Historia Mathematica Vol. 15, No. 1, 2002, 135-146

기초통계교육에서 조건부확률의 이해

서경대학교 수리정보통계학부 **박태룡**
한양대학교 과학기술학부 **한정순**
한양대학교 수학과 **장인홍**

Abstact

In this paper, we demonstrate that one can teach conditional probability in a manner consistent with many features of the statistics education reform movement. Presenting a variety of applications of conditional probability to realistic problems, we propose that interactive activities and the use of technology make conditional probability understandable, interactive, and interesting for students at a wide range of levels of mathematical ability. Along with specific examples, we provide guidelines for implementation of the activities in the classroom and instructional cues for promoting curiosity and discussion among students.

0. 서론

과거 수년 동안 통계교육에서 개선운동의 발전이 있어왔다. 특히, 1999년 한국통계학회 통계교육상담 연구회 발표회에서 통계교육과정의 커리큘럼과 교육방법 등 많은 개별적인 통계교육개선 프로젝트가 발표되고 토론되었는데 이러한 내용들에서 몇 가지 공통점은 학생들 입장에서는 자발적인 학습을 촉진시키고, 기초적인 통계의 아이디어에 대한 학생들의 개념적 이해를 강조하고, 학생들이 조사할 수 있도록 하기 위한 실제데이터를 포함하는 흥미로운 적용들을 제시하고, 학생들이 동료들과 서로 협조하여 연구할 수 있도록 용기를 주며, 이러한 목표의 각각을 달성하도록 도움을 주는 방향으로 기술적인 방법들을 사용하게 한다는 것들이다. 위에서 언급된 내용들이 통계교육에서 중요한 요소가 된다는 것은 부인할 수 없는 일이지만 확률에서 전통적인 주제들이 더욱더 많은 자료분석과 통계적 추론이 포함되어질 수 있도록 한 "개선된" 통계입문 교과서와 교육과정에 종종 희생되어 사라지고 있다. 종종 서로소와 독립사상에 대하여 대응되는 규칙을 따라 간단히 소개되는 합사상과 교사상은

오직 확률적 개념을 전제로 하여 표현되는 것일 뿐이다. 조건부확률과 베이즈 정리(Bayes' Theorem)는 기껏해야 선택적인 주제로 교육과정에서 사소한 것으로 간주되는 경향이 있으며 이는 조건부확률과 베이즈 정리는 통계교육과정에서 연속적으로 나타나는 통계적 내용의 이해를 위하여 필요성이 없을 것 같다고 보기 때문이라고 생각한다. 그러나 조건부확률에 대한 개념의 이해와 정립은 자료분석이든 통계적 추론이든 현재의 데이터를 이용하여 정보를 추출하거나 추출한 정보를 이용하여 불확실한 미래의 상황을 예측하는데 필수적인 주제라 생각하며 학생들이 좀 더 이해하기 쉽도록 몇 가지 예제를 들어 개념을 설명하고자 한다. 본 논문은 1995년 Rossman과 Short가 *Journal of Statistics Education* v. 3, n. 2에 실었던 내용을 토대로 작성되었음을 밝히고 통계교육에서 조건부확률의 개념을 학생들에게 어떻게 교육 할 것인가를 몇 가지 예제를 통하여 밝히고자 한다

1. 이원표(Two-Way Tables)

학생들에게 조건부확률을 이해시키는 것이 매우 어렵고 힘들다는 주장에 근거하여 조건부확률에 근간을 두고 만들어진 베이지안 추론 내용이 기초통계과정에 포함되어서는 안 된다는 것을 1992년에 Moore 는 강력하게 제안하였다. 그러나 Rossman 과 Short 등은 이러한 제안에 대하여 학생들이 고전통계학을 배울 때 나타나는 $\Pr(A|B)$와 $\Pr(B|A)$ 사이의 미묘하지만 아주 중요한 차이점이 있다는 반응을 보였다. 많은 학생들은 P-값을 귀무가설이 참이라는 조건 아래에서 극단적인 데이터를 얻을 확률이라는 사실보다도 표본 데이터가 주어져 있을 때 귀무가설이 참일 조건부확률로 간주하려는 자연스러운 유혹에 빠져든다고 하였다.

