Historia Mathematica Vol. 15, No. 1, 2002, 115-134

유클리드 기하에서 테크놀로지 활용을 바탕으로 설명적 증명의 意味와 그에 따른 학습자료 啓發*

단국대학교 수학교육과 **고상숙**

Abstract

The increasing use of computers in mathematics and in mathematics education is strongly reflected in the teaching of Euclid geometry, in particular in the use of dynamic graphics software. This development has raised questions about the role of analytic proof in school geometry. One can sometimes find a proof which is rather more explanatory than the one commonly used. Because we, math educators are concerned with the explanatory power of the proofs, as opposed to mere verification, we should devise ways to use dynamic software in the use of explanatory proofs.

0. 서론

현대 정보화 시대를 맞아 우리는 인터넷을 통한 수많은 정보의 홍수 속에 살고있다고 해도 과언이 아니다. 오늘날 사회가 발달할수록 경제분야에서 빈익빈, 부익부 현상이 두드려지는 것처럼 태크놀로지를 활용하는 교육현장에서도 같은 현상을 예측할 수 있다. 즉, 태크놀로지를 통해 정보를 잘 선택하고 현장 학습에 잘 활용하는 교사는 새로운 아이디어를 계발하고 더 효과적인 교수법을 고안하는데 더욱 발전할 수 있는 가능성이 높아지는 반면에, 테크놀로지 사용에 두려움을 지니고 활용을 하지 않는 교사는 날이 갈수록 테크놀로지 활용에 무관심하여져 더욱 더 활용의 효과를 도외시하게 될 것을 짐작할 수 있다. 테크놀로지에 대한 이러한 교사의 태도는 정보화 시대에 미래 시민이 될 학생의 학습에 직접적인 영향을 미친다는 사실은 자명하다. 이는 사범대학의 교사교육에서 예비교사에게 테크놀로지를 활용한

* 이 연구는 2000학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음.

과목이 다수 제공되어서 예비교사는 이런 과목에서 충분한 경험을 쌓고, 수학 교수-학습에 이를 활용할 수 있는 능력 계발이 꼭 필요하다는 것을 의미한다.

본 연구에서는 첫째, 그간 딱딱한 증명으로 일관되었던 유클리드 기하에서 설명적 증명의 의미를 고찰하여 보고, 둘째, 자료가 너무 부족한 현실에서 역동성을 지닌 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 설명적 증명에 바탕을 둔 학습 자료를 계발하여 (사범)대학 기하 강의에 유용한 자료를 제공하는 것을 목적으로 한다. 즉, 기하수업에서 지금까지 사용해왔던 설명적 증명의 의미를 이해하고, 과거에는 상상할 수 없었던 정확성과 다양성을 통해 설명적 증명에 필요한 문제탐구를 시도해봄으로써 기하학이 얼마나 유용하고 재미있는 과목인가를 경험하도록 도울 수 있길 기대해본다.

1. 연구의 배경

기하학은 지난 150여 년 동안 우리의 관심의 대상이 되어 왔음에도 불구하고 대부분 사람들은 아직도 기하학을 전통적인 유클리디안 관점으로 생각한다. 그러나, 이런 논리적이고 연역적이며 증명 위주의 체계로 구성된 학문이라는 생각은 다소 불완전하다. 최근의 몇 저서들은 다른 관점을 강조함으로써 기하학을 수정하고 있다. 학교기하는 공간 지각력의 배양, 물리적 세계에 대한 이해, 다른 수학적 개념의 표현수단의 기하학적 언어, 연역적인 이론체계 등 기하의 여러 측면과 여러 가지 접근방법이 균형 있게 고려되어야 한다[2]. 여기서 기하학의 한 측면은 물질적, 또는 구체적 대상에 관한 것이고 이것은 도형이나 다이아 그램과 같은 시각적 표상으로 전환되고, 다른 하나는 기하학의 증명 구조와 논리적 연역적인 성격에 관한 것인데 이것은 어휘적 명제로 전환된다.

우리는 학생들이 무엇을 배워야 하며, 어떤 주제가 보다 더 중요하게 다루어져야 할 지를 알고 싶어한다. 이에 대해 모든 학생들은 추론, 문제해결 그리고 수학적인 의사소통을 배워야 한다([26], [27])고 답할 수 있다. 또한 수학과 7차 교육과정에 따르면 21세기의 지식기반, 정보화 기반 사회에서의 학교 교육의 중점은 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 있다. 이에 대비하기 위한 수학과의 역할은 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학을 사용한 또는 수학을 통한 정보를 처리하고 교환하는 능력, 문제 해결력, 창의력, 수학적으로 사고하는 성향, 사고의 유연성, 자신감 등의 수학적 힘(mathematical power)을 기르게 할 필요가 있다. 본 연구에서는 학생들이 이러한 능력들을 키울 수 있게 돕기 위해 먼저 학습환경을 자기주도적으로 수학적 성질을 탐구하고 논의(의사소통)할 수 있는 테크놀로지 환경이 제공되었다. 또한, 본 연구의 목적을 위해 다음과 같은 연구의 배경이 고려되었다.

1.1. 수학적 탐구

수학적 탐구활동은 본 연구의 학습자료 구성의 기저를 이룬다. '탐구한다'란 Random House Inc의 *Webster's Desk Dictionary*[31]에서 '자세히 관찰하고; 체계적으로 조사하고 모든 가능성을 탐구하며; 발견을 목적으로 비교적 큰 규모로 탐색하는 것이다.'라고 규명하였다. 본 연구에서는 테크놀로지를 활용한 탐구활동이 이루어짐을 가정한다. Orton[28]은 두 가지로 탐구의 의미를 분류하였는데, 한가지는 미리 세워진 수학적 결과에 귀결될 수 있게 하는 닫힌 탐구(closed explorations)와 다른 하나는 결과가 미리 알려지지 않고 전혀 선명하지도 않아, 순수하게 탐구 그 자체라고 할 수 있는 열린 탐구(open explorations)라 하였다. 본 연구의 탐구문제에 사용될 탐구의 목적은 아래와 같다.

* 학습자가 정리를 발견하게 하기 위해
* 학습자가 각 요소간의 관계성에 익숙해지게 하기 위해
* 학습자가 이미 알고 있는 개념을 적용하게 하기 위해
* 주제에 대한 연역적 토론 이전에 직관적 지식 또는 개념의 이해를 구성하게 하기 위해

우리 교육자들 사이에 학습자는 아이디어를 사용하여 이성적으로 문제를 풀고 추론하기 전에 구조사이에 관계와 개념의 직관적 이해를 획득해야한다고 지지하는 목소리가 있다. Fey[14]는 탐구적 경험은 수학의 어느 분야나 수준에서 이론을 정립하고 문제 해결을 위해 필수적인 강한 직관력과 추측하는 정신을 보장한다고 주장하였다.

탐구의 성격은 학습자와 분리하여 생각할 수 없다. 그것은 학습자의 노력과 창의성에 달렸으며 조사하는 과정은 문제 해결로 유도된다. 어떤 점에서는 발견, 조사, 문제해결이라는 용어와 다르게 일어나는 과정사이에 존재하는 뚜렷한 관계성이 있다. 탐구에는 지루한 교과서 문제가 아니라 반드시 실생활 문제는 아니라도 실제적인 문제이다. 문제의 성공적인 키는 필요한 지식과 기술을 소유하기 위해서만 아니라 구조 망을 형성하기 위해서도 학습자에게 달려 있다.

Ponte와 Matos[30]에 따르면, 수학적 탐구에서 학습자는 수학자의 역할을 한다고 한다. 충분히 복잡한 상황, 대상, 현상, 기저가 주어졌을 때 학습자는 그것을 이해하려하고, 일반화를 꾀할 수 있는 패턴, 관계성, 유사점, 그리고 다른 점을 찾으려 한다. 더구나 그들은 문제 해결과의 차이점을 다음과 같이 구분하였다.

> 수학적 탐구는 문제해결 활동과 공통점을 지닌다. 그들은 복잡한 사고과정을 포함하고 학습자의 열의 있고 창의적인 참여가 요구된다. 하지만 그들은 뚜렷한 차이점이 있다. 수학적 문제해결은 문제가 잘 정의되어 주어지는 반면에 탐구는 그렇지 않다. 학습자에게 주어진 첫째 과제는 탐구를 더 정확하게 하는 것이고 수학적 제시 활동에 대해 공유

할 수 있는 형태로 만들어 가는 것이다(p. 239).

