Historia Mathematica Vol. 15, No. 1, 2002, 147-168

초평면 배열 이론과 4색 문제

한국교원대학교 수학교육과 **이기석**

한양대학교 수학과 **왕문옥**

한국교원대학교 수학교육과 **이준호**

Abstract

In this paper, we introduce the arrangement of hyperplanes and the graph theory. In particular, we explain how to study the 4-color problem by using characteristic polynomials of the arrangement of hyperplanes.

The 4-color problem was appeared in 1852 at first and Appel and Haken proved it by using computer in 1976.

The arrangement of hyperplanes induced from a graph is called a graphic arrangement. Graphic arrangement is a subarrangement of Braid arrangement. Thus the chromatic function of a graph is equal to the characteristic polynomial of a graphic arrangement. If we use this result, we can apply the theory of the arrangement of hyperplanes to the study for the chromatic functions.

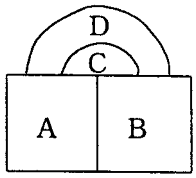
0. 4색 문제의 역사

1852년 10월 23일, 영국 런던의 University College의 교수인 Augustus De Morgan은 동료 교수인 William Hamilton에게 다음과 같은 편지를 보냈다. "오늘 나의 학생이 나에게 다음과 같은 질문을 했다. 즉, 경계선을 일부라도 공유하는 (인접한) 국가는 다른 색을 칠하도록 할 때, 지도의 모양에 관계없이 네 가지의 색이면 충분한 것 같다. 이것은 사실인 것 같은데 아직 증명하지 못했다." 나중에 이 문제는 4색 추측(4-color conjecture)라 불려지고 유명한 문제가 되었다.

그러나 당시에 Hamilton은 별로 흥미를 느끼지 않았다. 이 문제를 De Morgan에게 질문한 학생은 Frederick Guthrie인데, 실제로 이 문제를 처음 제기한 사람은 그의 형제인 Francis Guthrie라고 한다.

이제 4색 문제(4-color problem)를 좀 더 자세히 살펴보자.

그림 0.1에서 보는 바와 같이, 일반적인 지도를 색칠하려면 적어도 네 가지 색이 필요함을 쉽게 알 수 있다. 그러나 "인접한" 국가의 의미는 꼭지점을 공유하는 국가로 해석해서는 안 된다.



A,B,C,D는 색깔이다.

그림 0.1

그림 0.2에서 보는 바와 같이, 꼭지점만을 공유해도 다른 색을 칠해야 한다면 5색 이상이 필요한 경우를 쉽게 만들 수 있다. 그리고 (옛날의 파키스탄과 같이) 한 국가가 두 개 이상의 분리된 영토를 갖는 경우도 제외해야 한다.

그림 0.3은 이런 경우에 5색 이상이 필요함을 보여주고 있다.

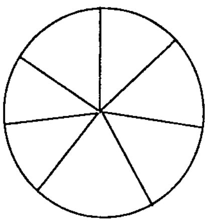


그림 0.2

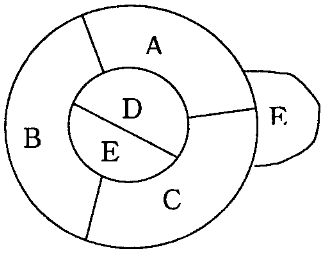


그림 0.3

De Morgan 이후에 Cayley는 이 문제가 널리 알려지는데 크게 공헌하였다. 그는 1878년 영국 런던 수학회에서 4색 문제를 제시하고 이에 따른 여러 부수적인 문제들을 논의하였다. 얼마 후에 런던 수학회 회원이고 법률가인 A. Kempe는 4색 문제의 증명을 논문으로 제출하였다. 이 논문은 열광적인 찬사를 받았고 Kempe는 Royal Society의 특별연구원으로 선출되었다. 그 후 4색 문제는 수학적으로 증명된 사실로 받아들여지고 이를 근거로 연구가 계속되었다.

그러나 1890년, Heawood는 Kempe의 증명에서 치명적인 오류를 발견하였다. 그래서 4색 문제의 증명을 위한 노력이 다시 시작되었는데, Kempe의 아이디어가 매우 중요한 역할을 하게 된다.

1. 서론

초평면 배열은 어떤 체 K 위의 유한 차원 벡터공간의 부분공간(codimension)들의 유한 집합이다. 배열 A의 각각의 초평면들은 선형 다항식으로 정의할 수 있다.

A를 배열이라 하고, $H \in A$를 초평면이라 하자. 그러면 $A' = A - \{H\}$를 제거된 배열(deleted arrangement)이라 부른다. $A'' = \{K \cap H \mid K \in A'\}$으로 정의되는 H 안의 배열을 제한된 배열(restricted arrangement)이라고 부른다.

Zaslavsky는 A의 원소들의 교집합들의 집합 $L(A)$ 위에 역 포함관계(reverse inclusion)에 의한 반순서를 정의했다. 그리고 Möbius 함수를 이용하여 푸앙카레 다항식을 정의하였다. 그는 푸앙카레 다항식 $\pi(A, t)$를 이용하여, 특성다항식 $\chi(A, t)$에 대한 다음의 재귀적인 성질을 증명했다.

$$\pi(A, t) = \pi(A', t) + t\pi(A'', t),$$
$$\chi(A, t) = \chi(A', t) - \chi(A'', t)$$

이 성질은 그래프 이론에서 이용되는 제거, 축소의 방법과 근본적으로 동등하다. 이 때문에 그래프의 색채함수는 그래프 배열의 특성 다항식과 같게 된다.

2. 초평면 배열

2.1 정의와 예제

K는 체(field)이고, V는 K 위의 l-차원 벡터공간이라고 하자.

정의 2.1 초평면 H는 V의 $(l-1)$-차원 부분공간이다. V의 배열 A는 초평면들의 유한 집합이다.

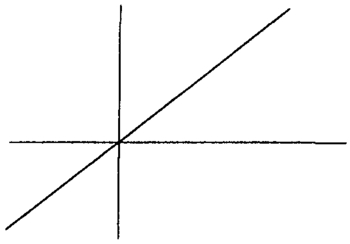
V^*를 V의 쌍대공간이라 하고 $x_1, \cdots, x_l$을 V^*의 기저라 하자. $S = S(V^*)$를 대칭 대수(symmetric algebra)라 하면, $S = K[x_1, \cdots, x_l]$이다.

V의 초평면 H에 대하여, $H = \ker \alpha_H$를 만족하는 $\alpha_H = a_1x_1 + \cdots + a_lx_l$ ($a_i \in K$)가 유일하게(up to constant multiple) 존재한다.

$Q = Q(A) = \Pi_{H \in A}\, \alpha_H$를 배열 A에 대한 다항식이라 부른다.

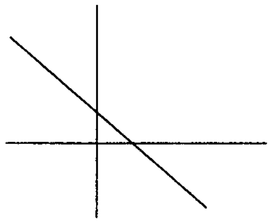
A의 모든 초평면이 원점을 품는 경우, A를 중심(central)배열이라고 하고 그렇지 않은 경우에 A를 아핀(affine)배열이라고 한다.

예제 2.2 $Q(A) = xy(x-y)$은 원점을 지나는 세 개의 직선들로 구성된다.



여기에서 $A=\{H_1, H_2, H_3\}$,
$H_1=\ker x$,
$H_2=\ker y$,
$H_3=\ker(x-y)$,
$K=R$, $V=R^2$

예제 2.3 $Q(A)=xy(x+y-1)$은 다음과 같은 아핀배열이다.



