Historia Mathematica Vol. 15, No. 1, 2002, 83-92

세괴와 세괴 재생핵에 대한 역사적 고찰*

수원대학교 수학과 **정문자**

Abstract

Gabor Szegö was one of the most brilliant Mathematicians. Mathematical science owes him several fundamental contributions in such fields as theory of functions of a complex variables, conformal mapping, Fourier series, theory of orthogonal polynomials, and many others. He wrote the famous Pólya-Szegö *Problems and Theorems in Analysis* which is the two volume of concentrated mathematical beauty. In this paper, we mention Szegö's life, Szegö's work, and Szegö reproducing kernel.

0. 서론

세괴는 폴리아와 공저인 책 *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vols. I and II (Problems and Theorems in Analysis, vols. I and II)로 잘 알려져 있으며, 세괴가 쓴 책인 *Orthogonal Polynomials*, 세괴가 창시한 직교다항함수의 현대이론들로 잘 알려져 있다. 세괴는 스탠포드대학의 명예교수였고, 비엔나 과학아카데미의 회원, 헝가리과학아카데미 회원이기도 하였다. 그는 20세기의 탁월한 고전적인 해석학자였으며 130편 이상의 연구논문, 4권의 영향력 있는 저서를 집필하였다. 해석학자로서 세괴는 세괴의 극치문제(Szegö's extremal problem), 토에플리츠 행렬에 관한 이론, 그리고 단위원에서 세괴의 직교다항함수에 관한 세괴의 이론으로 유명하다. 토에플리츠 행렬에 관한 그의 이론은 세괴 재생핵(Szegö reproducing kernel)의 개념을 낳았으며 세괴극한정리와 강한 세괴극한정리의 출발점이 되었다. 그의 업적은 순수 및 응용수학의 발전에 영향을 끼쳤을 뿐만 아니라 통계, 물리, 화학, 공학의 여러 분야에도 많이 응용된다. 이 논문에서는 세괴의 생애와 업적 및 세괴 재생핵에 대해 고찰한다.

* 본 연구는 수원대학교 2002년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

1. 세괴의 생애

가보르 세괴(Gabor Szegö)는 1895년 헝가리에서 태어났다. 부다페스트에서 100킬로미터쯤 떨어진 도시에서 1912년 6월 고등학교를 마친 뒤 오늘날 Eötvös Lóránd University라 알려져 있는 부다페스트의 Pázmány Péter University에 입학하였다. 그 해에 헝가리 수리물리학회가 주최한 학술경시대회(후에 Eötvös 경시대회로, 오늘날엔 Kürschák 경시대회라 알려짐)에서 1등상을 받았다. 경시대회에 입상한 것은 의례적인 일이라기보다는 세괴의 생애에 있어서 중요한 초석이 되었다. 수학에 관련된 모든 헝가리인이 알게 되므로 경시대회는 그에게 큰 영광을 가져다 주었다. 경시대회가 아니었다면 세괴는 유대인으로서 그가 세인의 주목을 받거나, 공부할 수 있었을지 의심스러울 정도였다. 그 이듬해에 연속함수의 다항함수 접근에 관한 그의 논문은 대학논문상을 받았다. 그는 접근론을 결코 포기하지 않았고, 그의 마지막 연구논문도 이 주제에 초점을 맞추고 있었다. 세괴는 1913년과 1914년 여름을 독일 베를린대학과 괴팅겐대학에서 보냈다.

제1차 세계대전이 터지자, 그는 즉시 헝가리로 돌아가 1915년 5월까지 대학에서 학업을 계속하였다. 1912년과 1915년 사이에는 피제(L. Fejér), 베크(M. Beke), 퀴르착(J. Kürschák), 바우어(M. Bauer)가 그의 교수들이었으며 그 당시에 그는 폴리아(G. Pólya)와 페케트(M. Fekete)를 만나게 되고 그들과 평생동안 협동연구를 하게 되었다. 징집이 시행되자 그는 오스트리아-헝가리제국의 군인으로서 복무했고 비엔나에서 전쟁의 막바지를 보냈다. 그의 군복무는 1918년 11월 오스트리아-헝가리제국의 항복 이후에도 지속되었고 1919년 초까지 군대에 머물러 있었다.