탐구는 열린 문제(open-ended)이고 다른 많은 방법으로 접근이 가능하다. 이런 점은 Harlow[17]에 의해 주장되었는데 탐구하는 기회는 내적으로 동기가 일어나고, 탐구적인 행동 자체로 만족하며 정보에 대한 실질적 필요성 그 이상에 의해 요구된다고 말하였다.

본 연구에서 사용할 Geometer's Sketchpad 기하 소프트웨어는 역동성을 지니고 있어 사용자의 통제 하에 본 연구 목적에 맞는 탐구활동이 가능하다.

1.2. 기하학에서 증명

수학과 수학교육에서 특히 역동적인 그래픽 소프트웨어 환경에서 컴퓨터의 활용이 자주 기하 수업에서 거론되어왔다. 이런 발달은 학교 기하에서 분석적 증명의 역할에 대해 의문이 제기 되었다. 그런 소프트웨어의 능력은 우리로 하여금 시각적 효과를 선호한 나머지 이해의 도구로써 분석적 증명이 필요하지 않다거나 혹은 정당화를 위한 분석적 증명이 많은 경우들의 조사로 대체될 수 있다고 생각하게 할 수도 있다. 본 논문은 수업에서 역동적인 소프트웨어를 탐구학습을 위한 좋은 도구로써 뿐만 아니라 학생이 수학의 정리가 참임을 알 수 있도록 돕는 도구로써 간주한다. 그러나 증명이 없는 정당화는 수학의 이론과 실제에 적합하지 않음을 주장하고, 그런 도구로써 소프트웨어만으로는 학생에게 왜 정리가 참인지, 더 나아가 왜 그것이 항상 참인지 보일 수 없으며, 그래서 중요한 통찰력의 근원으로써의 분석적 증명을 대체할 수 없다. 즉, 본 논문은 분석적 증명이 설명적 가치를 위해 쓰여질 때만 그 나름대로 충분한 역할을 할 수 있음을 시사한다. 분석적 증명이 수학적 이해력을 높일 때, 그것은 수학적 실제를 반영할 뿐만 아니라 불가분한 교수학적 활동으로 존재한다.

수학자들은 유클리드이래 증명을 수학의 필수적인 부분으로 여겼다. 그들은 증명을 명제의 타당성을 세우는데 필수 불가결한 것으로써 보았기 때문에 정리를 증명하고, 증명 방법을 정당화하는데 많은 노력을 기울였다. 그럼에도 불구하고 수학에서 증명과 참사이의 관계에 대해, 또 적절한 증명을 구성하는 것에 대해 많은 논란이 있어왔다. 오늘날까지도 수학적 증명에 대해 일관성 있게 주장되는 이론이나 실제는 없다([21], [8], [23], [38]). 사실, 수학에서 "semi-rigorous proof"[40], "perimental mathematics"[11], "zero-knowledge proof"[6], 그리고 "holographic proof"[4]와 같은 새로운 용어에 잘 나타나 있듯이 시대가 변함에 따라 새로운 문제와 새로운 계발에 대응하여 증명도 발달을 계속하고 있다.

아직 증명은 수학자들에겐 중요한 일이며 그런 이유로 증명은 학생에게 실제와 그 증명의 중요성을 가르치기 위해 수학교육과정에 명시된 목표가 되어왔다. 증명이 수학 전 교육과정에 스며있다 하지 않더라도 기하에선 전문적으로 자리잡고 있다. 공리적인 형태로 주어지는 것이 최우선적인 이론이었기 때문에 역사는 기하학에 수학적 증명에 관해서 특권적인 위치를 부여하였다. 어쨌거나 수학적 추론이 이상적인 형태를 취하는 영역으로써 기하학을 간주

해왔다.

오늘날의 교육과정에서도 이런 역사적인 발달을 잘 반영하고 있다. 학생이 우선 증명의 개념과 그와 관련된 용어(공리, 정리, 연역적 방법, 가설)를 처음 대하게 되는 곳이 기하학 시간이다. 또한, 수학자처럼 행하도록 (정리를 증명하는 것과 같은 것을) 요구받는 곳이 기하 시간이기도 하다. 증명의 중요성은 공간적 대상을 표현하는 것으로 알려진 공리적인 체계와 함께 공간적 대상에 대한 연구로써 여기는 학교기하에 대한 관점에서 찾을 수 있다[7]. 우리나라에서 적어도 기하는 연역적 증명을 위한 영역으로써 가르쳐지고 있다.

학교 기하에서 증명에 대한 중요성은 교과 영역을 뛰어넘어 기대되는 이점을 지닌다. 일반적으로 기하 교수-학습의 중요한 목표는 사고력 계발, 실생활에 대한 공간적 직관력 계발, 더 높은 수준의 수학을 공부하기에 필요한 지식 계발, 그리고 수학적 문제를 해석할 수 있는 능력 계발을 포함한다([12], [26], [36]). 그러므로 기하 증명은 논리적 추론을 위한 훈련으로써 받아들여진다[36]. 학생은 증명을 이해하고 구성하는데 자신감을 키울 수 있을 뿐만 아니라 사고의 일반적 정확성을 키울 수 있다[26].

불행하게도 이와 관련된 몇 개의 연구는 대다수의 학생이 증명에 대해 적절한 성취를 이루지 못한 것으로 나타났다([13], [24], [33]). 더구나 수학적 증명에서 이뤄진 학습이 추론 기술을 교육과정의 다른 영역으로 적용할 수 있는 능력을 가져온다는 가설을 뒷받침할만한 연구 또한 없다[18]. 흔히 가정으로부터 보조정리를 거쳐 결론으로 나아가는 전통적인 증명 방법은 증명의 타당성을 확보하는 데는 매우 적절한 방법이지만 최소한의 필수적인 정보만을 간결하게 제시하므로, 증명의 이해와 의사소통 나아가 증명을 구성하는 능력을 개발하기 위한 적절한 방법이 못된다[2]. 이러한 이유로 연역적 증명의 사용만이 논리적인 사고자를 양성하며, 교육과정에서 그런 위치를 찾아야한다는 근거에 더 이상 방치할 수 없게 되었다.

2. 연구방법

기하 학습에 필요한 컴퓨터를 활용한 학습자료를 계발하기 위해서 첫째, 학습자료의 필요성을 암시하는 설명적 증명의 의미를 문헌을 통해 고찰하여 보고, 둘째, 유클리드 기하를 중심으로 현재 광범위하게 사용되는 프로그램(GSP)을 활용하여 시각화의 효과를 극대화한 학습자료를 구성하였다. 자료 구성에 있어서 컴퓨터의 역동성은 수학의 개념을 소개할 때뿐 아니라 역동적이고 순환적인 탐구과정에도 가장 우선적으로 적용되므로 가르치는 사람은 본 학습활동 그대로를 수업에 직접 사용함으로써 역동적인 수학학습을 기대할 수 있게 된다. 컴퓨터를 수학학습 보조도구로 사용하여 효율적인 학생들의 탐구학습에 의한 증명능력을 향상시킬 수 있는 학습자료를 계발하려는 것이 목적이므로 본 연구는 다음과 같이 진행되었다.

(1) 설명적 증명에 대한 관련문헌의 수집과 분석

(2) 수학학습 내용 분석

(3) 프로그램 활용을 통한 학습활동 모형 구성

(4) 구안된 학습활동 모형의 분석 검토

위 사항 중 수학내용을 분석하고, 프로그램을 계발하는 과정은 매우 많은 시간이 소요되는 부분으로써 수학내용을 프로그램화 할 수 있는 능력이 가장 요구되는 과정이므로 연구자의 인내와 노력이 어느 때보다 많이 필요하였다. 특히 본 연구는 테크놀로지의 효과를 최대화할 수 있도록 구성되었으므로 오늘날 현장에 직접 사용할 수 있는 필요한 자료계발에 주안점을 두었다.

