettingen, 1863-1933, Nachgedruckt, Georg Olms, Hildesheim, 1973, Bd.X.
10. Hesse, Otto, "Über die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung," *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 62(1863), pp. 199-200.
11. Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie*, (Festschrift zur Einweihungn des Göttinger Gauss-Weber Denkmals), Leipzig, Teubner, 1899.
12. Klein, Felix, "Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie," *Mathematische Annalen* (1871), pp. 573-625.
13. Klein, Felix, "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" ("Erlanger Programm"), Erlangen, Deichert, 1872.
14. Klein, Felix, "Über eine neue Art der Riemannschen Flaechen(Erste Mitteilung)," *Mathematische Annalen* 7(1874), pp. 558-566.
15. Klein, Felix, "Über den Zusammenhang der Flächen," *Mathematische Annalen* 9 (1876), pp. 476-482.

16. Klein, Felix, "Über den Verlauf der Abelsche Integrale bei den Kurven vierten Grades(Erster Aufsatz)," *Mathematische Annalen* 10(1876), pp. 365-397.
17. Klein, Felix, "Über eine neue Art der Riemannschen Flächen(Zweite Mitteilung)," *Mathematische Annalen* 10(1876), pp. 398-416.
18. Klein, Felix, "Über den Verlauf der Abelsche Integrale bei den Kurven vierten Grades(Zweiter Aufsatz)," *Mathematische Annalen* 11(1876-1877), pp. 293-305.
19. Klein, Felix, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 3. vols., Berlin, Springer, 1921-1923.
20. Klein, Felix, *Elementarmathematik vom hoeheren Standpunkte aus*, Band II, Berlin, Springer, 1926.
21. Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwickliung der Mathematik im 19 Jahrhundert*, 2. vols., Berlin, Springer, 1926-1927.
22. Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, 1972.
23. Lie, Sophus, "Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 70(1869), pp. 346-353.
24. Lindemann, Ferdinand, "Lebeserinnerungen," unpublished memoirs from ca. 1910.
25. Noether, Max, "Zur Erinnerung an Karl Georg Christian von Staudt," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereininung* 32(1923), pp. 97-119.
26. Poncelet, Victor, *Traite des proprietes projectives des figures*, Paris, 1822.
27. Riemann, Bernhard, "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (1868)," 1902, *Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematishe Werke*, ed. Heinrich Weber, pp. 272-287.
28. Rowe, David E., "The Early Geometrical Works of Sophus Lie and Felis Klein," in *The History of Modern Mathematics*, 2 vols., ed. David E. Rowe and John Mcleary, Boston, Academic Press, 1989, 1: pp. 209-273.
29. Rowe, David E., "In Search of Steiner's Ghosts: Imaginary Elements in 19-th-Century Geometry," Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Preprint-Reihe des Fachbereichs Mathematik, 1994/9.
30. von Staudt, Karl Christian, *Geometrie der Lage*, Nuernberg, Bauer & Raspe, 1847.
31. von Staudt, Karl Christian, *Beitraege zur Geometrie der Lage*, Nuernberg, Bauer & Raspe, 1856-60.
32. Steiner, Jacob, "Saetze ueber Curven zweiter und dritter Ordnung," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 32(1846), pp. 300-304.
33. Stolz, Otto, "Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie," *Mathematische Annalen*, 4(1871), pp. 416-441.

34. Wallis, John, *Algebra*, Oxford, 1685.
35. Wessel, Caspar, *Om Direkitonens analytiske Betegning*, Memoirs of Danish Academy, vol. 5, 1799.