1.1. P-값이란 무엇을 의미하는가?

많은 학생들이 p-값의 정확한 의미와 유의 성검정(tests of significance)과 관련된 다른 개념들에 대하여 확신을 갖지 못한다는 것을 알게되었다. 이러한 개념들은 다양한 적용에서 반복적으로 사용되고 그래서 정확하게 이해되어야만 하는 것이 중요하다. 먼저, 일반적인 용어로 개념을 설명하고 다음으로 적용문제를 고려해보자.

데이터세트(Dataset)을 이용하여 귀무가설과 이에 대응하는 대립가설을 검정하고자 한다. 두 개의 가설은 주어진 데이터를 만들어낸 과정에 대하여 두 가지 통계적 모델(모형)을 지정한다. 귀무가설이 거짓이라면 대립가설은 참이 되기를 기대하는 것이다. 대립가설이 참이라는 것을 증명할 수는 없으나 주어진 데이터에 대하여 귀무가설보다 대립가설이 좀 더 그럴듯하다는 것을 설명할 수도 있다. 이러한 설명은 일반적으로 보통 대립가설을 선호하는 입장에서 귀무가설에 반한 증거의 강도를 양적으로 측정하는 확률(P-value) 용어로 표현된다.

두 개의 가설 중 적어도 하나는 참이라는 가정을 하면서 데이터가 귀무가설을 따라 일양적으로 나타날지 또는 귀무가설이 참이라면 이러한 종류의 데이터를 얻을 수 없을 것인지에 대하여 의문을 갖는다. 검정통계량, 즉 데이터에 대한 특별한 실수값 함수의 값을 계산함으로써 이러한 질문을 해결한다. 검정통계량의 값이 귀무가설을 따라 일양적인지 아닌지를 결정하기 위하여 귀무가설이 참이라면 검정통계량에서 기대하고자하는 표본추출 변동성이 무엇인가를 알아야할 필요가 있다. 즉 다른 말로 표현하면 귀무가설이 참일 때 검정통계량의 분포, 즉 귀무(가설)분포를 알아야만 할 필요성이 있다. 많은 응용에서 검정통계량은 귀무(가설)분포가 광범위하게 이용할 수 있는 n=100, p=1/2를 갖는 표준정규분포, 이항분포, 자유도 4를 갖는 t-분포, 자유도 23을 갖는 카이제곱분포, 자유도 2와 20을 갖는 F-분포 등으로 이름이 붙여지도록 정의된다.

이제, 검정통계량의 값이 하나의 수로 주어지고 검정통계량의 귀무(가설)분포(이론적 분포는 일반적으로 확률밀도함수로 표현된다)가 주어졌다면 검정통계량이 그 분포의 중앙에 있는지(귀무가설에 일치하는) 또는 그 분포의 꼬리 부분으로 치우쳐(대립가설이 좀 더 그럴듯하게 보이도록 하는) 있는지 알고자 한다. 때로는 우측 꼬리 부분을 고려하고 때로는 좌측 꼬리 부분을 고려하나 양측 꼬리 부분을 고려할 때도 있는데 이는 검정통계량과 대립가설을 어떻게 정의하는가에 달려있다. 검정통계량의 큰 양의 값이 귀무가설 아래에서보다 대립가설 아래에서 좀 더 그럴듯하다고 가정하자. 그렇다면 우리가 정의한 검정통계량이 귀무(가설)분포에 대하여 오른쪽 꼬리 부분으로 얼마만큼 치우쳐 있는지에 대한 측도를 알고 싶다. P-값은 이러한 거리에 대한 측도를 제공한다. 이 상황에서 P-값은 귀무(가설)분포를 사용하여 계산된 검정통계량의 오른쪽 확률이다. 검정통계량이 꼬리부분으로 더욱 더 치우쳐져서 더 작은 P-값은 대립가설을 선호하는 측면에서 귀무가설에 반하는 좀 더 강한 증거이다.

P-값은 연구하고자 하는 대상에 대한 가설의 반복 관점에서 설명되어질 수 있다. 귀무가설이 참이고 새로운 데이터세트(dataset)가 동일한 표본추출 과정을 사용하여 처음 데이터세트(dataset)와는 독립적으로 얻어졌다고 가정하자. 새로운 데이터세트가 검정통계량의 새로운 값을 계산하기 위하여 사용되어졌다면(동일한 수식이지만 새로운 데이터), 검정 형태를 단측검정이라고 가정했을 때 새로운 값이 기존의 원래 값보다 꼬리부분으로 더욱 더 치우쳐질 확률은 얼마인가? 이러한 확률이 바로 P-값이다.