여기에서 $A=\{H_1, H_2, H_3\}$,
$H_1=\ker x$,
$H_2=\ker y$,
$H_3=\ker(x+y-1)$,
$K=R$, $V=R^2$

예제 2.4 $Q(A)=x_1x_2\cdots x_l$으로 정의된 배열을 Boolean 배열이라 한다.

예제 2.5 $1\le i<j\le l$에 대하여, $Q(A)=\Pi_{1\le i<j\le l}(x_i-x_j)$ 으로 정의된 배열을 Braid 배열이라 한다.

$A=\{H_{ij}\mid H_{ij}=\ker(x_i-x_j),\ i<j\}$

예를 들어, $K=R$, $V=R^3$에 대하여 생각해보자.
$Q(A)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$, $A=\{H_{12}, H_{13}, H_{23}\}$

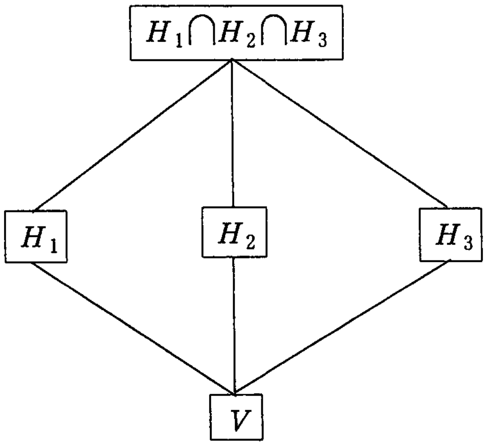
정의 2.6 $T(A):=\bigcap_{H\in A}H$

정의 2.7 A 안의 초평면의 수, 즉 A의 원소의 개수를 $|A|$로 표시한다.

정의 2.8 A를 배열이라 하고 $L=L(A)$를 A의 원소의 교집합들의 집합이라 하자. L 위의 반순서를 다음과 같이 정의한다.

$X\le Y \Leftrightarrow Y\subseteq X$

위의 예제에서 $Q(A)=xy(x-y)$의 $L(A)$는 다음과 같다.



정의 2.9 $X \in L(A)$에 대해서 $r(X)$는 V 안의 X의 여차원(codimension)이다. 즉 V가 l차원이고 X가 n차원이면 $r(X) = l - n$이다.

정의 2.10 $r(A) := r(T(A))$

정의 2.11 $X \in L(A)$에 대하여, 우리는 새로운 두 배열을 정의한다.

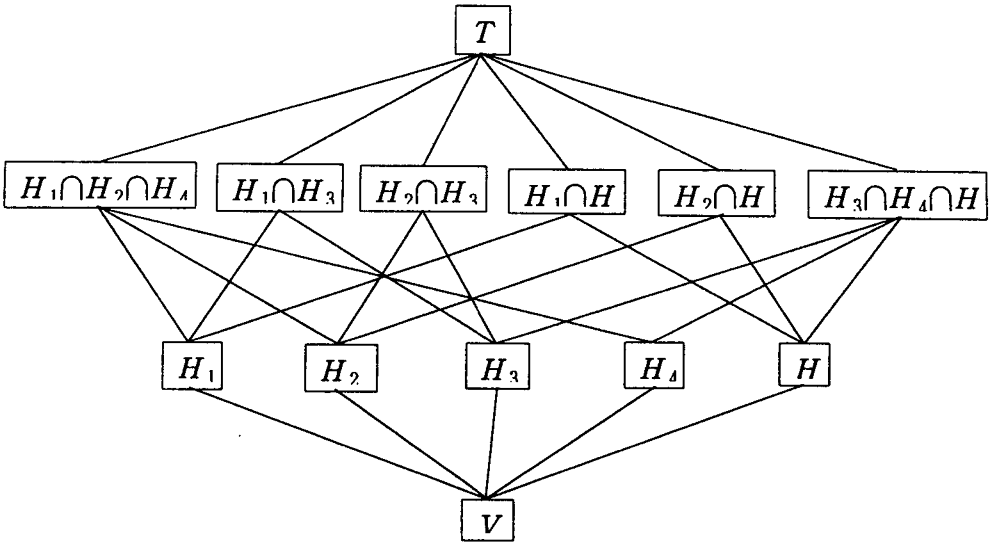
$$A_X = \{H \in A \mid X \subset H\}, \quad A^X = \{X \cap H \mid H \in A - A_X\}$$

정의 2.12 $H \in A$에 대하여, $A' = A - \{H\}$, $A'' = A^H$라 하자. (A, A', A'')를 배열의 triple이라고 하고 H를 구분된(distinguished) 초평면이라고 부른다.

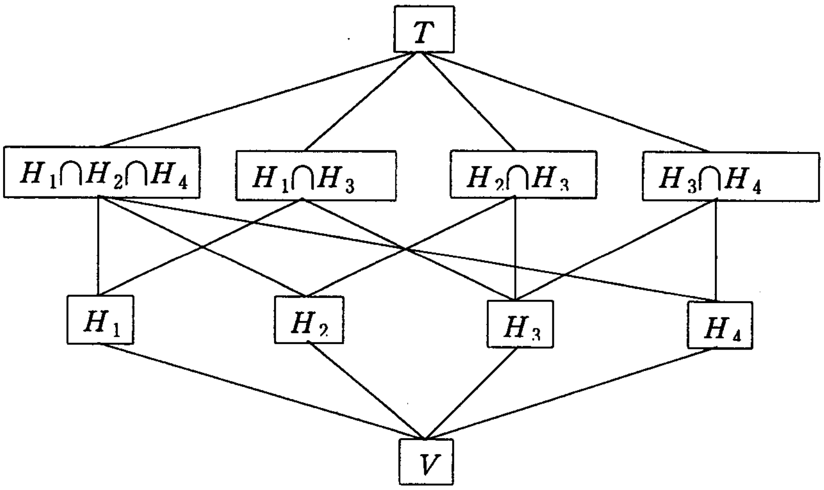
A'은 l-차원 배열이지만 A''은 $(l-1)$-차원 배열이 된다. 만약 H가 구분된 초평면이라면, $Q(A') = Q(A)/\alpha_H$이고, 모든 $\alpha_{K \cap H}$에 대해서, $Q(A'') = \prod_{K \neq H} \alpha_{K \cap H}$이다.

예를 들어, $Q(A) = xyz(x+y)(x+y-z)$, $\alpha_H = x+y-z$라 하면 $Q(A') = xyz(x+y)$ $Q(A'') = xy(x+y)$이다.

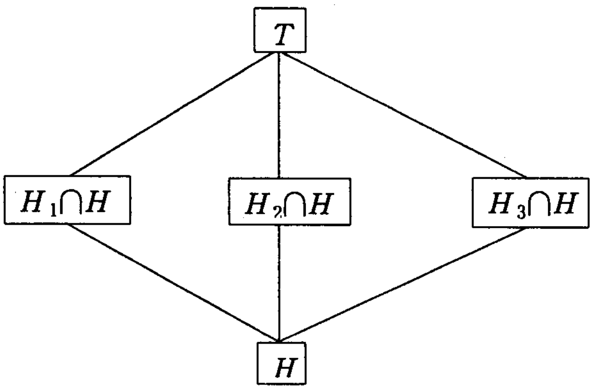
$L(A)$는 다음과 같다.