3. 연구결과

3.1. 설명적 의미로써 증명에 대한 고찰

3.1.1. 수학에서 컴퓨터의 영향

수학에서 컴퓨터의 사용은 증명에 대한 관점에 많은 변화를 가져왔다[19]. 홀간(Horgan)은 *Scientific American* 의 1993년 9월호에 "증명의 종말"이라는 제목의 기사를 발표하였다. 홀간의 발표를 가져온 가장 큰 이유는 zero-knowledge proofs, holographic proofs, 4색 정리에 대한 증명 같은 긴 증명의 해결에서의 컴퓨터의 중요한 역할 때문이었다. 이런 개혁적인 증명마저도 그들이 분석적 증명이라는 점에서 전통적이라고 할 수 있다. 더 많은 수학자들이 실험적으로 수학적 성질을 확인하기 위해 컴퓨터를 켜는 것으로 보아 연역적인 증명 사용을 종식하고 있다고 하는 홀간의 주장은 우리를 놀라게 한다.

홀간은 수학적인 개념을 논의하는데 컴퓨터의 그래픽과 계산기능의 능력에 의해 감명을 받은 "수학자들이 어떤 명제의 타당성은 컴퓨터나 실생활 문제와 비교를 통해 더 잘 이루어진다는 것을 믿게되었다."고 주장한다[19]. 실제, 1991년에 초간 되어 분기별로 발간되고 있는 학술지, "실험적 수학(Experimental Mathematics)"은 이런 주장을 지지한 듯하다. 이 새로운 저널은 정리나 증명보다는 중요한 추측을 제시하고, 그것들이 어떻게 탐구의 과정에서 얻어졌는지를 묘사하는 컴퓨터 탐구결과를 주로 발간하고 있다. 그것은 이 학술지의 기고자나 편집자들이 "증명은 사라졌다."고 생각하는 것은 결코 아니다. 편집자인 Epstein과 Levy는 그들의 "수학에서 실험과 증명"이란 글에서 컴퓨터 시대에 실험의 향상된 가능성을 - 컴퓨터의 활용은 수학자에게 예제의 조사를 통해 수학의 요소의 정확성을 조사하는 도구와 실제의 또 다른 관점을 제공한다[11] - 지적하였다. 동시에 그들은 이런 실험이 수학적 스킴

에 잘 적용되는지를 다음과 같이 묘사하였다.

> 우리는 증명에 가치를 준다: 추측하는 것보다는 증명될 수 있는 (실험적으로 영감 받은) 결과가 더욱 바람직하다는 것… 저널, "실험적 수학"의 목표는 그들의 증명을 없애는 것이 아니라 연역적 증명의 발견에서 역할이다. … 우리는 수학의 엄격성을 위태롭게 하는 것이 아니라 수학연구에서 컴퓨터의 사용은 여러 가지 방법으로 그 엄밀성의 가능성을 높이는 것이다(p. 674).

3.1.2. 기하 교수-학습에서 컴퓨터의 영향

교실에서 사용 가능한 새로운 도구와 활동의 장점을 이용하고자 한다면 컴퓨터가 수학을 가르치는 방법을 바꾸고 있다고 말할 수 있다. 교수에 대한 새로운 시도는 늘 교사들의 토론의 대상이다. 역동적인 그래프의 능력을 지닌 소프트웨어의 출현은 새로운 도구가 적절한 특히 기하 수업에서 더 많은 관심을 끌었고 전통적인 것과 다소 다른 목표지만 교육과정에서 IT과목의 출현과 함께 그 영역이 점차 확대되고 있다.

기하 소프트웨어는 도형을 그리고 다루는 것을 간단하고 의미 있게 해결할 수 있게 돕는다. 예를 들어 Geometric Supposer[32], Geometer's Sketchpad[20], Cabri Geometry[22] 등은 매우 높은 정확도를 가지고 작도를 구성함으로써 증명을 이해하게 돕는다. 이것은 학생으로 하여금 증명의 일부분을 차지하거나 증명되어야하는 명제의 중요성을 인식하게 한다. 이런 소프트웨어를 사용하여 그들이 만든 구성의 주어진 성질을 탐구함으로써 추측을 쉽게 시험할 수 있고 심지어 새로운 성질을 "발견"할 수도 있다. 예를 들어 GSP의 학습자료는 7가지 제목아래 만들어진 몇 개의 탐구부분을 포함하는데 대부분 전통적인 기하교육과정이 아닌 조사, 탐구, 제시, 구성, 문제, 아트, 그리고 퍼즐[20]로 구성되어 있다. 컴퓨터가 추측을 제시하고 테스트하는 것을 용이하게 하기 때문에 교육과정은 더 많은 실험을 유도할 수 있다. 탐구라는 것이 분석적인 학문으로써 수학에 대한 전통적인 인식과 증명의 중요 역할과 모순되는 것은 아니다. 그러나 불행히도 교육자들 사이에 이런 능력 있는 소프트웨어의 소개와 탐구에서 효과적인 사용으로 인해 기하에서 연역적인 증명은 수학적인 정당성을 위한 실험적인 접근에 대한 선호에 비춰 제거되어야 한다는 관점에 지지를 이끌었다. 예를 들면, Mason[25]은 역동적인 소프트웨어로 연속성에 반해, 무한 수의 경우 또는 엄청난 많은 경우를 조사할 수 있고, 우리는 수학적 정리가 참임을 보이는 것은 컴퓨터로 신속하게 탐구할 수 있는 거대한 범위의 경우로 가능해진 관찰을 통해 이루어질 수 있다고 주장하였다(p. 87). 이런 관점은 컴퓨터의 사용의 증가로 증명은 더 이상 수학의 이론과 실제에 중심이 아니다라는 오해를 일으키는 경향을 가져왔다. Greeno[15]는 이런 오해에 대한 우려를 다음과 같이 나타냈다.

> 교육적 실행에 있어 고등학교에서 증명이 사라져야 한다는 경향에 너무 놀라며 이것은

수학에서 증명의 인식론적 중요성에 대한 더욱 적절한 이론적 설명에 의해 수정되어야 한다고 믿는다(p. 270-271).

예를 들어, 학생이 삼각형의 각 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다는 정리를 증명하길 원한다고 하자. 종이 위에선 학생은 한 삼각형 위에 세 수직이등분선을 그리고 이것들이 한 점에서 만남을 보일 수 있다. 그러나 GSP나 Cabri Geometry를 사용하여 이 작도를 하면 중요한 이점을 이용할 수 있다. 학생은 화면상에 삼각형의 모양을 다양하게 변화시켜가며 이 점의 존재를 확인할 수 있다. 한 번 그려지면 이 수직이등분선은 정확하게 다시 그려질 수 있으며 이 과정은 삼각형의 수직이등분선은 삼각형의 모양이 어떻게 변하든 한 점에서 만난다는 사실을 보여준다. 이것은 적어도 종이 위에 수많은 삼각형을 작도를 하거나, 학생이 그 많은 것을 작도했다는 것을 상상하는 것이나 같다. 학생은 이 능력 있는 기능을 통해 이 정리는 항상 참임을 확신하게 된다. 이것은 분명히 학생의 정신적 상을 형성하도록 돕고 [25], Wittgenstein[39]이 "증명그림"(proof-picture) 또는 "자체 증거된 명제"(self-evident proposition)이라던 것을 보게 한다. 만약 학생이 일반적인 결론에 도달하고 수직이등분선은 오직 한 점에서 만난다를 구성하기에 충분하리만큼 이 탐구를 간주하는 것은 자연스럽다. 이것은 정리에서 학생에게 자신감을 주는 탐구의 가치를 나타낸다.

그러나 대부분의 교육자들은 학생에게 추측을 세우고 이를 테스트하기에 유용한 탐구일지라도 증명을 대신하지 않는다는 것을 가르쳐야 한다는 사실에 동의한다. 또 역시 증명을 도입하기 위해 또는 적어도 교사에 의해 제시된 증명을 따르기에 노력할 수 있도록 학생을 동기유발 하도록 돕는 데에 탐구에 의한 경이로운 경험을 사용하려고 한다는 사실이다. 중요한 이유로는 탐구는 분석적 증명에 의해 가능한 확실성을 대신 해주지 못한다는 것이다. 가장 역량 있는 소프트웨어도 학생에게 어떤 사실이 하나의 경우임을 보일 뿐이다. 정말로 필요한 것은 학생이 이것이 왜 그 경우인가를 보는 것이고, 더 나아가 왜 그것은 항상 경우일 뿐인가를 이해하는 것이다.