P-값은 종종 귀무가설이 참일 확률이라는 것으로 부적절하게 설명되어지는 경우가 있다. 이러한 실수를 하지 않도록 노력해야한다. 확률에 대한 가장 흔한 설명에서 가설이 참인지에 대한 확률적인 의미가 없고 그러한 확률은 특정한 데이터를 생산하는 과정이라는 설명도 없다. 귀무가설이 참이라는 관찰자의 믿음에 대한 측도, 즉 주관적 확률을 사용하여 "귀무가설이 참이라는 확률"을 설명할 수 있다. 이러한 주관적 확률은 귀무가설이 참이라는 사전확률을 특정하게 할당하고, 주어진 데이터와 관찰자의 주관적 확률을 개선하기 위한 모형을 사용함으로써 계산할 수 있다. 이러한 방법을 베이지안 접근 방법이라고 하는데 왜냐하면 새로운 정보를 반영하도록 주관적 확률을 개선하는데 베이즈 정리가 사용되었기 때문이다.

통계학에 익숙지 않은 사람이 P-값을 설명하고자 할 때 종종 증거의 강도를 명시하기 위

하여 기술적 언어를 사용할 필요가 있다. 우리는 아래와 같은 몇 가지 언어를 사용한다. 확실히 어떤 의미에서 한계는 임의적이며, 다른 관찰자들은 다른 언어를 사용할 수도 있다.

$P>0.10$	귀무가설을 기각할 충분한 증거가 없다. 귀무가설과 부합하도록 데이터가 나타난다.
$0.05<P<0.10$	대립가설을 선호하는 입장에서 귀무가설을 기각하는 약한 증거가 있다.
$0.01<P<0.05$	대립가설을 선호하는 입장에서 귀무가설을 기각하는 적절한 증거가 있다.
$0.001<P<0.01$	대립가설을 선호하는 입장에서 귀무가설을 기각하는 강력한 증거가 있다.
$P<0.001$	대립가설을 선호하는 입장에서 귀무가설을 기각하는 매우 강력한 증거가 있다

이러한 유형의 언어를 사용 할 때에는 통계적 유의성과 실제적 유의성 사이에는 차이점이 있다는 것을 염두 해 두어야한다. 대규모 연구에서 검정하고자 하는 것의 유효성의 크기가 중요하다고 하기에는 너무 작다 할지라도 작은 P-값을 얻을 수도 있다. 검정하고자 하는 모수에 대하여 신뢰구간과 함께 P-값을 사용하는 것은 좋은 생각이다.

P-값은 또한 고정된 α검정이라는 말로 좀 더 수식적으로 설명되어진다. 여기서 α는 일반적으로 0.05 또는 0.01, 드물게는 0.10 이라는 하나의 수인데 데이터와는 독립적으로 선택된 것이다. P-값이 α보다 더 작으면 수준 α에서 귀무가설을 기각하고 그렇지 않으면 수준 α에서 귀무가설을 기각하지 못한다. 그러나 이러한 형태의 방법은 종종 유용하게 사용하는 것보다 귀무가설을 기각하는 것과 관련하여 좀 더 명확한 답을 암시하기 때문에 선호하지는 않는다. P-값 0.051과 0.049 사이에는 본질적인 차이는 없다. 몇몇 상황에서는 귀무가설 또는 대립가설이 참인지 여부에 대하여 관찰자의 신뢰에 기초한 몇 가지 행동방침과 함께 진행하는 것이 필요할 수도 있다. 종종 증거의 척도로서 P-값을 사용하는 것이 더 바람직하다.

어떤 고정된 유의수준 α에서 검정은 먼저 P-값을 계산해내지 않고 계산되어질 수 있다. 이러한 검정방법은 유의수준 α에 대응하는 귀무(가설)분포의 기각값을 갖는 검정 통계량을 비교함으로써 가능하다. 이러한 비교 방법은 일반적으로 통계표와 직접 손으로 계산할 때 가장 쉬운 접근 방법이다. 대부분의 통계 소프트웨어는 유의수준 α와 직접적으로 비교되어질 수 있는 P-값을 제시하여 나타내어 준다.

고정된 유의수준 α검정은 어떤 검정의 강도(검정력)를 논의하는데 필요하다. 이러한 검정의 강도는 연구를 계획할 때 유용한 개념이다.

