Historia Mathematica Vol. 15, No. 1, 2002, 109-114

역사발생적 원리의 비판적 수용에 대하여

경북대학교 수학교육과 **유윤재**

Abstract

By showing that several evidences from the history of mathematics do not follows the naturalness emerging in human being, the learning principles of history of mathematics oriented learning should be replaced both theoretically and practically by the principle of learning from constructivism.

0. 서론

유클리드의 원론은 고대로부터 20세기 초까지 수학 교과서의 전형으로 내려 왔으며 지금도 중, 고등학교의 기하 교육의 원전이 되고 있다. 유클리드의 원론은 특정한 공리계를 정초로 하여 정리-증명이라는 구도로 전개되어 있다. 이 책을 교과서로 사용한 사람들은 이 책의 서술 형식 그 자체가 수학 교수학습지도의 방법이라고 간주하고 그 전개 방식으로 기하학을 가르쳤고 다른 수학도 이러한 틀을 답습하였다. 그러나 이러한 교수학습 방법에 대한 비판은 수학 교육에서 끊임없이 비판되었는데 그 중 하나가 역사발생적 원리이다. 이 원리는 수학을 하나의 생명체로 간주하여 개체발생 과정을 수학사의 발전의 논리로 보는 것이다.

그런데 이와 같은 정의를 따르면 다음과 같은 문제가 제기된다. 수학이 발전해온 과정이 생명체가 발달하는 과정과 동질적이라야 수학의 발전이 생명체의 경우에 해당하는 개체발생적이라는 것을 정당화할 수 있다. 결국 개체발생의 원리와 역사발생의 원리의 동일시할 수 있는가라는 문제로 귀착된다. 본고에서는 수학사에서 나타난 사례를 통하여 이 두 가지 개념은 동일시할 수 없다는 것을 주장한다.

1. 본론

1.1. 역사발생적의 의미

논의를 분명하게 하기 위하여 먼저 역사발생과 개체발생을 구분하겠다. 역사발생은 수학적 지식의 번성 과정에 대한 것이고 이 구조는 수학사의 흐름에서 나타난다. 반면에 개체발생은 생명체의 발생에 관한 것으로서 개체의 성장에서 나타난다. 먼저 역사발생적 원리에 대한 개념이 어떻게 진술되고 있는가를 여러 문헌으로부터 알아보자. Clairaut는 인지발달에 근거한 단계적 변화를 발생적 방법이라고 정의하고 있다.[1] 역사발생적 원리의 초안자라고 하는 Lindner의 정의를 보자.

> 우리는 다음과 같은 교수 방법을 발생적 방법이라고 한다. 즉 소재를 그 자연스런 순서에 따라 다루어, 간단한 것으로부터 합성된 것으로, 원인으로부터 결과에, 보다 작은 것으로부터 보다 큰 것으로, 쉬운 것에서부터 어려운 것으로 나아가되, 하나 하나의 동인을 아주 주의해서 서로 결합하는 것이다.[2]

이것은 우선적으로 개체발생적 개념에 부합되며 역사발생적 원리와의 부합성은 좀 더 논의되어야 하겠다 이러한 견해는 Klein에 의해서 보다 구체적으로 명시되고 있는데[3] 이 정의와 데카르트의 **방법서설**의 제2부에서 나타난 다음 글을 보자.

> …… 둘째는, 내가 음미하는 문제의 감각을 가능한 한 많은, 더구나 그 문제를 해명하기 위해서 필요한 만큼의 작은 부분으로 나눈다.
>
> 셋째는, 나의 사고를 순서에 따라서 이끈다는 것, 즉 가장 단순하며 가장 인식하기 쉬운 것에서부터 시작해서, 조금씩 — 말하자면 단계에 따라서 훨씬 복잡한 것의 인식으로까지 올라가서, 그리고 자연 그대로는 전후의 순서를 가지지 않는 것 사이에 마저도 순서를 상정해서 나아간다. ……

이 두 인용의 내용은 매우 흡사하지만 이 두 인용의 의미는 전혀 다른 기반으로부터 출발한다. 데카르트가 지시하는 것은 환원론이라고 알려져 있는 과학적 방법론의 전형으로서 이 원리가 적용되는 대상은 기계와 같은 것에 적용되며 반면에 개체발생적이라는 개념은 유기체와 관련되어 있다. 다음은 발생적 방법에 대한 포앙카레의 정의[4]이다.

> 어떤 동물의 태아발달은 지질학적 시대의 그의 선조의 전체 역사를 매우 짧은 기

1) 우정호(2000), 수학학습-지도원리와 방법, p. 139.
2) Schubring(1978), 우정호(2000)의 수학학습-지도원리와 방법(p. 141)에서 재인용
3) 우정호(2000), 수학학습-지도원리와 방법, p. 142.
4) Poincare(1953), p.135. 우정호(2000)의 수학학습-지도원리와 방법에서 재인용(p. 143)

간 동안에 경과한다고 동물학자들은 주장하였다. 인간의 정신 발달에서도 마찬가지인 듯하다. 교육자는 아동을 그의 선조가 통과한 모든 단계를 매우 빨리 그러나 어떤 단계도 소실되지 않게 인도해야 한다. 이러한 이유에서 학문의 역사는 우리의 첫째가는 안내자이어야 한다.