우리 교육자들 중에도 탐구와 증명은 서로 배타적이라고 생각하는 사람이 있는 것 같다. 첫째, 컴퓨터의 도움을 받든 안 받든, 수학적 탐구는 많은 연역적 추론 자체를 사용함으로 가능하다[10]. Polya[29]는 연역적 추론이 탐구와 문제해결에 핵심임을 알았다. 한 문제를 해결한다는 것은 주어진 자료와 미지수간에 연결을 찾는 것이고, 그러기 위해선 폴야가 발견술-정황적이고 귀납적이고 통계적인 증거자료에다 연역을 사용하는 추론의 한 종류-이라고 불렀던 것을 사용하여야 한다. 둘째, 탐구와 증명은 서로를 보완해주는 분리된 활동이라는 것이다. 둘 다 전반적인 문제해결의 부분들이며 둘 다 수학에서 성공에 필요한 것들이다. 증명이 확증을 주는 반면 탐구는 발견으로 유도한다. 우리는 탐구를 통해 문제의 구조와 일부를 이해하지만 모든 연결에 대해 명백한 이해는 가능하지 않다. 고로 탐구는 정확하게 수식화 되었다 해도 일시적인 결론밖에 도달하지 못한다. 그러나 가정으로부터 전개를 제공함으로써 결론을 확고히 세우는 것은 증명이다. 수학자체에서 증명의 주요 기능은 명제를 확실

히 유효하게 하는 것이다. 증명은 수학적 정리에 대해 가장 큰 타당성과 자신감을 제공한다. 증명도 몇 개의 경우를 수행할 수 있다: 그것은 다른 수학적 진리를 발견, 결론체의 체계화, 그리고 수학적 지식의 의사소통에 이바지한다[9]. 더욱이 증명의 가장 중요한 첨가적인 기능은 "설명"하거나 "명료화"하는 기능이다. 수학자의 눈에조차도 가장 훌륭한 증명은 정리의 참을 세울 뿐만 아니라 그것을 이해하도록 돕는 증명이다. 그러한 증명은 더 설득력이 있고 더 인정받을 수 있다.

학자들은 17세기 초부터 정당화(justification)와 차이가 나는 것으로써 "설명"(또는 명료화)의 중요성을 지적하였다. 유클리드를 자세히 연구했던 Amauld와 Nicole가 그 예이다[5]. 비록 이 두 학자가 유클리드의 업적에 대단한 존경심을 가지고 있었을지라도 그들의 책, "*La loigique ou l'art de penser*"(1674; 1965년에 재 인쇄)에 대해 많은 비난을 받을만하다고 생각했다. 구성요소가 "명료성"(clarification)을 주는 증명보다 "확신감"(conviction)을 주는 증명을 더 많이 다루는 중요한 단점을 지니고 있다고 생각했다. 그들은 "명료성"라는 의미를 '왜 정리가 참인가'를 보일 때 사용하였고, "확신감"의 의미는 '정리가 참임을 보여주는 것을 만족할 때' 사용했다. Barbin는 17세기의 또 다른 기하학자, Lamy가 1683년에 발간된 그의 책에서 확신과 명료화 사이에 구별을 지었다고 말하였다. Lamy는 학생들에게 명제의 증명은 참으로 명제로 받아들이기 전에 명료성을 제공하여야 함을 명심하도록 당부했다. 명료한 증명은 명백한 방법으로 연역법을 통해 정의로부터 결론으로 진행한다. Lamy는 책의 전 부분을 증명의 방법에 할애하였는데 두 가지-하나는 단지 확신을 하는 것, 다른 것은 명료성을 주는 것-를 비교하였다[5].

설명으로써 증명에 대한 또 다른 견해는 고대 중국 수학자에게서 찾을 수 있다. 그들에게 증명은 확신하게 하고, 강조하게 하는 어떤 설명적인 명시였다[34]. 이런 설명적인 명시는 논의(arguments), 발견적 추론, 말을 사용하지 않고 증명으로써 알려진 다이아 그램의 구획들로 구성된 다양한 형태로 구성된다. 가장 유명한 증명은 구획된 정사각형의 사용에 의한 피타고라스 정리이다(그림 1 참조). 중국의 수학자들은 단순한 확증에 대조를 이루는 것으로써 그들의 증명의 설명적 힘을 믿었기 때문에 그들은 자주 같은 증명에 대해 몇 개의 다른 증명 법을 고안하였다.

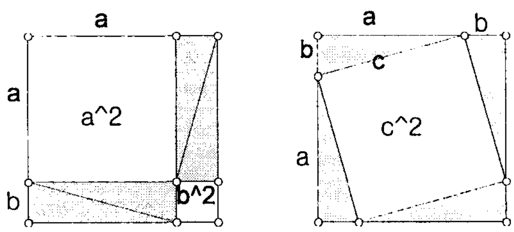


그림 1. 피타고라스 정리

수학 내에서 증명의 주요 기능이 명제를 타당화하는 것이라 하더라도 고대부터 수학자들은 설명하는 증명을 선호하고 주장하여 왔다. 참이라고 알려진 명제를 공부하는 수학교육에서도 증명의 주요 기능은 분명히 "설명하는 것"이다. 수학자에게 중요한 것은 수학교실에서도 중요한 것이다-증명될 정리의 뜻을 이해하도록 돕고 그래서 그 증명을 믿을 수 있는 좋은 근거를 제공하는 증명의 능력. Hanna[16]는 교실에서 이해력을 증진할 수 있는 설명적 증명의 장점을 논의하였다.

삼각형에서 세 각의 이등분선은 한 점에서 만난다를 증명하기 위해선 우리는 각의 이등분선은 각의 양변에서 같은 거리에 있는 점들의 자취이다는 정의적 성질을 이용한다. 비슷하게 세 수직이등분선이 한 점에서 만난다를 증명할 때도 수직이등분선은 선분의 양 끝 점에서 같은 거리에 있는 점들의 자취이다는 정의적 성질을 이용한다. 이러한 증명은 Steiner[35]가 말했듯이 "정리에서 설명되는 구조나 요소의 특징적인 성질을 참고한다."(p. 143)는 점에서 설명적이다. 교실에서 위 증명들은 이 정리들이 왜 참인지 학생이 알도록 돕고, 확신하게 하고, 깨닫게 하는 것으로 여겨진다.

물론 모든 정리가 설명적 증명이 가능한 것은 아니다. 많은 수학적 주제에서 어떤 정리는 모순법, 수학적 귀납법, 또는 비 설명적 방법으로 증명해야하는 경우가 많다. 그러나 기하는 대부분이 증명이 설명적이라는 특별한 입장을 가질 수 있다. 기하 교과서에서 수학적 귀납법이나 제거법과 같은 비 설명적 논의를 사용하는 증명을 찾기엔 매우 드물다. 기하에선 일반적인 방법보다 훨씬 설명적인 방법을 찾을 수 있다. 예를 들어, a, b가 실수일 때 a, b의 산술 평균이 a, b의 기하평균보다 항상 크거나 같다는 것을 증명하기 위해 우리는 어휘적