1.2. 조건부확률의 예제

조건부확률에 적용된 예제들을 살펴보는 것이 조건부확률의 근간을 이루고 있는 논리와 설명 및 고전적인 통계적 추론에 대한 한계를 명확하게 하는데 도움이 될 것으로 판단된다. 다음으로, 조건부확률에서 이러한 차이점을 이해하기 위해서는 이원표에 나타난 범주형 데이터를 분석해보는 것이 가장 기본적인 것이다. 예로써, 아래의 표는 1994년도 미국 상원의원들을 정당과 성별에 따라 분류한 것이다.

	남성	여성	합
공화당	42	2	44
민주당	51	5	56
합	93	7	100

위에 주어진 표를 살펴보고 비록 조건부확률에서 난해한 연습문제는 아니지만 학생들에게 "대부분의 민주당 상원의원은 여자다."라는 문장과 "대부분의 여자 상원의원은 민주당이다." 라는 문장의 타당성을 평가해보도록 질문하는 것은 중요하고도 아주 적절한 것일 수 있다. 이러한 두 문장의 의미를 설명하는 능력은 자료에 대한 이원표를 분석하는 필수적인 기술이다.

2. 베이즈 정리의 인식

조건부확률과 이원표 분석 사이의 유사성을 마음에 염두 해 두고, 학생들 스스로가 이원표를 만들어 봄으로써 조건부확률을 좀 더 중요하게 적용할 수 있는 결과 중 하나인 베이즈 정리를 학생들이 인식할 수 있다는 것을 논의해 보도록 하자. 결함이 있는 불량 부품의 근원을 확인해보는 것을 포함하여 여러 예제가 있는 DeGroot(1986) 책에 나타난 일반적인 응용문제를 살펴보도록 하자.

예제 1. 불량부품

어느 한 공장에서 많은 양의 동일한 부품을 생산하는데 3개의 기계가 사용된다고 가정하자. 생산기계는 서로 다른 용량을 가지고 있다. 즉, 하루 생산해 내는 부품의 60%는 기계 A에서, 30%와 10%는 각각 B와 C 기계가 생산한다고 한다. 그동안 자료를 토대로 살펴본 결과 A기계에서 생산해낸 부품의 10%는 불량 부품이며 B와 C기계가 생산한 부품의 30%와 40%가 각각 불량부품이다. 하나의 부품이 검사되고 검사결과 그 부품이 불량 부품이었다면,

그 불량 부품을 생산해 냈을 가장 그럴듯한 기계는 어느 것인가? 반대로 생산해내지 않았을 것 같은 어느 기계인가? 그 부품이 불량 부품이라는 증거에 비추어 개선된 조건부확률, 즉 각 기계가 그 불량부품을 생산해 낼 조건부확률은 무엇인가? 조건부확률에 대한 직관적 인식을 변화, 발전시키기 위하여 먼저, 이러한 질문에 대하여 학생들 스스로가 답을 추측해 보도록 한다. 또한, 이러한 질문에 대하여 지금 당장 학생들이 베이즈 정리를 이용하여 적절한 확률들로 답을 하도록 하는 것보다는 오히려 퍼센티지를 정확하게 포함하는 가정된 모집단에 대한 부품의 이원표를 만들도록 한다.(여기서 학생들에게 표본으로 취해지는 부품들은 얼마든지 변화하는 양이며 완전하게 정해져있는 퍼센티지를 따르지 않을 수도 있다는 것을 강조한다.) 아래의 질문들은 학생들이 표를 채워나가는데 도움을 줄 것이다.

	불량부품	양품	합계(행)
기계 A 기계 B 기계 C			
합계(열)			100

(a) 생산된 모든 100개의 부품들 중에서 기계 A, 기계 B, 기계 C에서 만들어진 것은 몇 개씩인가?. 표에서 합계(행)에 이것들을 채우시오

(b) 기계 A에서 생산된 부품들 중에서 얼마나 많은 부품이 불량부품이라고 기대할 수 있는가? 기계 B 및 기계 C에 대해서도 이것을 반복하고 불량부품 열에 결과를 기록하시오.

(c) 100개의 부품 중에서 표에 나타난 불량부품의 개수는 몇 개인가? 그 결과를 불량부품 합계(열)에 기록하시오.

(d) 불량부품이라고 기대되어지는 불량부품 수 가운데 기계 A, 기계 B, 기계 C에 의해 생산된 비율은 얼마인가

결과표는 다음과 같다.