그의 첫 연구논문은 1915년 *Mathematische Annalen*에 실렸는데 그것은 폴리아가 제안한 가설로부터 출발하였다. 그것은 토에플리츠 등이 고려한 행렬식에 관한 것이었고 어떤 함수의 푸리에 계수로 이루어져 있었다. 세괴는 이후 45년을 이 논문에서 발표한 결과를 더 확장시키고 응용하는데 사용했고, 토에플리츠 행렬식론은 그의 주요 연구영역이 되었다. 그는 비엔나에서 군복무하면서 1918년 7월 비엔나대학교에서 박사학위를 받았다. 그의 논문은 위의 논문에 기초한 것이었다. 세괴는 그 자신 수학적 천재이기도 하고, 또 교수 퀴르착의 요청에 따라 1903년에 헝가리에서 태어난 20세기 최고 수학자의 한 명인 폰 노이만의 가정교사로서 그와 집합론, 측도론, 그 이외의 주제 등에 대해 토론하기도 하였다.

세괴는 오스트리아-헝가리제국 군대에서 제대한 직후 1919년 3월 결혼하였다. 부인인 안나는 부다페스트의 파즈마니 피터대학교에서 화학박사학위를 받았다. 결혼 당시 그는 여전히 군복을 입고 있었다. 결혼식 중에도 다누브의 배에서 폭발이 있었다고 전해진다. 그들은 두 명의 자녀를 두었는데 피터는 1925년 베를린에서 태어났고, 베로니카는 1929년 쾨니스버

그에서 태어났다. 피터는 공학자가 되었고 특별함수에 대해 많은 논문을 썼으며 캘리포니아 주의회에서 일했고, 베로니카는 남가주대학에서 일했다. 세괴는 안나가 1968년 죽을 때까지 행복한 결혼생활을 하였고, 1972년 재혼한 부인은 1982년 부다페스트에서 죽었다.

제1차 세계대전 후 정치적 소용돌이가 몰아쳤다. 헝가리에는 학계에 소수의 자리만 남았다. 결과적으로 많은 헝가리 과학자가 헝가리를 떠나 우선적으로 독일, 스위스, 영국으로 떠났고, 20년 정도 뒤 미국으로 떠났는데, 헝가리에서보다 과학적, 경제적으로 더 존경과 우대를 받을 수 있었다. 세괴는 잠시동안 1919년과 1920년에 부다페스트 공대에서 퀴르착의 조교로 일했으나 헝가리에서 더 이상 안정된 직업을 가질 수 없게 되었고, 직교 다항 급수와 삼각 푸리에 급수의 동등수렴에 관한 결과를 얻은 뒤 1921년 5월 베를린대학에 시간강사가 되었다. 1925년부터 그는 응용수학과장이 되었는데, 이것은 정년 보장이 없는 부교수 자리였다. 세괴가 베를린을 떠날 때 해머슈타인이 그의 뒤를 이어 1927년부터 1935년까지 응용수학과장이 되었다. 1922년에 *Mathematische Zeitschrift* 에 세괴의 논문이 실린 뒤, 동시에 세괴와는 독자적으로 동료인 버그만과 바흐너가 다른 각도에서 문제에 접근하는 직교함수론을 정립하였다. 베를린에 있는 동안 1924년 4월 10일 그는 쾨니그상을 외트뵈스 수리물리학회로부터 받았다.

폴리아와 공저이며 1925년 출간한 두 권의 책 *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vols. I and II (Problems and Theorems in Analysis, vols. I and II)는 수학사상 가장 훌륭하고 유용한 책으로 수학자들에게 알려져 있다. 이 책은 첫 출판 뒤 70년 이내에 수학연구에 연속적으로 영향을 미쳤고, 젊은 수학자의 교육에 큰 영향을 미쳤다. 이 책은 여태까지 독일어, 영어[6], 헝가리어, 러시아어판을 가지고 있으며 두 저자는 수학은 수학을 함으로써만 습득할 수 있다고 믿었다.

세괴는 1926년 높(Knopp)의 자리를 이어받아 쾨니스버그 대학에 초청되었고 1934년까지 교수로 일했다. 1930년대는 유대인의 삶이 극도로 어렵게 되었다. 세괴는 제1차 세계대전에 군복무도 하였고, 최고 수학자이며 학생들에게 굉장히 활기를 불어넣는 교수라 학생과 동료에게 존경을 받고 꽤 예외적인 그의 지위를 유지할 수 있어서 고통받을 이유가 없는 듯 보이나 사실상 그와 가족의 목숨이 위태로운 지경이었다. 1930년대 경제공황동안 미국수학자들조차 형편없는 급료에도 일자리를 얻기가 거의 불가능했으므로 미국에서 일자리를 얻는 것도 쉽지 않았다. 미국 관리들은 유대인에게 피난처를 제공하는데 관심을 두지 않았고 미국 수학자들의 꾸준한 지원을 받고서야 소수의 유대인이 미국에 올 수 있었고 이는 미국수학을 발전시키는 데 중요한 역할을 하였다.