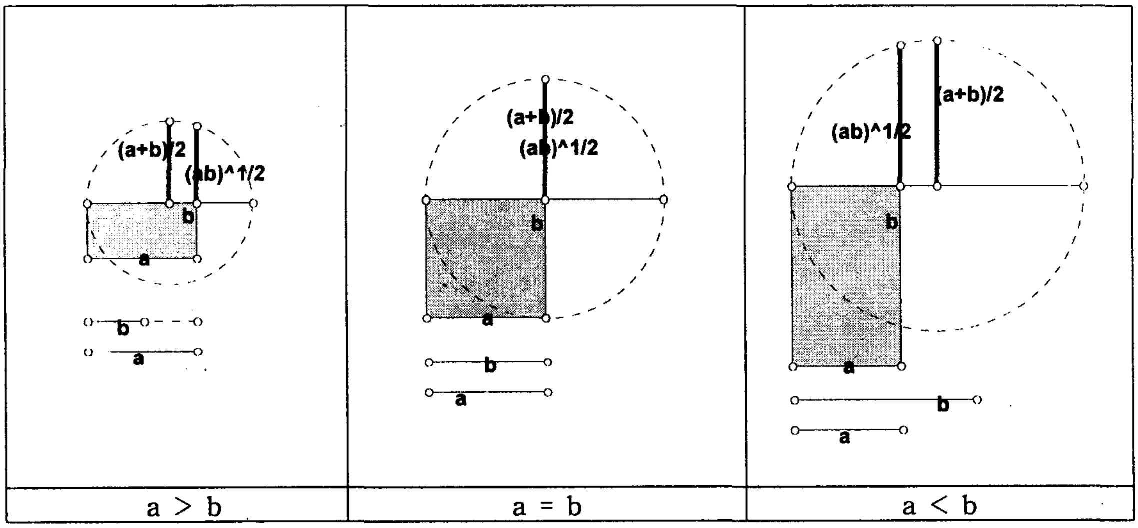


그림 2. 산술-기하 평균

서술을 대부분 사용한다. 그러나 우린 위에서 사용했던 다이어그램의 구획으로 쉽게 설명적인 방법을 사용할 수 있다(그림 2 참조). 뿐만 아니라, 테크놀로지를 이용하면 애니메이션의 기능을 통해 선분 b를 선분 상에서 지속적으로 움직이게 하여 이들의 관계가 성립함을 보다 역동적인 관찰을 통해 확인할 수 있다. 결국, 기하에서 교육자에게 필요한 것은 설명적 증명이 가능한 방법들을 모색하는 일일 것이다.

3.2. 자료계발

학생들이 증명을 어려워하는 이유 중 하나는 증명의 엄밀성과 형식성에 부담을 느끼기 때문이기도 한데 따라서 교사는 수학적인 내용에 대한 기본적인 아이디어를 강조하고 기하학적 직관적인 기본개념이 전달되도록 해야 할 것이다. 그렇다고 연역적 증명을 간과한다는 것은 아니다. 기하는 엄밀한 증명에 의한 공리, 정의로 이루어 진 것으로 연역적 증명은 꼭 필요하다. 다만 연역적 증명을 위해 설명적 증명활동을 충분히 하여 증명에 대한 이해를 깊게 하고 증명의 본질과 증명의 중심 아이디어에 대한 통찰을 갖도록 하는 것이 필요하다. 또한 이러한 활동은 설명적 증명을 활용하여 증명을 스스로 구성하려는 의식을 높일 수 있고 연역적 증명에 보다 쉽게 해결할 수 있다.

제 1장	Cleavers	제 5장	A Property of Trianlges
	정리 1 - 4		정리 1- 4
제 2장	Splitters	제 6장	On Quadrilaterals
	정리 1 - 5		정리 1 - 4
제 3장	Orthocenter	제 7장	The Fuhrmann Circle
	정리 1 - 5		정리 1 - 2
제 4장	On Triangles	제 8장	The Symmedian Point
	정리 1 - 4		정리 1 - 6

다음은 본 연구를 통해 계발된 자료의 목록이다. 본 학습자료는 총 8장으로 구성되어 있지만 공간상의 제약으로 인해 임의로 2, 4, 6, 8장의 정리 1만을 본 연구에 수록하였음에 양해를 구하며 전체 자료는 저자의 Website: http//www.ajowa.com/math…나 전자메일에 의한 다운로드가 가능하다. 학습자료의 구성은 몇 개의 힌트의 창을 마련하여 학생의 설명적 증명 방법을 도왔고, 각 증명은 숨기기/보이기 기능을 부과하여 충분한 탐구를 통해서 연역적 증명을 확인할 수 있게 구성하였다.

4. 결론

기하에 대한 자료를 수집해 보니 자료는 많은데 기하증명의 지도에 대한 통합적인 교수-학습을 위한 시각화를 이용한 효과적인 기하 학습 자료는 매우 부족하였다. 우리 스스로도 모두 기하증명을 어렵다고 느끼며 배웠기 때문에 기하 증명하면 무조건 싫고 불안함을 먼저 느끼게 마련이었다. 그러므로 실험을 통해 충분히 사고를 하여 수학의 정의나 공리를 재발견할 수 있게 설명적 증명의 다양한 방법을 계발하는 것이 필요하다. 이러한 경험을 통해 학생은 좀 더 기하에 대한 친근함을 느낄 수 있을 것이며 이때에 분석적 방법과 종합적 방법을 통합한 보다 엄밀한 기하지도에도 잘 적응할 수 있을 것이다.

오늘날도 학생들이 "왜 이런 어려운 수학을 배워야 해요?"[3]라는 질문을 자주 하는 것을 보면 확실히 학교에서 배우는 수학의 대부분은 일상생활에서 부딪치는 문제를 해결하는 데는 직접적인 도움을 주지 못하는 듯하다. 이럴 땐 Steffe[37]가 말한 "적응성이 있는 교수법"(Adaptive Teaching)에 대한 교사의 능력이 요구된다. 교사는 수학은 단지 문제를 푸는 기술로서보다도 가장 잘 다듬어진 고도의 사고라는 점에서 값진 것임을 인식하고, 학생의 수학적 사고발달을 도울 수 있는 교수법을 사용할 수 있어야 한다. 따라서 앞으로의 교과서를 비롯한 학습자료가 생활 중에 관찰되는 모델이나 스스로 자유롭게 다룰 수 있는 모델을 학습 과정에 많이 도입하여 연역 체계의 이해를 돕는 탐구학습에 의한 점진적이고 단계적인 연습문제를 많이 제시해야 한다.

컴퓨터를 수학학습현장에 도입하려는 의욕은 많은 일선 교사들에게서 발견할 수 있다. 그러나 일선 교사들이 선뜻 손쉽게 컴퓨터를 수업에 도입하지 못하는 이유로써, 컴퓨터에 대한 경험 부족과 컴퓨터를 활용하는 수학학습지도의 방법론에 대한 지식 부족으로 인한 수업준비의 어려움 등을 들 수 있다[1]. 그러므로 본 연구에 의한 학습자료는 사범대학 예비교사에게 기하수업에서 교육적 특성과 효율성을 경험하게 함으로써 앞으로 수학교사가 되었을 때 현장에서도 테크놀로지에 능동적으로 대처할 수 있는 자질을 키우는 효과를 기대할 수 있다. 또, 첨단 기술화가 이루어진 교실환경에 본 연구의 자료를 사용함으로써 기하학에서 설명으로써 증명능력의 발달뿐만 아니라 구체적으로 다음과 같은 기여도를 생각할 수 있다. 일선에서 본 학습자료를 사용한 수업을 받은 학생들은

* 흥미와 동기를 효과적으로 유발시킬 수 있다.
* 수학의 의미를 눈으로 확인할 수 있다.
* 지식의 생성배경을 이해할 수 있다.
* 학습내용을 전체와 연결시켜 생각할 수 있다.
* 지식의 구조상의 관계를 쉽게 파악할 수 있다.
* 많은 경우의 수의 관찰을 통해 다양한 설명적 증명 법을 고안할 수 있다.
* 탐구학습을 통해 새로운 성질을 발견할 수 있다.
* 지필 환경으로는 불가능했던 애니메이션 모드를 사용함으로써 수학의 역동성과 함께 일반화하고 응용할 수 있는 능력을 키울 수 있다.

본 연구의 후속 연구로는 본 자료를 사범대학 수학교육과 학생에게 직접 적용하여 자료 구성에서 힌트 창의 역할과 증명의 효과, 위에 기술한 기여도 등을 조사하여 본 자료의 유용성을 확인해볼 필요가 있다.