$L(A')$는 다음과 같다.



$L(A'')$는 다음과 같다.



정의 2.13 $L=L(A)$ 위의 Möbius 함수 $\mu_A=\mu: L\times L\rightarrow Z$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mu(X, X)=1 \quad \text{if } X\in L$$
$$\sum_{X\le Z\le Y}\mu(X, Z)=0 \quad \text{if } X, Y, Z\in L \text{ and } X<Y$$
$$\mu(X, Y)=0 \quad \text{otherwis}$$

즉, 고정된 X에 대해서 $\mu(X, Y)$는 재귀적으로 계산되어진다. 만약 ν가 μ와 같은 성질을 갖는 임의의 함수라면, $\nu=\mu$이다. 즉 Möbius 함수는 유일하게 결정된다.

정의 2.14 $X\in L$에 대해서 $\mu(X)=\mu(V, X)$로 정의한다.

정의 2.15 A를 $L(A)$와 Möbius μ를 갖는 배열이라 하고, t를 부정원이라 하자. A의 **푸앙카레** 다항식을 다음과 같이 정의한다.

$$\pi(A, t)=\sum_{X\in L(A)}\mu(X)(-t)^{r(X)}$$

예제 2.16 A가 공집합이면, $\pi(A, t)=1$이다. 예제 2.2의 푸앙카레 다항식은 다음과 같다.

$$\pi(A, t)=1+3t+2t^2=(1+t)(1+t)$$

2.2 초평면의 특성다항식

정의 2.17 A의 특성 다항식을 다음과 같이 정의한다.

$$\chi(A, t)=t^l\pi(A, -t^{-1})=\sum_{X\in L}\mu(X)t^{\dim(X)}$$

앞의 예제 $Q(A)=xyz(x+y)(x+y-z)$, $Q(A')=xyz(x+y)$, $Q(A'')=xy(x+y)$에 대해서 생각해 보자.

$L(A)$, $L(A')$, $L(A'')$를 참고하여 푸앙카레 다항식을 구하면 다음과 같다.

$$\pi(A, t)=1+5t+8t^2+4t^3,$$
$$\pi(A', t)=1+4t+5t^2+2t^3,$$
$$\pi(A'', t)=1+3t+2t^2$$

특성 다항식은 다음과 같다.

$$\chi(A, t)=t^3-5t^2+8t-4,$$

$$\chi(A',\ t)=t^3-4t^2+5t-2,$$
$$\chi(A'',\ t)=t^2-3t+2$$

보조정리 2.18 A를 배열이라 하자. $X\le Y$인 $X, Y\in L$에 대하여, $S(X,\ Y)$를 $A_X\subseteq B$와 $T(B)=Y$를 만족하는 중심(central) 부분 배열 $B\subseteq A$들의 집합이라 하자. 그러면 다음을 만족한다.

$$\mu(X,\ Y)=\sum_{B\in S(X,\ Y)}(-1)^{|B-A_X|}$$

증명. 주어진 식의 오른쪽 항을 $\nu(X,\ Y)$라 하자. 다음 관계를 생각하자.

$$\bigcup_{X\le Z\le Y}S(X,\ Z)=\{B\subseteq A\mid A_X\subseteq B\subseteq A_Y\}$$

여기서 그 합집합은 서로 소(disjoint)이다. 따라서 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sum_{X\le Z\le Y}\nu(X,\ Z)&=\sum_{A_X\subseteq B\subseteq A_Y}(-1)^{|B-A_X|}\\&=\sum_{C}(-1)^{|C|}\\&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_nC_r\end{aligned}$$

세 번째 합은 A_Y-A_X의 모든 부분 집합들의 합이다. $n=|A_Y-A_X|$. 만약 $X=Y$이면, 그 합은 1이다. 만약 $X<Y$이면, A_X는 A_Y의 진 부분 집합이 되어서 그 합은 0이다. ■

보조정리 2.19 A를 배열이라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\pi(A,\ t)=\sum_{B\subseteq A}(-1)^{|B|}(-t)^{r(B)}$$

여기에서 그 합은 A의 모든 중심 부분 배열 B 의 합이다.

증명. $S(X)=S(V,X)$라 하자. 그러면 보조정리 2.18로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\pi(A,\ t)&=\sum_{X\in L}\mu(X)(-t)^{r(X)}\\&=\sum_{X\in L}\Big(\sum_{B\in S(X)}(-1)^{|B|}(-t)^{r(X)}\Big)\\&=\sum_{B\subseteq A}(-1)^{|B|}(-t)^{r(X)}\end{aligned}$$

만약 $B\in S(X)$이면, $T(B)=X$가 되어서 $r(B)=r(X)$이다. A의 모든 중심 부분 배열 B은 유일한 $S(X)$에서 나타나기 때문이다. ■

정리 2.20 (제거(deletion)-제한(restriction)) (A, A', A'')를 triple이라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\pi(A, t) = \pi(A', t) + t\pi(A'', t)$$

증명. 우리는 보조정리 2.18의 공식을 이용한다.

$$\pi(A, t) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|} (-t)^{r(B)}$$

여기에서 그 합은 A의 모든 중심 부분 배열 B 의 합이다.

$H = H_0$를 구분된 초-평면이라 하자. A의 중심 부분 배열 B의 합을 다음 두 가지 경우로 나누어 생각하자.

R'은 H를 포함하지 않는 B들의 합이다.

R''는 H를 포함하는 B들의 합이다.

보조정리 2.19로부터 다음을 얻는다.

$$R' = \pi(A', t) = \sum_{B \subseteq A'} (-1)^{|B|} (-t)^{r(B)}$$

R''를 계산하기 위해서 보조정리 2.18의 $S(X, Y)$의 정의를 사용하자. $H \in B$이고 $A_H \subseteq B$이기 때문에 $T(B) = Y$라면 $B \in S(H, Y)$이다. $L'' = L(A'')$라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
R'' &= \sum_{H \in B \subseteq A} (-1)^{|B|} (-t)^{r(B)} \\
&= \sum_{Y \in L''} \sum_{B \subseteq S(H, Y)} (-1)^{|B|} (-t)^{r(Y)} \\
&= -\sum_{Y \in L''} \sum_{B \subseteq S(H, Y)} (-1)^{|B - A_H|} (-t)^{r(Y)} \\
&= -\sum_{Y \in L''} \mu(H, Y)(-t)^{r(B)} \\
&= t\pi(A'', t)
\end{aligned}$$

마지막 등식까지는 보조정리 2.18에 의해서이다. 마지막 등식은 L''의 Möbius μ''는 μ의 축소이어서 $\mu''(Y) = \mu(H, Y)$이고 $r(Y) = r''(Y) + 1$이기 때문이다. ■

따름정리 2.21 (A, A', A'')를 triple이라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\chi(A, t) = \chi(A', t) - \chi(A'', t)$$

3. 그래프 배열

정의 3.1 ν를 꼭지점들의 집합, ε을 꼭지점을 연결하는 선들의 집합이라 하자. **그래프** $G=(\nu, \varepsilon)$는 다음을 만족하는 ν와 ε으로 구성된 순서쌍이다.

(1) ν는 유한 집합이다.

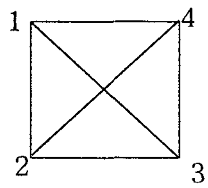
(2) ε은 ν의 두 원소를 갖는 부분집합들의 모임이다.