	불량부품	양품	합계(행)
기계 A 기계 B 기계 C	6 9 4	54 21 6	60 30 10
합계(열)	19	81	100

학생들은 위 표로부터 각 기계에서 생산된 부품 중 불량부품의 비를 알 수 있는데 기계A에 의해 생산된 부품 중 불량부품의 비는 6/19, 기계B에 의해 생산된 부품 중 불량부품의 비는 9/19, 기계C에 의해 생산된 부품 중 불량부품의 비는 4/19라는 것을 알 수 있다. 또한, 이러한 사실은 검사된 부품이 불량부품이라는 정보(데이터)가 주어져 있을 때 각 기계가 불량부품을 생산해 낼 개선된 확률로써도 이해 될 수 있다. 이러한 과정 속에서 학생들은 베이즈 정리를 인식하지 못한 가운데에서도 필연적으로 베이즈 정리를 적용한다. 많은 학생들의 직관과는 반대로 기계 B가 검사결과가 불량부품인 부품을 생산하였을 가능성이 가장 크다. 검사결과 부품이 불량부품이었을 가능성이 가장 적다고 신뢰함에도 불구하고 기계 C에서 그 부품을 생산해냈을 가능성은 가장 적다. 이것은 먼저 가장 적은 부품을 생산해 냈다는 것에 기인한다. 그럼에도 불구하고 기계 C가 그 불량부품을 생산해 냈을 확률은 그 부품이 불량부품이라는 증거에 비추어 처음보다 2배 이상이 된다(10%에서 4/19로). 조건부확률과 베이즈 정리는 때때로 확률트리(Probability trees)를 이용하여 설명(소개)되어진다. 이러한 트리는 조건부확률문제들의 구조를 표현하기 위해 구성되어지는 반면 이원표의 사용은 적절한(알맞은)확률에 대한 상호계산과 구성에 좀 더 도움이 된다고 생각한다. 또한, 이원표는 조건부확률 개념(인식, ideas)이 범주형 변수에 대한 자료분석과도 연결된다는 사실을 암시한다.

3. 응용(적용사례): AIDS 검사

이러한 이원표 분석에서 얻어진 결과를 가지고 학생들은 위에서 설명된 과정을 좀 더 흥미롭고 관련된 응용문제에 적용할 수 있다. 의학적 진단검사결과를 설명하는 예제를 고려해보자. 에이즈(AIDS)에 대한 일반적인 검사방법은 ELISA 검사이다. Gastwirth(1987)의 연구에 의하면 어떤 사람이 실제적으로 에이즈 바이러스를 옮길 때 이러한 검사는 그 당시 97.7%의 양성반응결과를 나타낸다고 추정(평가)하였다. 또한, 어떤 사람이 에이즈 바이러스를 옮기지 않았을 때 ELISA 검사는 그 당시 92.6%가 음성반응이었다. 이러한 퍼센티지는 각각 민감도와 특이도(한정도)로 알려져 있다. 게다가 이 연구에서 미국인구의 약 0.5%가 에이즈 바이러스를 옮긴다는 하나의 기준율을 추정(평가)하였다. 이러한 기준율(Base rate)은 임의로 선택된 개인이 에이즈 바이러스를 옮기는 초기 확률을 제공한다. 검사결과를 나타내는 양식지의 데이터는 검사를 받는 개개인들에 대한 초기확률을 개선하는 것을 가능하게 한다. 위와 같은 연구결과를 토대로 자연스럽게 나올 수 있는 질문은 ELISA 검사에서 양성반응을 나타낸 임의 선택된 미국인이 실제로 에이즈 바이러스를 옮길 확률은 얼마인가라는 질문이다. 오직 기본적인 대수연산 능력만을 갖춘 학생들조차도 퍼센티지를 유지하는 범위에서 1,000,000명의 가정적인 인구에 대하여 이원표를 구성함으로써 이러한 문제에 대한 질문을 설명 또는 해결할 수 있다. 학생들은 다음에 따르는 질문들을 통하여 이러한 문제를

수행해 나아간다.

	검사 : 양성반응	검사 : 음성반응	합계(행)
에이즈를 옮긴다 에이즈를 옮기지 않는다			
합계(열)			1,000,000명

(a) 모집단안에서 에이즈 바이러스의 기준율을 사용하여 1,000,000명 중 몇 명이 에이즈 바이러스를 옮길 것인가를 결정하시오. 또한 몇 명이 에이즈 바이러스를 옮기지 않는지 나머지 인원을 결정하시오.