참고 문헌

1. 고상숙(2001), **2000년 추계 대한 수학교육학회 연구발표대회 논문집**, 823-865.
2. 우정호(1998), **학교수학의 교육적 기초**, 서울: 서울대학교 출판부.
3. MBC 스페셜(2001. 3. 30), **수학괴담**, [On-line]. http://www.imbc.com/tv/culture/index.html에서 가능.
4. Babai, L.(1994), "Probably true theorems, cry wolf?" *Notices of the American Mathematical Society*, 41(5), 453-454.
5. Barbin, E.(1988), "La demonstration mathematique: significations epistemologiques et questions didactiques," *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, n 366.
6. Blum, M.(1986), "How to prove a theorem so no one else can claim it," *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1444-1451.
7. Clements, D. H. & Battista, M. T.(1992), "Geometry and spatial reasoning." In D. A. Grouses(Ed.), *Handbooks of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: MacMillan.
8. Davis, P., & Hersh, R.(1981), *The Mathematical Experience*, Boston: Birkhauser.

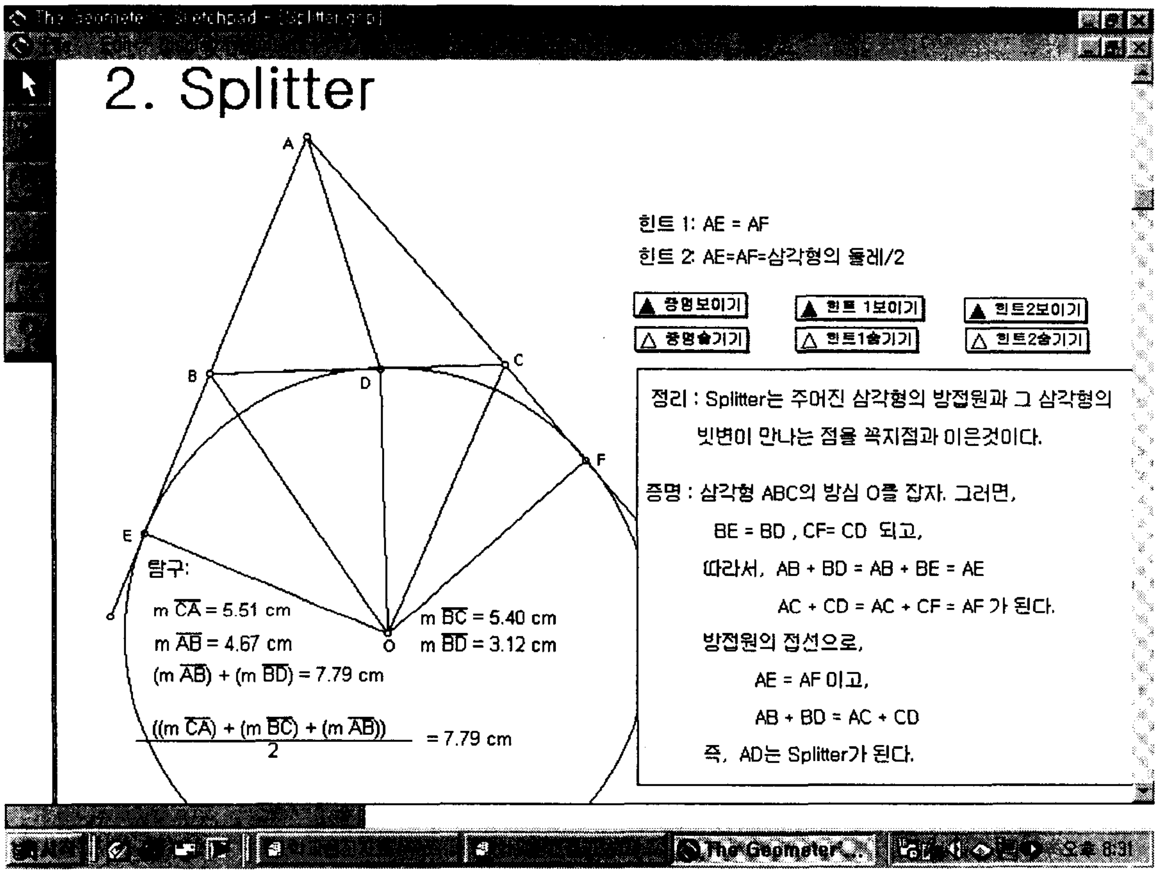
9. de Villiers, M.(1990), "The role and function of proof in mathematics," *Pythagoras* 24, 17-24.
10. Epp, S.(1994), "The role of proof in problem solving." In Shoenfeld(Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
11. Epstein, D. & Levy, S.(1995), "Experimentation and proof in mathematics," *Notices of the American Mathematical Society* 42(6), 670-674.
12. Fehr, H. E.(1973), "Geometry as a secondary school subjects." In K. B. Henderson (Ed.), *Geometry in Mathematics Curriculum: 1973 Yearbook*(pp. 369-380), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
13. Fischbein, E.(1982), "Intuition and proof," *For the Learning of Mathematics* 3(2), 9-18, 24.
14. Fey, J. T.(1983), *Computing and Mathematics: The Impact on Secondary School Curricula*, College Park, MD: The University of Maryland.
15. Greeno, J.(1994), "Comments on Susanna Epp's chapter." In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
16. Hanna, G.(1990), "Some pedagogical aspects of proof," *Interchange* 21(1), 6-13.
17. Harlow, G.(1950), *Curiosity and Exploration: Theories and Results*, New York: Academic Press.
18. Hiebert, J. & Carpenter, T. P.(1992), "Learning and teaching with understanding." In D. A. Grouses(Ed.), *Handbooks of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, New York: MacMillan.
19. Horgan. J.(1993), "The death of proof," *Scientific American* 269(4), 93-103.
20. Jackiw, N.(1991), The Geometer's Sketchpad, Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
21. Kitcher, P.(1984), *The nature of mathematics knowledge*, New York: Oxford University Press.
22. Labroratoire de Structures Discretes et de Didactique Institut d'Informatique et de Mathematiques Appliquees de Grenoble (IMAG)(1988), *Cabri Geometry*[Computer Software].
23. Lakatos, I.(1976), *Proofs and refutations*, Cambridge: Cambridge University Press.
24. Martin, W. G., & Harel, G.(1989), "Proof frames of preservice elementary teachers," *Journal for Research in Mathematics Education* 20, 41-51.
25. Mason, J.(1993), "Questions about Geometry." In D. Pimm & E. Love (Eds.), *Teacher and Learning Mathematics: A Reader*, London: Holder & Stoughton.

26. National Council of Teachers of Mathematics(1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM.
27. National Council of Teachers of Mathematics(2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM.
28. Orton, A.(1992), *Learning Mathematics: Issues, Theory, and Classroom Practice*, London: Cassell.
29. Polya, G.(1957), *How to Solve It: A new aspect of mathematical method*, New York: Doubleday.
30. Ponte, J. P. & Matos, J. F.(1992), "Cognitive processes and social interactions in mathematical investigations." In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes(Eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Context of Practice*(pp. 239-254), Berlin: Springer-Verlag.
31. Random House Inc.(1990), *Webster's Desk Dictionary of the English Language*, New York, NY: Random House Company.
32. Schwartz & Yerushalmy(1986), *The Geometric Supposer*(Computer software), Pleasantville, NY: Sunburst Communications.
33. Senk, S. L.(1986), "How well do students write geometry proofs?" *Mathematics Teacher* 6, 448-456.
34. Siu, M-K.(1993), "Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang Suan," *Educational Studies in Mathematics* 24(4), 345-357.
35. Steiner, M.(1978), "Mathematical Explanation," *Philosophical Studies* 34, 135-151.
36. Suydam, M. N.(1985), "The shape of instruction in geometry: Some highlights from research," *Mathematics Teacher* 78, 481-486.
37. Steffe, L.(1991), "Adaptive teaching." In T. J. Cooney and C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching & Learning Mathematics in The 1990s: 1991 NCTM Yearbook*(pp. 41-51), Reston, VA: NCTM.
38. Thurston, W. P.(1994), "On proof and progress in mathematics," *Bulletin of the American Mathematical Society* 30(2), 161-177.
39. Wittgenstein, L.(1953), *Philosophical investigations*, Oxford, U.K.: Blackwell.
40. Zeilberger, D.(1993), "Theorems for a price: Tomorrow's semi-rigorous mathematical culture," *Notices of the American Mathematical Society* 40(8), 978-981.