간단하게 $\nu=\{1, 2, \cdots, l\}$, $e\in\varepsilon$ 에 대하여 $e=\{i, j\}$로 사용한다.

양 끝점이 $i=j$인 edge를 **loop**이라고 한다. 어떤 edge들에 대해서 각 edge들의 끝점들의 쌍이 같다면 그러한 edge들을 **다중(multiple) edge**라고 한다. 그래프 G가 loop와 다중 edge를 갖고 있지 않다면 **단순 그래프**라고 한다. **경로**는 모든 $2\le i\le n$에 대하여 $\{v_{i-1}, v_i\}$가 edge가 되는 꼭지점들 $v_1, \cdots, v_2$의 집합이다. 특히 $u=v_1, \cdots, v_n=v$를 u, v-경로라고 하고, $v_1=v_n$인 경로를 **cycle**이라고 한다.

G가 단순그래프일 때, 우리는 그래프 G에 대응하는 그래프 배열 $A(G)$를 만들 수 있다. G를 단순그래프라고 하고 $A(G)$를 그래프에 대응하는 그래프 배열이라 하자. 대응 $G\mapsto A(G)$는 유한 개의 단순 그래프의 집합에서 초평면 배열의 집합으로 가는 사상을 준다. 이 사상은 초평면 배열이론의 결과를 그래프이론에 "끌어당김(pull back)"으로 사용할 수 있게 한다.

예제 3.2 ε이 ν의 두 원소를 갖는 모든 부분집합들의 모임이면 그래프 G를 **complete**그래프라 한다. 예를 들어, $\nu=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 $\varepsilon=\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$이면 그래프 G는 complete 그래프이다.



정의 3.3 K를 체라 하고, $V=K^l$이라 하자. $x_1, \cdots, x_l$를 쌍대공간 V^*의 기저라 하자. 주어진 그래프 $G=(\nu, \varepsilon)$에 대하여, **그래프 배열(graphic arrangement)** $A(G)$를 다음과 같이 정의한다.

$$A(G)=\{\ker(x_i-x_j) \mid \{i, j\}\in\varepsilon\}$$

예제 3.4 G를 complete 그래프라 하자. 그러면 그래프 배열은 다음과 같다.

$$Q(A(G))=\Pi_{1\le i<j\le l}(x_i-x_j)$$

이 경우에, $A(G)$는 Braid 배열과 같다.

정의 3.5 C는 위수 n의 유한 집합이다. $G=(\nu, \varepsilon)$를 그래프라 하자. C에 의한 G의 **coloring**은 각각의 $\{i, j\}\in\varepsilon$에 대하여 $\varphi(i)\neq\varphi(j)$를 만족하는 사상 $\varphi: \nu\rightarrow C$ 이다.

정의 3.6 $G=(\nu, \varepsilon)$를 그래프라 하자. **색채함수(chromatic function)** $\chi(G, t)$는 음이 아닌 정수에서 정의된 다음과 같은 함수이다.

$\chi(G, t)=t$가지 색깔이 주어진 경우, G를 coloring할 수 있는 경우의 수.

예제 3.7 G를 꼭지점 l개를 갖는 complete 그래프라 하자. 그러면 첫 번째 꼭지점에 t가지 색칠할 방법이 있고, 두 번째는 $(t-1)$가지, 다음은 $(t-2)$가지, 이를 계속하면 다음을 얻는다.

$$\chi(G, t)=t(t-1)(t-2)\cdots(t-l+1)$$

정의 3.8 $G=(\nu, \varepsilon)$, $\nu=\{1, 2, \cdots, l\}$, $\varepsilon\neq\emptyset$라 하고 $e_0=\{i, j\}\in\varepsilon$를 고정시키자. G의 e_0에 관한 **제거(deletion)** $G'=(\nu', \varepsilon')$를 다음과 같이 정의한다.

$$\nu'=\nu, \quad \varepsilon'=\varepsilon-\{e_0\}$$

G의 e_0에 관한 **축소(contraction)** G''는 그래프 $G''=(\nu'', \varepsilon'')$이다. 여기서 ν''는 ν에서 i와 j를 동일시하여 얻어진 $l-1$개의 꼭지점의 집합이다.

$\nu''=\{\overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{l}\}$라 쓰고 $\overline{p}=\overline{q}$이면 그리고 이때에만 $p=q$ 또는 $\{p, q\}=\{i, j\}$이다. ε''는 $\varepsilon''=\{\{\overline{p}, \overline{q}\}\mid\{p, q\}\in\varepsilon'\}$로 정의한다.

정리 3.9 $G=(\nu, \varepsilon)$를 $\varepsilon\neq\emptyset$인 그래프라 하자. G'와 G''를 e_0에 관한 제거와 축소(deletion and contraction)라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\chi(G', t)=\chi(G, t)+\chi(G'', t)$$

증명. $e_0=\{1, 2\}$라 가정하자. G의 coloring은 G'의 coloring이 된다. 또한 G의 모든 coloring의 집합 S에서 G'의 모든 coloring의 집합 T로의 일대일 함수가 존재한다.

사상 $f: S\rightarrow T$를 $f(\varphi)=\varphi$로 정의하자. f는 일대일이다.

$U=\{\varphi\in G'\mid\varphi(1)=\varphi(2)\}$라고 하자. U의 원소들은 G에서는 coloring이 아니지만, G'에서는 coloring이다. 그러면 $T-f(S)=U$가 된다.

$V=\{\varphi\in G''\}$라고 하자. 여기에서 φ는 e_0에 관한 G''의 coloring이다.

사상 $g : U \to V$를 $g(\varphi) = \varphi$로 정의하면, g는 일대일 대응이다.

따라서 $\chi(G', t) = \chi(G, t) + \chi(G'', t)$이다. ■

정리 3.10 G를 e_0를 갖는 그래프라 하자. G'와 G''를 e_0에 관한 제거와 축소라고 하자. $H_0 \in A(G)$를 e_0에 대응하는 초-평면이라 하자. $A = A(G)$라 쓰고 A'와 A''를 H_0에 관한 제거와 제한이라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$A(G') = A', \quad A(G'') = A''$$

증명. $e_0 = \{1, 2\}$라고 가정하자. 그러면 $H_0 = \ker(x_1 - x_2)$이다. 명백히 다음이 성립한다.

$$A(G') = A(G) - \{H_0\} = A'$$

G''의 꼭지점의 집합을 $\{\bar{1} = \bar{2}, \bar{3}, \cdots, \bar{l}\}$로 쓰자. K^{l-1}의 대응하는 쌍대공간의 기저를 $\overline{x_1} = \overline{x_2}, \overline{x_3}, \cdots, \overline{x_l}$이라 하자. 그러면 당연히 H_0의 쌍대공간 H_0^*의 기저가 된다. 그리고 우리는 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} A(G'') &= \{\ker(\overline{x_i} - \overline{x_j}) \mid \{\bar{i}, \bar{j}\} \in \varepsilon''\} \\ &= \{\ker(\overline{x_i} - \overline{x_j}) \mid \{\bar{i}, \bar{j}\} \in \varepsilon'\} \\ &= \{\ker(\overline{x_i} - \overline{x_j}) \mid \ker(x_i - x_j) \in A'\} = A'' \quad ■ \end{aligned}$$

4. 특성 다항식과 색채함수

4.1 세기 함수(counting function)

임의의 실수체 위의 배열의 초평면의 여공간은 chamber로 구성된다. 공집합 배열에서 $|C(A)|$와 $\pi(A, 1)$은 같고, 또한 제거와 제한(deletion and restriction)에 대하여 같은 재귀적인 성질을 만족한다. 이것은 Zaslavsky의 아름다운 결과를 증명한다.

$$|C(A)| = \pi(A, 1).$$

만약 그래프 이론의 의미를 배열 $A(G)$의 chamber의 수 $|C(A(G))|$에서 생각하면 (-1)색깔 정리라 불리는 다음 결과를 얻을 수 있다.