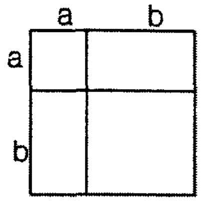
이 정의는 통상적인 개체발생에 대한 정의이다. 포앙카레의 진술에는 개체발생과 역사발생을 묵시적으로 동일시하고 있다.

1.2. 문제의 논의

수학사의 논리는 무엇인가? 과학사의 논리를 설명한 쿤, 포퍼, 라카토스 등의 견해를 수학에도 적용할 수 있을까? 이들의 견해에 따르면 과학사의 논리는 지식축적의 과정이 아니라 다른 지식으로의 대체되는 과정이라는 주장에 세부적으로는 약간의 차이는 있지만 대체적으로 의견의 일치를 보이고 있다. 그러나 수학의 경우는 다르다. 학교 과학에서 보면 고대 또는 중세의 과학적 지식은 과학사적 측면에서 약간 언급될 뿐 무시되지만 학교 수학에서는 과거의 수학적 발견을 전면적으로 무시하지는 않으며 중요한 것을 재구성하여 학습에 활용하고 있다. 결과적으로 보면 어느 시대의 수학적 지식이 다른 시대의 수학적 지식으로 대치되는 경우는 나타나지 않는다. 이것은 수학은 과학과는 달리 지식의 축적을 허용하고 있다는 것을 보여준다. 이것은 수학이 하나의 언어적 특성을 가지고 있다는 것을 시사하며 개체발생적이라는 맥락에서 이해된다. 인지발달은 개체발생적인 특징을 가진다. 만약 역사발생이 개체발생과 다른 개념이라면 역사발생적 원리를 수학학습에 적용한다는 것은 납득할 수 있는 검증을 거쳐야 한다. 이러한 이유 때문에 역사발생과 개체발생의 비교는 보다 상세하게 논의되어야 하는데 결론적으로 말한다면 이 두 개념은 같지 않다고 주장한다.

개체발생적이라는 개념이 함의하고 있는 것의 하나는 자연스러운 변화를 말하는데 수학사를 보면 수차례 부자연스런 현상이 나타난다. 첫째 경우는 고대 그리스에서 나타난 무리수에 관한 왜곡현상이다. 피타고라스에 의하여 전파된 유리수적 세계상에 고착되어 있던 고대 그리스의 수학은 무리수의 발견으로 인한 분열증 때문에 대수학의 발전을 불가능하게 만들었다. 둘째 무한소를 보는 관점이다. 무한소는 데모크리투스에 의하여 발견되고 아르키메데스에 의하여 구적법에 응용되었으며 이후 미적분의 탄생에 결정적인 역할을 했음에도 불구하고 이 개념에 대한 충분한 이해의 부족으로 인하여 19세기말 실수의 정초형성과정에서 제거되었다. 무한소라는 개념은 그 유용성을 고려하면 학교 수학에 적극적으로 도입되어야 할 내용이지만 불행히도 우리의 학교 수학에서는 삭제되어 있다. 셋째로는 미분학의 발견에 관련된 것인데 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 미분법이 발견되었지만 영국은 미적분을 발견에 대한 부질없는 싸움으로 인하여 영국의 수학을 100여년 동안 침체기로 만들었다. 이와 같이 수학사는 다양한 요인에 의하여 비자연스런 흐름이 발생하게 되고 이 현상은 생명체의 발생에서 보여주는 자연스러움이라는 특성[5]과 모순을 야기한다.

앞에서 언급한 사례들은 서양수학사에 국한된 것인데 동서양의 수학을 비교하면 두 개념의 차이는 더욱 분명하게 나타난다. 먼저 역사발생적 원리가 보편적이라면 서양의 수학이나 동양의 수학의 발달은 유사성이 존재해야 한다. 그러나 중국의 수학사와 그리스의 수학사에는 옹호할 수 있는 유사성이 존재하지 않는다. 동서양의 수학을 비교하면 서구의 문명 속에는 양화가능이라는 수학이 존재하기 위한 인식론적 근거가 존재한다. 그렇기 때문에 서양 학문에는 수학화 과정(mathematization)이라는 거대한 흐름이 일관되게 나타난다. 수학화 과정은 16세기에 천문학에서 처음으로 그렇지만 체계적으로 나타나고 이어 물리학 일반에서 파급되고 이후 범자연과학의 수학적 연구의 성격을 가지고 나타났으며 이러한 흐름은 사회과학으로 파급되고 결국 인문과학에서도 수학적 양태를 탐색하게 된다. 그러나 동양에서는 단편적인 수학은 있어도 수학화 과정은 없다. 역사발생적 원리를 주장하는 학자들은 서양의 수학사에서 논거를 찾았을 뿐 동양의 수학이 가진 성격을 몰랐기 때문이다. 이와 같은 이유에서 역사발생과 개체발생은 같은 개념으로 볼 수 있는 것이 아니다.