부록: 학습 자료

제 2 장. Splitters

정리 1



정의: 우리는 제 1 장에서 각 변의 중점으로부터 삼각형의 둘레를 이등분하는 점을 이은 선분을 Cleaver(자르는 선)이라고 불렀듯이, 본 장에서 삼각형의 꼭지점에서 삼각형의 둘레를 이등분하는 점을 이은 선을 Splitter라고 부른다. 또, 이 세 선분(splitters)의 교점을 Nagel Point라고 부른다.

정리: Splitter는 주어진 삼각형의 방접원과 그 삼각형의 빗변이 만나는 점을 꼭지점과 이은 것이다.

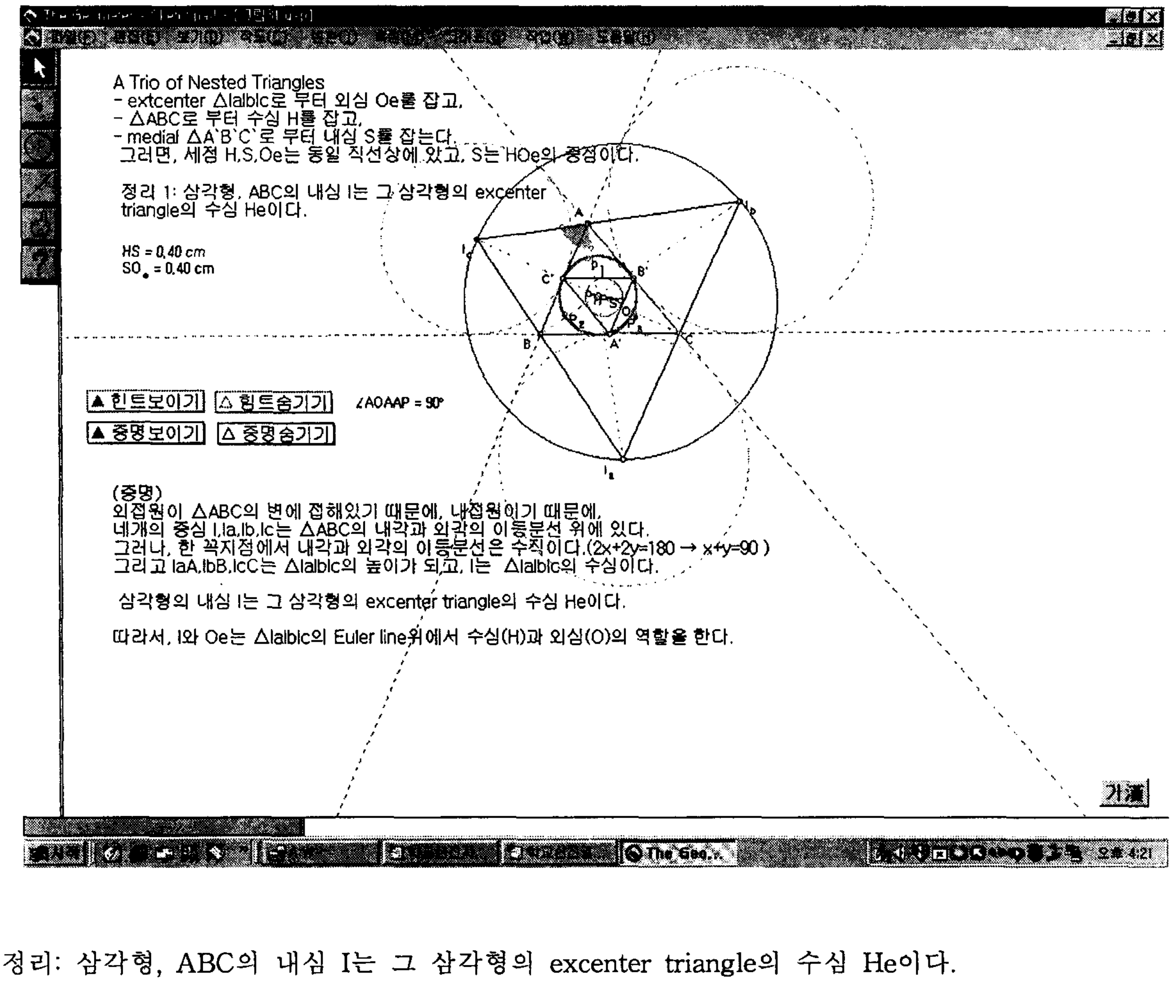
힌트 1: 선분 AE=AF

힌트 2: 선분 AE=AF=둘레/2

본 정리는 선분 AD가 splitter의 조건을 만족하는지를 보이는 정리이다. 학생의 수준에 따라 증명에 필요한 힌트가 2개까지 제공되며, 학생은 마우스로 삼각형의 꼭지점을 움직여서 삼각형의 각 변의 길이를 변화시켜보고 그 각각의 값을 비교하는 탐구과정을 통해 정리를 이해하기 쉬워진다. 학생이 증명할 준비가 되었을 때, 또는 증명을 마친 결과를 확인하고자 할 때 증명 보이기/숨기기 창을 이용하여 증명 결과를 체크할 수 있다.

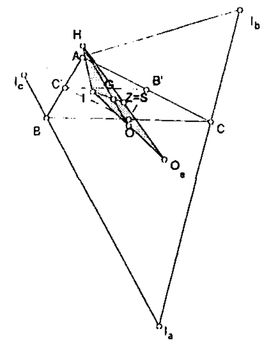
제 4 장. On Triangles

정리 1



정리: 삼각형, ABC의 내심 I는 그 삼각형의 excenter triangle의 수심 He이다.

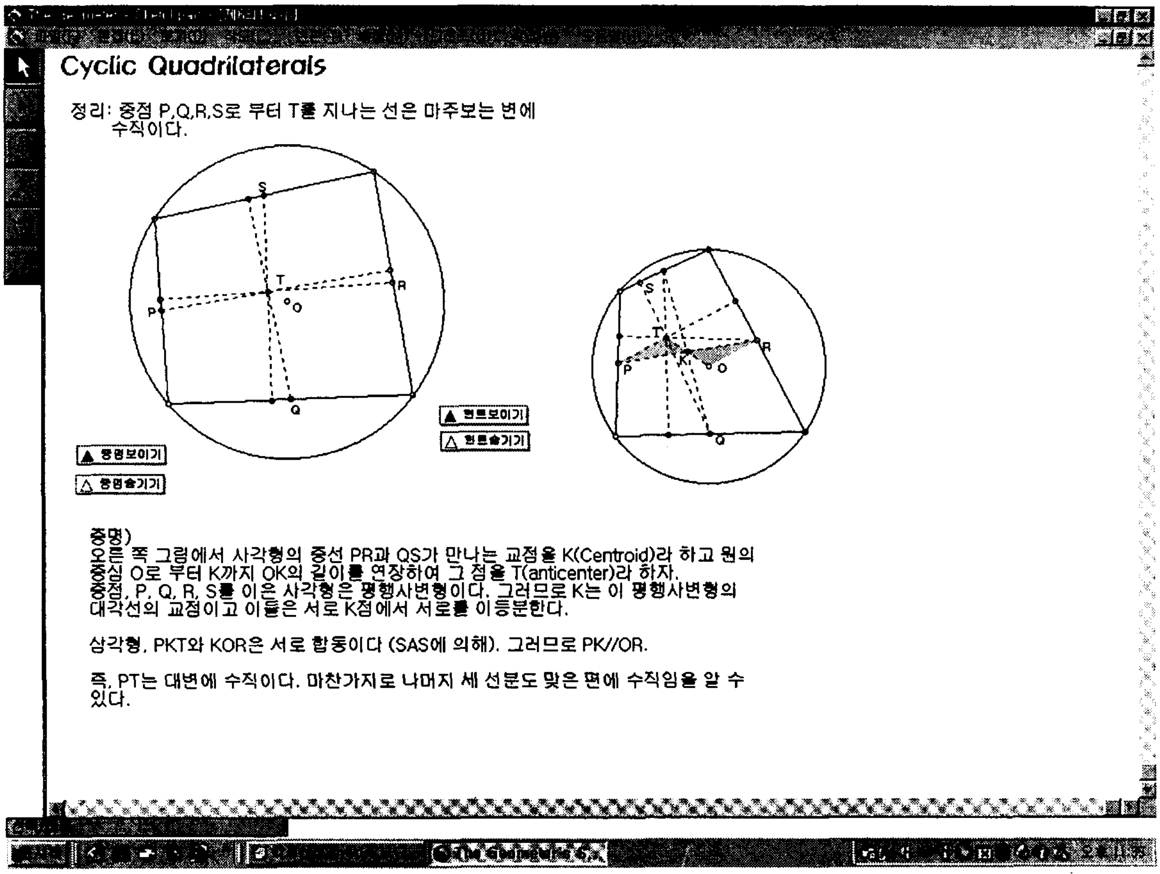
힌트: LcALa=90도.