G의 acyclic orientation의 수는 $(-1)^l\chi(G, -1)$와 같다.

배열 A을 실수체 위의 배열이라고 가정하자. Zaslavsky는 chamber의 수는 다음과 같이 푸앙카레 다항식에 의해서 결정된다는 것을 보였다.

정리 4.1 (Zaslavsky) A를 실수체 위의 배열이라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$|C(A)| = \pi(A, 1) = (-1)^l \chi(A, -1)$$

증명. P를 $C(A')$ 안에서 구분된 초평면 H와 만나는 chamber들의 집합이라 하자. Q를 $C(A')$ 안에서 구분된 초평면 H와 만나지 않는 chamber들의 집합이라 하자. 분명히 다음이 성립한다.

$$|C(A')| = |P| + |Q|$$

H는 P의 각각의 chamber들을 $C(A)$의 두 chamber로 나누고 Q의 chamber들은 변화시키지 않는다. 따라서 다음이 성립한다.

$$|C(A)| = 2|P| + |Q|$$

그리고 $C \to C \cap H$로 주어진 P와 $C(A'')$ 사이의 일대일 대응이 존재한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$|C(A'')| = |P|$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} |C(A)| &= 2|P| + |Q| \\ &= |P| + |Q| + |P| \\ &= |C(A')| + |C(A'')| \end{aligned}$$

이제, 배열 A을 공집합이라 하면, $|C(A)| = 1 = \pi(A, 1)$ 이다. 만약 배열 A이 공집합이 아니면 귀납법에 의해서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |C(A)| &= |C(A')| + |C(A'')| \\ &= \pi(A', 1) + \pi(A'', 1) \\ &= \pi(A, 1) \end{aligned}$$

또한 $\pi(A, 1) = (-1)^l \chi(A, -1)$이다. ■

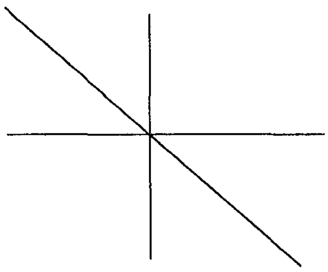
예를 들어, $Q(A) = xy(x+y)$에 대해서 확인을 해보면 다음과 같다.

$\pi(A, t) = 1 + 3t + 2t^2$,

$\chi(A, t) = t^2 - 3t + 2$,

$\pi(A, 1) = 6 = (-1)^2 \chi(A, -1)$,

$|C(A)| = 6$



4.2 동등(Equality)

초평면 배열이론에서 특성다항식을 표시하는 문자로 χ가 쓰이는데, χ는 그래프이론에서 색채함수를 표시하는 문자로 이용된다. 그런데 흥미롭게도 두 다항식은 일치한다. 배열에 대한 Zaslavsky의 chamber counting 정리는 그래프에 대한 acyclic orientation의 수를 결정하는 Stanley의 (-1)색깔 정리로 전환될 수 있다. 그리고 배열 $A(G)$의 특성 다항식은 그래프 G의 색채함수와 같다.

정리 4.2 G를 그래프라 하고, $A(G)$를 그래프 배열이라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\chi(G,\ t) = \chi(A(G),\ t)$$

증명. G의 edge의 수에 대한 귀납법을 사용하여 증명하자.

만약 G가 edge를 갖고 있지 않다면, $\chi(G,\ t) = t^l = \chi(A(G),\ t)$ 이다. 귀납법은 정리 3.9, 정리 3.10과 따름정리 2.22에 의해서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\chi(G,\ t) &= \chi(G',\ t) - \chi(G'',\ t)\\ &= \chi(A(G'),\ t) - \chi(A(G''),\ t)\\ &= \chi(A',\ t) - \chi(A'',\ t)\\ &= \chi(A,\ t)\end{aligned}$$

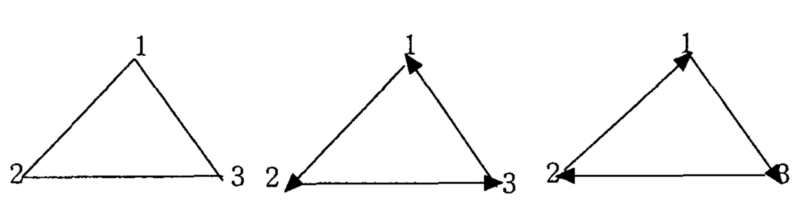
여기서 두 번째 등식은 귀납법의 가정이다. ■

따름정리 4.3 A가 실수체 위의 초평면 배열이라고 하자. 그래프 배열 $A(G)$의 chamber의 수는 $(-1)^l\chi(G,\ -1)$이다.

정의 4.4 G는 그래프이다. G의 방향(orientation)은 각각의 $e=\{i,\ j\}\in\varepsilon$에 방향을 주는 함수이다. $i\rightarrow j$ 또는 $j\rightarrow i$ 로 나타낸다.

만약 한 바퀴 순환하는 방향(cycle)이 없으면 그 방향을 acyclic 이라고 한다.

예를 들면, 다음과 같은 그래프를 생각하면 cycle은 두 가지가 있다.



보조정리 4.5 G를 그래프라 하자. $AO(G)$를 G의 모든 acyclic orientation의 집합이라고 하자. $A=A(G)$라고 하자. 그러면 일대일 대응 사상 $\phi: AO(G) \to C(A)$가 존재한다.

증명. $w \in AO(G)$라고 하자. 각각의 $i \in \nu$에 대해서 $p_i(w)$를 꼭지점 i에서 그 orientation의 방향으로 도달할 수 있는 꼭지점들의 수라고 하자.

점 $p(w)=(p_1(w), \cdots, p_l(w)) \in R^l$을 고려해보자. $\{i, j\} \in \varepsilon$이라 하자. 반-공간(half spaces)를 다음과 같이 정의하자.

$$H_{ij}^+ = \{(x_1, \cdots, x_l) \in R^l \mid x_i > x_j\}$$

$$H_{ij}^- = \{(x_1, \cdots, x_l) \in R^l \mid x_i < x_j\}$$

만약 $i \to j$라면, j에서 도달할 수 있는 모든 꼭지점은 i에서도 도달할 수 있다. 따라서 $p_i(w) \geq p_j(w)$이다. orientation이 acyclic이므로 j에서 i로 도달할 수는 없다. 따라서 우리는 다음 관계를 얻는다.

$$i \to j \text{ in } w \Leftrightarrow p_i(w) > p_j(w) \Leftrightarrow p(w) \in H_{ij}^+,$$

$$j \to i \text{ in } w \Leftrightarrow p_j(w) > p_i(w) \Leftrightarrow p(w) \in H_{ij}^-$$