(b) 에이즈 바이러스를 옮기는 사람 중 몇 명이 양성반응으로 나타날지를 결정하기 위하여 민감도(Sensitivity)를 사용하시오. 또한 몇 명이 검사결과 음성으로 나타날지 나머지 인원을 결정하시오.

(c) 에이즈 바이러스를 옮기지 않는 사람 중 검사에서 음성반응을 보일 사람은 몇 명인지를 결정하기 위하여 특이도(한정도, specificity)를 사용하시오. 음성반응을 보인 사람을 제외한 나머지는 몇 명인가?

(d) 양성반응을 보인 사람의 합계는 몇 명인가?

(e) 양성반응을 보인 사람 중 실제적으로 에이즈 바이러스를 옮기는 사람의 비율은 얼마인가?

결과표는 다음과 같이 될 것이다.

	검사 : 양성반응	검사 : 음성반응	합계(행)
에이즈를 옮긴다 에이즈를옮기지 않는다	4,885 73,630	115 921,370	5,000 995,000
합계(열)	78,515	921,485	1,000,000명

위의 결과표로부터 학생들은 대부분의 양성반응검사결과는 직관과는 반대로 에이즈 바이러스를 옮기지 않는 사람들로 채워져 있다는 결과를 쉽게 알아낼 수 있다. 실제적으로 양성

반응 검사결과의 오직 6.22%(4,885/78,515)만이 실제적으로 에이즈 바이러스를 옮기는 사람들로 채워져 있다. 학생들은 이렇게 놀라운 결과를 설명하기 위한 문서를 작성하는 것에 대하여 그들의 동료들과 함께 협의할 수 있다. 컴퓨터 기술은 학생들이 이러한 분석을 자동으로 할 수 있도록 한다. 여기서 학생들에게 사용자가 입력하는 기준율, 민감도 그리고 특이도 등이 무엇이든 간에 이러한 이원표를 만들어내는 스프레드시트에 수식을 입력하도록 지도한다. 이렇게 함으로써 학생들은 기준율, 민감도 그리고 특이도가 변함에 따라 주어진 질문에 대한 확률의 변화를 쉽게 조사할 수 있다. 예를 들어, 양성반응검사를 두 번 시행(검사는 독립적으로 시행된다)한 어떤 사람이 에이즈 바이러스를 옮기는 확률을 구하기 위하여 새로운 기준율로서 0.0622를 사용하도록 해보자. 또한, 학생들이 초기확률과 개선된 확률을 그래픽으로 표현해보도록 스프레드시트를 사용하도록 해보자. 이 응용문제를 가지고 마지막 연습문제로 강사는 학생들이 에이즈 바이러스 검사와 헌혈의 집단검사를 총괄하는 책임자로써 이러한 분석이 암시하고 있는 것에 대하여 사고하도록 요구할 수 있다. 특히 중요한 것은 관심의 대상이 되는 모집단에서 에이즈 바이러스에 대한 기준율의 선택이다. 위에서 다룬 예제에서는 미국국민 모집단에 기준율 0.5%를 적용하였으나 개개인에 따라 이상적인 기준확률은 그들이 가지고있는 HIV(인체면역 바이러스, Human Immunodeficient Virus) 위험 요인들에 의존하여 변하게 된다.

4. 응용사례 : 법적증거(Legal Evidence)

베이지안 이론을 요구하는 또 다른 중요한 상황(배경)은 어떤 양적 본질에 대한 법적 증거를 수반한다는 것이다. 판사와 배심원들은 종종 확률적 증거를 설명하는데 기초하여 어떤 피고인의 유죄에 대한 그들의 주관적 판단을 개선할 것을 요구받는다. 다소간 수학적 능력을 보유한 학생들은 다음과 같은 베이즈 정리를 유도 할 수 있다.

$$\Pr(G|E)=\frac{\Pr(E|G)\Pr(G)}{\Pr(E|G)\Pr(G)+\Pr(E|G^c)\Pr(G^c)}$$

여기서 G는 피고인이 유죄일 사상이며 E는 당 사건에 대한 증거 사상이다.