역사발생적 원리를 적용하여 대수학을 가르친다고 할 때 흔히 나타나는 기법은 기하학적 대수의 기법이다. 이것은 수학적 명제를 적절한 기하학적 모형을 이용하여 증명하는 것인데 고대 그리스에서는 대수적 지식의 부족에 의하여 이 방법이 보편적으로 사용하였다. 예를 들면 등식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$의 증명은 교과서에서 오른쪽 그림을 이용하여 증명한다.

그런데 이 방법은 일관성이 없기 때문에 인지적 전이 효과가 없으며. 더욱이 대수적으로는 유사한 식이라도 대응하는 기하모형은 전혀 연결 고리가 없게 되는 경우가 흔하기 때문에 추론방법의 위계성이 결여되어 있다. 예를 들면 항등식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$에 대응하는 기하학적 모형과 항등식 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$에 대응하는 기하학적 모형은 전혀 다르다. 전자의 평면은 후자의 입체로 비약하게 사용해야 되는데 상황이 복잡하게 된다. 만약 위의 식에서 지수가 4라면 이 방법은 거의 불가능하다. 이와 같이 학습의 수월성이라는 측면에서 보면 기하학적 대수의 방법은 효과적이라고 할 수 없다. 반면에 위의 식을 대수적 방법으로 접근하면 등식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$의 추론에서 적용한 방법을 가지고 특별한 방법이나 어려움이 없이 등식 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$을 간단하게 증명할 수 있다.

더 심각한 것은 수학에서는 역사발생적 원리에 반하는 경우로서 정당화된 경우가 있다. 학교수학에서 도입하는 극한에 대한 개념들은 주로 귀납적 추론에 의하여 형성되고 수학사를 보면 발생의 초기에 해당한다. 수학시간에 학생들은 가끔 이러한 질문을 한다. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$의

5) 프랙털 특성이라고 할 수도 있다.

지도에서 학생들은 $\frac{1}{n}$이 항상 양수이므로 극한값도 0보다는 약간 큰 것이 될 수도 있다는 것을 배제하지 않는 태도가 수집된다.[6] 그러나 학교수학에서는 학생들의 이러한 생각을 원천적으로 봉쇄하고 있으며 바이에르쉬트라스의 규약을 학교수학에서도 지킬 것을 강요하고 있다.

2. 결론: 역사발생적 원리의 수용

수학학습에서 역사발생적인 원리가 제기된 시기에는 수학교육학의 연구가 활성화되지 않았기 때문에 별 비판을 받지 않고 유클리드-힐버트식 교수학습법의 대안으로서 간주되었다. 그러나 주관주의 인식론이 수학교육에 뿌리내리고 있는 현시점에서 보면 역사발생적 원리는 구성주의의 원리 속에 내포되기 때문에 독립된 개념으로 정립되기는 곤란하며 그렇게 된다면 오히려 혼란을 야기할 가능성이 있다.

그러면 역사발생적 원리는 교수학습에서 어떻게 변용되어야 할까? 구성주의의 관점으로 보면 어떤 개념형성은 개인인지적인 경우와 사회문화적인 관점으로 볼 수 있다. 전자는 Glasersfeld에 의하여 제시되었고 후자는 Vygotsky에 의하여 제시되었는데 이 두 이론을 근거로 하면 개인인지적 개념발달은 사회문화적 발달과 다를 수 있는데 개인인지적 발달은 개체발생적과 유사하고 사회문화적 발달은 역사발생적인 것과 유사하다. 그러나 수학은 사회문화적 의존성이 거의 없는 학문이다. 그렇기 때문에 수학적 재능은 비교적 이른 나이에 나타난다. 따라서 전문수학이 아닌 수학교육에서는 역사발생적 원리는 축소될 수밖에 없고 개체발생적 원리로 대치되어야 한다.

역사발생적 원리에 의한 학습지도와 관련된 방법으로 수학사를 이용한 학습이 있다. 역사발생적 원리는 인식론과 관련되어 있지만 수학사를 이용하는 수업에서의 수학사는 학습용 소도구에 지나지 않기 때문에 수학사를 이용하는 수업에서의 수학사는 하나의 교육공학적 측면으로 이해되어야 한다.

참고 문헌

1. 석용징, 신현성, 이준렬(1996), **수학과 교재론**, 경문사.
2. 우정호(2000), **수학학습-지도원리와 방법**. 서울대학교 출판부.
3. Lakatos, Imre(1978), *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Oxford

6) 필자는 이 문제를 두고 중립적인 자세로 토론을 전개하였는데 극한값에 대한 다양한 의견이 개진하게 됨을 수차례 경험하였다

University Press.

4. Schuring, G.(1978), *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*, Klett-Cotta Typoscript.