따라서 $p(w) \notin \ker(x_i - x_j)$이다. 또한 $p(w) \in M(A) = R^l - \bigcup_{H \in A} H$이고 $p(w)$를 포함하는 chamber $C(w) \in C(A)$가 유일하게 존재한다. 사실, 각각의 $1 \leq i < j \leq l$와 각각의 $p_i(w)$와 $p_j(w)$에 대해서 H_{ij}^+ 또는 H_{ij}^-가 결정된다. 결과적으로, $C(w) = \bigcap V$이다. 여기에서 V는 각각의 i, j에 대한 H_{ij}^+ 또는 H_{ij}^-이다. 즉, 각각의 $p(w) \in AO(G)$에 대해서, 유일한 chamber $C(w) \in C(A)$가 존재한다. 따라서 사상 $\phi: AO(G) \to C(A)$는 $\phi(w) = C(w)$로 잘 정의된다. 그리고 우리는 다음 관계를 얻는다.

$$C(w) \subseteq H_{ij}^+ \Leftrightarrow i \to j \text{ in } w \Leftrightarrow p_i(w) > p_j(w),$$

$$C(w) \subseteq H_{ij}^- \Leftrightarrow j \to i \text{ in } w \Leftrightarrow p_j(w) > p_i(w)$$

즉, 각각의 $w_1, w_2 \in AO(G)$에 대해서, $C(w_1) = C(w_2) \Rightarrow w_1 = w_2$이다. 따라서 ϕ는 일대일 사상이다. 사실, 각각의 $1 \leq i < j \leq l$ 에 대해서, $C(w_1)$과 $C(w_2)$는 H_{ij}^+ 또는 H_{ij}^- 안에 있고 각각의 H_{ij}^+ 또는 H_{ij}^-에 대해서, $p(w)$가 결정된다.

이제 일대일 대응을 보이기 위해서 $C \in C(A)$라 하자. 점 $p=(p_1, \cdots, p_l) \in C$를 선택하자. 각각의 edge $\{i, j\}$의 방향을 다음과 같이 정의하자.

$$i \to j \Leftrightarrow p_i > p_j \Leftrightarrow p \in H_{ij}^+,$$

$$j \to i \Leftrightarrow p_i < p_j \Leftrightarrow p \in H_{ij}^-$$

그러면 다음의 관계를 얻는다.

$$C(w) \subseteq H_{ij}^{+} \Leftrightarrow p \in H_{ij}^{+},$$
$$C(w) \subseteq H_{ij}^{-} \Leftrightarrow p \in H_{ij}^{-}$$

이것은 $p \in C(w)$이고 $C = C(w)$임을 의미한다. 따라서 ϕ는 일대일 대응이다. ■

정리 4.6 (R. P. Stanley) G의 acyclic orientation의 수는 $(-1)^{l}\chi(G, -1)$이다.

증명. 정리 4.1과 보조정리 4.5에 의해서 증명이 된다. 여기서는 다른 방법으로 증명하겠다. edge들의 집합 ε에서의 귀납법을 사용하여 증명하자.

$a(G)$를 G의 acyclic orientation의 수라고 하자. G가 edge를 갖고 있지 않다면, $a(G)=1$이고 $\chi(G, -1)=(-1)^{l}$이어서 우리의 주장을 만족한다. 우리는 $\chi(G, -1)$에 대한 재귀(recurrence)를 알고 있다. 우리는 비슷하게 $e \in \varepsilon$에 대해서 $a(G)=a(G')+a(G'')$임을 보일 것이다. 만약 이것이 성립한다면 귀납법의 가정에 의해서 다음과 같이 우리의 주장이 증명된다.

$$\begin{aligned} a(G) &= a(G')+a(G'') \\ &= (-1)^{l}\chi(G', -1)+(-1)^{l-1}\chi(G'', -1) \\ &= (-1)^{l}\chi(G', -1)+(-1)(-1)^{l}\chi(G'', -1) \\ &= (-1)^{l}\chi(G, -1) \end{aligned}$$

이제, $a(G)=a(G')+a(G'')$임을 증명하자.

G의 모든 acyclic orientation은 G'의 acyclic orientation을 포함한다. G'의 acyclic orientation D는 $e=\{u, v\}$에 방향을 주는 것에 의해 G의 0, 1, 또는 2가지의 acyclic orientation으로 확장될 수 있다.

D가 u, v-경로를 갖고 있지 않다면, $v \rightarrow u$를 선택할 수 있다. 그러면 D는 G의 acyclic orientation이 된다.

그런데 D는 acyclic이므로 D는 u, v-경로와 v, u-경로를 모두 가질 수 없다. 만약 D가 u, v-경로와 v, u-경로를 모두 갖고 있다면, D는 G'의 cyclic orientation이 된다.

그래서 e에 대한 두 선택을 모두 버릴 순 없다. 따라서 모든 D는 적어도 한 가지 방법으로 G의 acyclic orientation으로 확장된다. 그리고 $a(G)$는 $a(G')$와 두 방법 모두에서 확장되는 acyclic orientation의 수의 합과 같다. 그러한 두 가지 모두에서의 확장은 G'의 u, v-경로도 없고 v, u-경로도 없는 acyclic orientation이다. 그런데 G'의 orientation에서 u, v-경로와 v, u-경로는 G''에서는 cycle이 된다. 따라서 두 방법 모두에서 확장된 orientation의 수는 G''의 acyclic orientation의 수이다.

그러므로 $a(G)=a(G')+a(G'')$이다. ■

4.3 특성다항식의 인자(factor)

정의 4.7 (**coning** and **deconing**) $Q(A) \in S = S(V^*)$로 정의된 아핀(affine) l-차원 배열에서 A 위의 cone이라 부르는 중심(central) $(l+1)$-차원 배열 cA를 유도할 수 있다.

$Q' \in K[x_0, x_1, \cdots, x_l]$를 $Q(A)$의 동차화된 다항식이라 하고 $Q(cA) = x_0 Q'$로 정의하자. $|cA| = |A| + 1$. $K_0 = \ker(x_0)$를 추가(additional) 초평면이라고 부른다.

coning을 구성할 때, 배열 A은 그것의 전체공간을 cA의 전체공간의 아핀 부분 공간 $\ker(x_0)$와 동일시함으로써 cA에 포함된다.

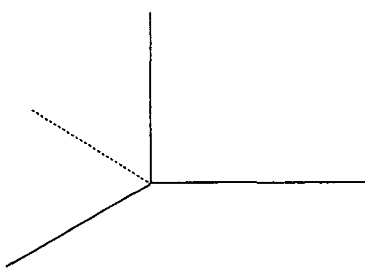
역으로, 공집합이 아닌 $(l+1)$-차원 중심배열 A에서 다음과 같은 deconing 방법에 의해 일반적으로 중심 배열이 아닌 l-차원배열 dA을 유도할 수 있다.

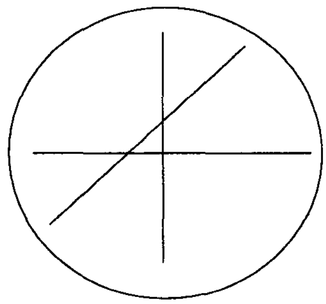
초평면 $K_0 \in A$을 선택하자. $K_0 = \ker(x_0)$를 만족하는 좌표계를 선택한다. $Q(A) \in K[x_0, \cdots, x_l]$는 A를 정의하는 다항식이라고 하자. 다항식 $Q(dA)$는 $Q(A)$ 안의 x_0를 1로 바꿈으로써 얻어진다.

deconing 구성은 먼저 중심 배열 A의 사영화(projectivizing)를 하고 K_0의 상을 무한대의 초평면으로 제거하는 것과 그것의 여-공간을 아핀 공간과 동일시하는 것에 의해서 보여질 수 있다.