1985년 4.18부터 1986년 1.30까지 기간동안 피츠버그도시의 섀디사이드(Shadyside)지구에서 7명의 여자를 강간한 혐의로 형사재판권을 가진 피츠버그 민사재판소에 1987년 형사재판으로 심리를 받았던 Joseph Jamieson의 경우를 생각해보자. 1990년에 Fienberg는 법의학전문가(법정 전문가)가 범죄현장에서 증거물로 채취한 체액을 분석하여 7명의 여자를 공격했던 피의자는 혈액 특성과 PGM 2 분비선인 B형의 유전학적 표식을 가졌다고 결론을 내렸다고 밝히고 있다. 더 나아가 법의학자(법정전문가)는 Alleghency County 남성인구의 0.32%만이 단지 이러한 혈액 특성을 갖으며 Jamieson 자신도 범죄 현장에 있던 공격자와

동일한 유전학적 표식을 가졌다는 것을 증언(입증)하였다. 묻고자하는 자연스러운 질문은 어떤 배심원이 이러한 양적인 법정증거에 비추어 Jamieson의 죄에 대한 확률을 어떻게 개선해야만 하는가 이다. 이 경우에 $\Pr(E|G)=1$이고 $\Pr(E|G^c)=0.0032$이다. 왜냐하면 Jamieson이 죄를 저지르지 않았다면 Allegheny County에 거주하는 다른 남성이 죄를 저지르지 않았을 것과 동일하기 때문이다. 이러한 사실을 위에 표현한 베이즈 정리를 이용하여 적용하면 다음과 같은 단순한 식을 이끌어 낼 수 있다.

$$\Pr(G|E)=\frac{\Pr(G)}{0.9968\Pr(G)+0.0032}$$

여기서 $\Pr(G)$는 법정증거(증언)을 듣기 이전 Jamieson의 유죄에 대한 사전의 배심원의 주관적 판단을 나타내는 것이다.

학생들은 사전확률에 대한 함수로써 개선된 확률들을 그래프로 표현하기 위하여 그래프를 그려주는 계산기 또는 스프레드시트 패키지를 사용할 수 있다. 이 시점에서 학생들에게 사전확률의 특정한 값에 대하여 죄에 대한 개선된 확률을 계산하도록 한다. 계산 결과는 다음과 같이 된다.

사전확률	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001	0.00000278
개선된 확률	0.9968	0.9874	0.9720	0.7594	0.2383	0.0009

위의 표는 만약 어떤 배심원이 법정증언(증거)를 듣기 이전에 Jamieson이 유죄라는 사실에 50%를 지정(할당)한다면 법정 증언(증거)를 들은 후의 그의 죄에 대하여 99.68%는 유죄라고 확신한다는 것을 나타내고 있다. 심지어 배심원이 증거에 기초하여 사전에 단지 1/10 정도 유죄일 확률이라고 간주해도 이러한 법정 증언은 유죄일 확률을 97.2%까지 끌어올린다. 위 표의 마지막 열은 특별한 설명이 따르는데, 이 경우 피고측(피고와 변호사)은 유죄일 사전확률은 Allegheny County에 거주하는 적절한 나이그룹으로 추산하는 360,000명중 1명이라고 주장한다. 그렇다면 피고인이 유죄일 개선된 확률은 1/1,150이며 1,150은 Allegheny County에 거주하는 적절한 나이그룹에서 동일한 혈액 특성을 갖는 남성의 수이다. 위 표에서 마지막 열은 이러한 분석에서 초기 또는 기초확률 선택의 중요성을 강조하는 것이다. 분석 기술은 학생들이 피고측의 주장에 대하여 또 다른 확률적인 면을 탐구할 수 있도록 한다. 법정 전문가(법의학자)는 7개의 범죄사실로부터 혈액증거물을 합동으로 조합함으로써 분비선 PGM2 특성을 갖는 B 유형이라는 결론에 도달하였다. 아래의 표는 각각의 범죄현장으로부터 취해진 증거물들로부터 식별이 가능하도록 해주는 유전적 정보를 나타낸다. 학생들은 각각의 분리된 범죄 사실에 대하여 Jamieson의 죄에 대한 개선된 확률을 계산하고 각각

의 경우에 대한 증거물로부터 피고인에게 훨씬 더 적은 죄를 물을 수 있는 것을 발견하는 분석기술을 사용할 수 있다.