본 정리는 세 삼각형, ABC, A′B′C′, LaLbLc이 서로 새의 집처럼 접한 관계를 지니며 "삼각형의 수심과 외 삼각형(세 방심을 연결한)의 외심을 이은 선분의 중점은 Medial 삼각형의 내심임"을 보이기 위해 가장 먼저 접근해야하는 성질이다. 힌트로는 각 LcAI의 크기가 90도임을 아는 것으로 정하였다. 처음엔 정리를 증명해 보이려면 매우 난해해 보이나 얽힌 실타래 풀어가듯 그에 선행적 성질을 하나씩 해결하여 나가면 쉽게 목적하는 정리까지 해결해나갈 수 있다. 특히, 다음 정리(정리 2)를 설명할 때 삼각형, HIOe(빗금친 부분)까지 같이 역동적으로 탐구함으로써 점, z가 우리가 원하는 내심임을 설명적 증명을 통해 이루어갈 수 있다.

제 6 장. On Quadrilaterals

정리 1



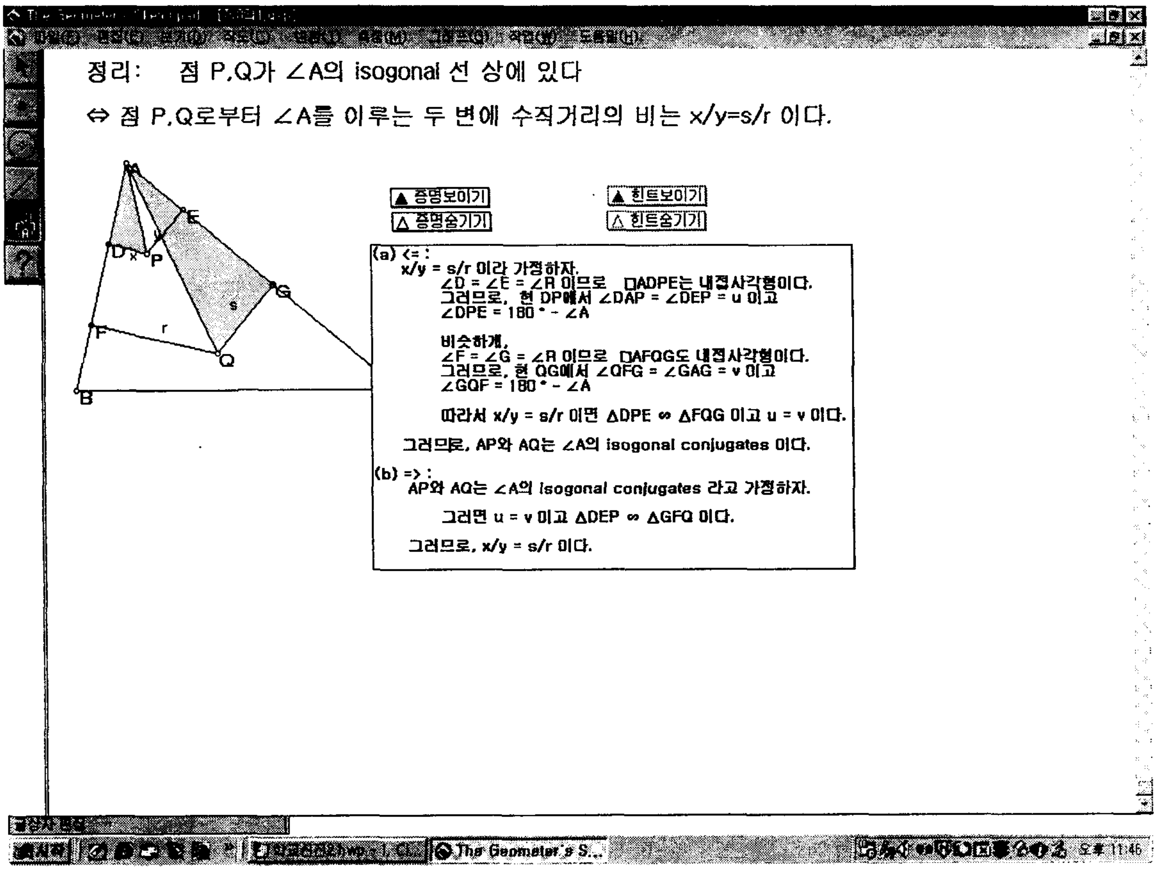
정리: 중점 P,Q,R,S로 부터 T를 지나는 선은 마주보는 변에 수직이다.

힌트: △PKT와 △KOR의 관계

본 장은 원에 내접하는 사각형의 성질을 다루었다. 이는 일반사각형에 대한 성질의 발견 가능성을 제한하는 이유가 되겠으나 오히려 주어진 상황에선 깊이 있는 성질을 연구할 수 있는 장점을 지닌다. 본 정리는 사각형도 무게 중심이 있고, 그를 중심으로 원의 중심에 대한 대응점을 anticenter(반심)이라 한다. 힌트로는 삼각형, PKT와 KOR을 선택하였다. 학생은 이 두 삼각형의 존재를 통해 관계를 파악하고 이것이 문제의 핵심으로 사용할 수 있어야 한다. 이 두 삼각형이 합동임을 보이면 선분 OR과 P로부터 연장선은 평행이므로 동위각 90도 로 해결이 되는 것이다. 본 정리를 다른 말로 바꾸어보면, 내접하는 사각형의 각 변의 중점과 anticenter, K를 연결하는 선분의 연장선은 맞은편 변에 수직이다라고 표현할 수 있다.

제 8 장. The Symmedian Point

정리 1



정리: 점 P, Q가 ∠A의 isogonal 선 상에 있다

⇔ 점 P, Q로부터 ∠A를 이루는 두 변에 수직거리의 비는 x/y=s/r 이다.

힌트: △DPE ∽ △FQG

본 장은 작도의 어려움 때문인지 알 수 없으나 대학의 정규 기하과정에서 그리 알려지지 않은 성질이다. 물론, 오랜 기간에 이뤄진 모든 과거의 이론을 다 가르칠 수는 없다. 하지만 Symmedian point는 현대 기하에서 보석 중의 보석이다라고 할 수 있기 때문에 본 연구과제로 선택되었다. 특히, 지필 환경에서 삼각형의 세 내각의 양변에부터 같은 크기의 각을 작도하기는 그리 쉬운 일이 아니다. 그러나, 컴퓨터 소프트웨어 GSP로는 각의 양변으로부터 처음 한쪽 변에서 선택한 각(PAB)을 지정 각으로써 방향을 의미 있게 선택하고, 다른 쪽 변에 이 지정 각만큼 AC변을 회전 이동(각 CAQ)하면 어렵지 않게 양변으로부터 같은 크기의 각을 작도할 수 있어서 시간을 보다 집중해야하는 부분(증명)에 할애할 수 있게 돕는다. 힌트로서는 닮은 삼각형이 존재함(빗금친 부분)을 나타내주는 것으로 정하였다. 물론 학생의 수준에 따라 힌트의 창이 필요하지 않을 수도 있다. 본 연구에서 힌트는 증명에 있어 해결의 열쇠를 쥐고 있는 부분을 위주로 구성되었다. 그리고 이 힌트는 시각적으로 제공되기 때문에 설명적 증명의 요체라 할 수 있다. 본 장의 정리(1-5)를 직접 학생(중-상 수준의 예비교사)과 사용하여 본 바, 정리 1을 제외한 모든 부분에서 힌트를 필요로 하였고, 힌트를 사용할 때는 설명적 증명에 쉽게 접근하였다. 즉, 힌트는 설명적 증명에서 촉매제 역할을 하고 있음을 알 수 있었다.