예를 들어, $Q(A) = xy(x-y+1)$는 2-차원 아핀 배열이다. $Q(cA) = xyz(x-y+z)$는 3-차원 중심 배열이다.

역으로, $Q(A) = xyz(x-y+z)$에 대해서 $K_0 = \ker(x_0)$라 하고 $z=1$이라고 하면 $Q(dA) = xy(x-y+1)$가 된다.





위의 두 그림은 coning과 deconing의 그림이다. 그림에서 왼쪽그림은 초평면의 법벡터를 그린 것이고, 오른쪽은 deconing의 그림인데 xy-평면을 $z=1$로 옮겼을 때 xy-평면과 초평면들과의 교집합을 그린 것이다. 둘레의 원은 K_0를 무한으로 보냈다는 의미이다.

정의 4.8 (Product) (A_1, V_1), (A_2, V_2)를 배열이라 하고 $V=V_1 \oplus V_2$라고 하자. $(A_1 \times A_2, V)$를 다음과 같이 정의한다.

$$A_1 \times A_2 = \{H_1 \oplus V_2 \mid H_1 \in A_1\} \cup \{V_1 \oplus H_2 \mid H_2 \in A_2\}$$

정리 4.9 A_1, A_2를 배열이라 하자. $X_i \in L(A_i)$인 (X_1, X_2)의 집합 $L(A_1) \times L(A_2)$ 위에서 반 순서(partial order)를 다음과 같이 정의하자.

$$(X_1, X_2) \le (T_1, Y_2) \Leftrightarrow X_1 \le Y_1 \text{ and } X_2 \le Y_2$$

그러면 동형사상 $\phi: L(A_1) \times L(A_2) \to L(A_1 \times A_2)$, $\phi(X_1, X_2) = X_1 \oplus X_2$가 존재한다.

정의 4.10 $(A, V)=(A_1 \times A_2, V_1 \oplus V_2)$인 공집합이 아닌 (A_1, V_1), (A_2, V_2)가 존재하면 (A, V)를 reducible이라 부르고, 그렇지 않으면 irreducible이라고 부른다.

정리 4.11 A를 cone cA를 갖는 아핀 배열이라고 하자. $B=(\{0\}, K)$를 공집합이 아닌 중심 1-차원 배열이라 하자. 일대일 대응 사상 $\phi: A \times B \to cA$를 $\phi(H \oplus K) = cH$, $\phi(V \oplus \{0\}) = K_0$라 정의하자. 그러면 $\phi: L(A \times B) \to L(cA)$는 $X \in L(A \times B)$에 대하여 $r(X)$를 보존하는 $L(cA)$ 위로의 사상이 된다.

증명. $X \in L(A)$라고 하자. $X = H_1 \cap \cdots \cap H_p$라 쓰자. $cX = cH_1 \cap \cdots \cap cH_p$로 정의하자. 즉시 cX는 c-평면의 교집합으로써 X의 표현의 독립적이라는 것을 보여준다.

$\phi(X \oplus K) = cX$ 그리고 $\phi(X \oplus \{0\}) = cX \cap K_0$라고 정의하자. 그러면 그 사상은 역-차원(rank)을 보존하는 위로의(surjective) 사상이다. 일반적으로 일대일은 아니다. ■

보조정리 4.12 $(A, V)=(A_1, V_1) \times (A_2, V_2)$를 두 배열의 product라고 하자. $\mu_i = \mu_{A_i}$, $\mu = \mu_A$라고 하자. $X, Y \in L(A)$라 하자. 여기에서 $X=(X_1, X_2)$, $Y=(Y_1, Y_2)$, $X_i, Y_i \in L(A_i)$이다. 그러면 다음이 성립한다.

$$\mu(X, Y) = \mu_1(X_1, Y_1)\mu_2(X_2, Y_2)$$

증명. $L(A_1 \times A_2)$ 위의 ν를 $\nu(X, Y) = \mu_1(X_1, Y_1)\mu_2(X_2, Y_2)$로 정의하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$\nu(X, X) = \mu_1(X_1, X_1)\mu_2(X_2, X_2) = 1,$$

$$\begin{aligned}\sum_{X \le Z \le Y} \nu(X, Z) &= \sum_{X_1 \le Z_1 \le Y_1} \sum_{X_2 \le Z_2 \le Y_2} \mu_1(X_1, Z_1)\mu_2(X_2, Z_2) \\ &= \sum_{X_1 \le Z_1 \le Y_1} \mu_1(X_1, Z_1) \sum_{X_2 \le Z_2 \le Y_2} \mu_2(X_2, Z_2) \\ &= 0\end{aligned}$$

ν는 μ의 정의하고 있는 조건을 만족하므로 그들은 같다. ■

정리 4.13 $\phi: L(A \times B) \to L(cA)$를 정리 4.11에서와 같이 정의하자. μ를 $L(A \times B)$의 Möbius 함수라고 하자. μ_c를 $L(cA)$의 Möbius 함수라고 하자. 그러면 모든 $Z \in L(cA)$에 대해서 다음이 성립한다.

$$\mu_c(Z) = \sum_{Y \in \phi^{-1}(Z)} \mu(Y)$$

증명. $\phi(X \oplus K) = cA$ 그리고 $\phi(V \oplus \{0\}) = K_0$인 사상 $\phi: L(A \times B) \to L(cA)$를 생각하자. 보조정리 4.12에 의해서 $X \in L(A)$에 대해서 다음이 성립한다.

$$\mu(X \oplus K) = \mu_1(X)\, \mu_2(K) = \mu_1(X),$$

$$\mu(X \oplus \{0\}) = \mu_1(X)\, \mu_2(\{0\}) = -\mu_1(X)$$

$$\Rightarrow \mu(X \oplus K) = -\mu(X \oplus \{0\})$$

만약 $K_0 \not\le Z$이면, $Z = cY$인 $Y \in L(A)$가 유일하게 존재한다. 또한 $\phi^{-1}(Z) = \{Y \oplus K\}$이고 $\mu(Y \oplus K) = \mu_c(cY)$이다.

만약 $K_0 \le Z$라면, $r(Z)$ 위의 귀납법으로 보일 수 있다.

만약 $r(Z) = 1$이라면, $Z = K_0$이다.

$\phi^{-1}(K_0) = \{V \oplus \{0\}\}$이므로, $\mu_c(K_0) = -1 = \mu(V \oplus \{0\})$이다.

이제 $r(Z) \ge 2$라 가정하자. 그러면 다음에 나오는 등식이 성립한다.