희생자	공격자로부터 기인하는 유전적 표식	유전적 표식을 갖는 모집단의 비율
A	B, 분비선	0.08
B	B 또는O, 2 또는 2 또는 2	0.17
C	B, 분비선	0.08
D	2 또는 1 또는 1-	0.26
E	B, 분비선, 2 또는 2	0.0056
F	AB 또는 B, 분비선, 2	0.0048
G	B, 분비선	0.08
합성결과	B, 분비선, 2	0.0032

이 응용문제는 학생들이 다수의 윤리적 논쟁을 시험해 볼 수 있도록 한다. "죄가 입증되기 전까지는 무죄다."라는 원리원칙은 죄에 대한 법정증언을 듣기 전의 사전확률이 반드시 영(0,zero)이어야 한다는 것을 의미하는가? 만약 죄에 대한 사전확률이 영 이라면 이러한 확률을 움직일 수 있는 증거는 세상에 없다. "증거우선"과 "의심할 여지없이 합리적이다."에 대하여 어떠한 양이 합법적 기준이 되는가? 미국의 판결체계가 법정의 배심원들이 위치한 자리의 배심원들에게 베이지안 방법을 적용할 것을 기대할 수 있거나 또는 기대해야만 하는가? 만약 그렇지 못하다면 배심원들이 법정전문가(법의학자)가 모든 남성들의 0.0032가 공격자의 유전적 표식을 가졌다고 증언한 것과 같은 수치의 특성을 어떻게 알아차릴 수 있단 말인가?

5. 결론

우리는 위에서 학생들이 실제 자료를 인용(포함)하는 다양한 응용문제에 조건부확률과 베이즈 정리를 완전히 적용하면서 조건부확률과 베이즈 정리에 대한 직관적인 이해를 발전시킬 수 있는 예제들을 살펴보았다. 더 나아가 조건부확률의 근간이 되는 연속적인 관계를 학생들이 올바르게 인식할 수 있도록 도움을 주는 몇 가지 기술을 설명하였다. 또한, 위에서 서술한 몇 가지 기술(Technology)은 초기확률의 선택과 연구 대상이 표본 크기의 결과로 생기는 민감도(Sensitivity)에 대한 탐구를 용이하게 한다. 조건부확률을 가르치고 배우는 것은 통계교육개선을 특징 지워주는 기술의 사용과 실제 데이터, 개념적 이해, 활동적(자발적)

학습과 같은 특성들에 의하여 발전되어 질 수 있다고 믿는다. 우리는 중요하고도 흥미로운 예제들과 통계교육과정에 이러한 내용이 포함되도록 적극적인 활동을 고려할 때 조건부확률을 더 이상 이해하기 어렵고도 난해한 개념이라고 뒤로 남겨둘 필요가 없다고 생각한다.

참고 문헌

1. Cobb, G. "Teaching Statistics," in *Heeding the Call for Change: Suggestions for Curricular Action*, ed. L. Steen, MAA Notes No. 22, Washington: Mathematical Association of America, pp. 3-43. 1992
2. Cobb, G. "Reconsidering Statistics Education: A National Science Foundation Conference," *Journal of Statistics Education* v. 1, n. 1. 1993
3. DeGroot, M., *Probability and Statistics* (2nd ed.), Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co., Inc. 1986
4. Fienberg, S.(1990), "Legal Likelihoods and A Priori Assessments: What Goes Where?," in *Bayesian and Likelihood Methods in Statistics and Econometrics* (Essays in Honor of George A. Barnard) (1990), eds. S. Geisser, J. S. Hodges, S. J. Press, and A. Zellner, North-Holland, pp. 141-162.
5. Gastwirth, J.(1987), "The Statistical Precision of Medical Screening Procedures: Application to Polygraph and AIDS Antibodies Test Data," *Statistical Science* 2, 213-238.
6. Gordon, S., and Gordon, F. (eds.)(1992), *Statistics for the Twenty-First Century*, MAA Notes No. 26, Washington: Mathematical Association of America.
7. Hoaglin, D., and Moore, D., (eds.) (1992), *Perspectives on Contemporary Statistics*, MAA Notes No. 21, Washington: Mathematical Association of America.
8. Moore, D. (1992), "What is Statistics?," in *Perspectives on Contemporary Statistics*, eds. D. Hoaglin and D. Moore, MAA Notes No. 21, Washington: Mathematical Association of America, pp. 1-17.
9. Rossman A. J., and Short, T. H.,(1995), "Conditional Probability and Education Reform: Are They Compatible?," *Journal of Statistics Education* v. 3, n. 2.