다음 등식에서 첫 번째 등식은 $\sum_{Y \in L(cA),\, Y \le Z} \mu_c(Y) = 0 \Rightarrow \sum_{Y \in L(cA),\, Y < Z} \mu_c(Y) + \mu_c(Z) = 0$이라는 사실에 의해서 성립하고, 두 번째 등식은 귀납법의 가정에 의해서 성립한다. 다섯 번째 등식은 $K_0 \le Z$이면, $\{X \in L(A) \mid cX < Z\} = \{X \in L(A) \mid cX \cap K_0 \le Z\}$라는 사실에 의해서 성립한다.

$$\mu_c(Z) = -\sum_{Y \in L(cA),\, Y < Z} \mu_c(Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= - \sum_{Y \in L(cA),\, Y<Z} \sum_{X \in \phi^{-1}(Y)} \mu(X) \\
&= \sum_{X \in L(A \times B),\, \phi(X)<Z} \mu(X) \\
&= - \sum_{X \in L(A),\, cX<Z} \mu(X \oplus K) - \sum_{X \in L(A),\, cX \cap K_0 < Z} \mu(X \oplus \{0\}) \\
&= \sum_{X \in L(A),\, cX \cap K_0 \leq Z} \mu(X \oplus \{0\}) - \sum_{X \in L(A),\, cX \cap K_0 < Z} \mu(X \oplus \{0\}) \\
&= \sum_{X \in L(A),\, cX \cap K_0 = Z} \mu(X \oplus \{0\}) \\
&= \sum_{X \in L(A \times B),\, \phi(Y) = Z} \mu(Y) \\
&= \sum_{Y \in \phi^{-1}(Z)} \mu(Y) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

보조정리 4.14 A_1, A_2를 배열이라 하고, $A = A_1 \times A_2$라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\pi(A, t) = \pi(A_1, t)\pi(A_2, t).$$

증명. $V = V_1 \oplus V_2$라고 하자. $L(A) = L(A_1) \times L(A_2)$이기 때문에 다음이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
\pi(A, t) &= \sum_{X \in L(A)} \mu(X)(-t)^{r(X)} \\
&= \sum_{X_1 \oplus X_2 \in L(A_1) \times L(A_2)} \mu(X_1 \oplus X_2)(-t)^{r(X_1 \oplus X_2)} \\
&= \sum_{X_1 \in L(A_1),\, X_2 \in L(A_2)} \mu(X_1)\mu(X_2)(-t)^{r(X_1)}(-t)^{r(X_2)} \\
&= \pi(A_1, t)\pi(A_2, t) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

이제 특성다항식이 $t(t-1)$의 인자를 갖는다는 사실을 각각 c평면 배열 이론과 그래프 이론으로 설명하려고 한다.

정리 4.15 A를 cone cA를 갖는 아핀 배열이라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\pi(cA, t) = (1+t)\pi(A, t)$$

증명. 만약 $B = (\{0\}, K)$이면, $\pi(B, t) = 1 + t$이다. 보조정리 4.14로부터 다음이 성립한다.

$$\pi(A \times B, t) = (1+t)\pi(A, t)$$

정리 4.13으로부터 $\phi: L(A \times B) \to L(cA)$는 역-차원(rank)을 보존하는 위로의(surjective) 사상이기 때문에, $\pi(cA, t) = \pi(A \times B, t)$가 성립한다.

따라서 $\pi(cA, t) = \pi(A \times B, t) = (1+t)\pi(A, t)$ 을 만족한다. $\blacksquare$

만약 A가 공집합이 아닌 중심 배열이면, 아핀 배열인 deconing dA가 존재하고 dA는 아핀 배열이므로 정리 4.15에 의해 $\pi(A,\ t)=(1+t)\pi(dA,\ t)$가 된다. 따라서 $\pi(A,\ t)$는 $(1+t)$를 인자로 갖는다. 그리고 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\chi(A,\ t)&=t^{l}\pi(A,\ -t^{-1})\\&=(t-1)\,t^{l-1}\pi(dA,\ -t^{-1})\\&=(t-1)\chi(dA,\ t)\end{aligned}$$

즉, $\chi(A,\ t)$는 $(t-1)$을 인자로 갖는다.

특히, Braid 배열의 부분 배열은 다른 배열과 1-차원 공집합 배열의 곱(product)이므로 $\chi(A,\ t)$는 $t(t-1)$을 인자로 갖는다. 예를 들어, $Q(A)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$을 생각해 보자. $x_1-x_2=X$, $x_1-x_3=Y$라고 하면, $x_2-x_3=Y-X$가 된다.

$A_1=\{\ker(X),\ \ker(Y),\ \ker(Y-X)\}$라고 하면, $Q(A_1)=XY(Y-X)$이다. 그래서 $(A,\ R^3)=(A_1,\ R^2)\times(\Phi_1,\ R)$이고 보조정리 4.14에 의해서 다음이 성립한다.

$$\pi(A,\ t)=\pi(A_1,\ t)\pi(\Phi_1,\ t)=\pi(A_1,\ t)$$

따라서 $\chi(A,\ t)=t\chi(A_1,\ t)$이다. 여기에서 Φ_1은 1-차원 공집합 배열이다.

일반적으로 이를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}Q(A)&=\prod_{1\le i<j\le l}(x_i-x_j)\\&=X_1X_2\cdots X_{l-1}(X_2-X_1)(X_3-X_1)\cdots\\&\qquad(X_{l-1}-X_1)(X_3-X_2)\cdots(X_{l-1}-X_2)\cdots(X_{l-1}-X_{l-2})\end{aligned}$$

여기에서 $X_i=x_1-x_{i+1}$, $i=1,2,\cdots,(l-1)$이다.

$A_1=\{\ker X_i\mid i=1,2,\cdots,(l-1)\}\cup\{\ker(X_k-X_j)\mid 1\le j<k\le(l-1)\}$라고 하면, $(A,\ R^l)=(A_1,\ R^{l-1})\times(\Phi_1,\ R)$이어서 보조정리 4.14에 의해서 다음이 성립한다.

$$\pi(A,\ t)=\pi(A_1,\ t)\pi(\Phi_1,\ t)=\pi(A_1,\ t)$$

따라서 $\chi(A,\ t)=t\chi(A_1,\ t)$이다.

한편 그래프 이론에서 색채 함수 $\chi(G,\ t)$는 다음과 같은 이유로 $t(t-1)$ 을 인자로 갖는다.

정리 4.16 G를 n개의 꼭지점과 $m\ (m\neq0)$개의 edge를 갖는 단순 그래프라고 하자. 그러면 $\chi(G,\ t)$는 $t(t-1)$을 인자로 갖는다.

증명. edge의 갯수, m에 대한 귀납법으로 증명하겠다.

만약 $m=1$이면, $\chi(G,\ t)=t^{l-1}(t-1)$이다.

이제 $m\geq 2$이고, $m<k$ 이면, $\chi(G,\ t)$는 $t(t-1)$을 인자로 갖는다고 가정하자.

$m=k$라고 하자. 그러면 $\chi(G,\ t)=\chi(G',\ t)-\chi(G'',\ t)$이고 가정에 의해서 $\chi(G',\ t)$와 $\chi(G'',\ t)$는 $t(t-1)$을 인자로 갖는다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\chi(G,\ t) &= \chi(G',\ t)-\chi(G'',\ t)\\ &= t(t-1)\,Q_1(t)-t(t-1)\,Q_2(t)\\ &= t(t-1)[\,Q_1(t)-Q_2(t)]\end{aligned}$$

그러므로 $\chi(G,\ t)$는 $t(t-1)$을 인자로 갖는다.
여기에서 $Q_1(t)$와 $Q_2(t)$는 각 색채함수를 $t(t-1)$로 나눈 몫이다. ■

참고 문헌

1. Aigner, Martin, *Graph Theory; A Development from the 4-Color Problem*, BCS Associates, Moscow, Idaho USA, 1987.
2. Bondy, J.A. and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, University of Waterloo, 1977.
3. Orlik, Peter and Hiroaki Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag, 1991.
4. West, Douglas B., *Introduction to Graph Theory*, University of Illinois-Urbana, 1996.