절친한 친구인 타마르킨의 노력으로 세괴는 미조리 세인트루이스의 위싱턴 대학교에 교수자리를 얻을 수 있었다. 이때는 경제적으로나 정치적으로 예외적인 시기였고 그 대학은 세

괴의 봉급을 주기에 충분한 돈이 없었다. 록펠러재단으로부터 얻은 4000달러의 기금과 추방된 독일의 학자를 도우려는 비상위원회로부터 얻은 기금, 그리고 지역 유대인 사업공동체로부터의 후원금이 4년 동안 세괴의 봉급을 충당하였다. 폴리아와 보르의 도움으로 세괴는 그 지위를 받아들였고 1934년 가을 세인트루이스로 가서 1938년 6월까지 머무르며 *Orthogonal Polynomials* 라는 책의 초고를 완성하였다. 세인트루이스에서 만든 우정과 교제는 그의 생을 마감할 때까지 이어졌다. 1939년에 첫 출판된 이래 *Orthogonal Polynomials* 는 순수 및 응용수학자뿐 아니라 여러 분야의 과학자 사이에 주요 참고도서가 되었다. 1938년 세괴는 스탠포드대학교의 수학과장이 되어달라는 제의를 받고 승낙했다. 세괴는 1953년까지 학과장이었다. 이 시기의 위대한 업적은 스탠포드대학의 수학을 세계 일류수준으로 끌어올린 것이다. 그는 1960년 명예교수로 퇴임할 때까지 그곳에 머물렀다. 그 시절을 듀렌(P. Duren)은 다음과 같이 회상한다.

"내가 스탠포드대학의 강사였을 때 직교다항함수에 관한 세괴의 강의에 참석하였다. 예를 들면 적분의 점근계산 등 해석학의 여러 테크닉에 관한 강의였다. 나는 그가 한 점에서 블라쉬카곱을 사용할 필요가 있는데 그가 그렇게 부르지 않았다고 기억했다. 한 학생이 그것이 블라쉬카곱인지 아닌지 물어보았을 때 그는 어떤 사람은 그렇게 부르나 그는 어떤 방향으로는 그 사람을 존경하길 원치 않는다고 응답하였다. 그 학생은 즉시 블라쉬카가 국가사회주의자인지 물어보았다. 세괴는 즉시 응답하지 않았으나 그의 눈에 비친 섬광은 그렇다는 것을 확신해 주었다."

시간이 변하여 오늘날에는 블라쉬카를 나치라고 부르고 블라쉬카곱에 대해 말하는 게 대수로운 일이 아니다. 세괴는 1940년 미국시민권을 받았고, 1945-1946년 프랑스 비아리츠에 있는 아메리칸대학에서 미국 군인들에게 1년 동안 수학을 가르쳤다. 이 당시 세괴는 네덜란드와 영국을 여행하며 많은 수학자와 만났다. 세괴는 헝가리에 들어가려고 허가를 얻으려 하였으나 러시아가 그의 요청을 거절하였다. 그의 어머니는 1946년에 죽을 때까지 부다페스트에서 살았으며, 동시에 세괴는 프랑스에 있었지만 그의 형제와 그의 부인의 가족에게 무슨 일이 일어났는지 거의 몰랐다. 1950년대에 독일정부로부터 배상금을 받았다. 퇴임 때가 되었을 때 세괴는 독일을 떠나도록 강요되지 않았으면 받았을 연금에 상응하는 금액을 받았다. 세괴가 퇴임하였을 때 그의 부인의 건강이 악화되고 그의 건강도 나빠졌다. 그는 1969년 부다페스트에서 열린 함수론 세계학회에서 피제의 업적에 대한 마지막 수학강연을 하였다. 1968년 안나가 죽고 1970년 세괴는 자신이 파킨슨씨병을 앓고 있다는 것을 알았다. 말년에는 휠체어에 의지하였고 많은 고통을 겪다가 1985년 팔로알토에서 죽었다.

2. 세괴의 업적

그들이 발견한 어떤 것에 그들의 이름이 붙은 것을 가진다는 것은 영예로운 것이다. 세괴는 많은 그러한 업적을 가졌다. 오래 지속할 만큼 심오한 업적은 그들의 논문집으로 출판되는데 1982년 *Gabor Szegö: Collected Papers* 라는 제목의 3권의 책으로 그의 논문집이 출판되었을 때 그는 아직 살아있었다. 칵(M. Kac)이 여기에 대해 다음과 같이 서평을 썼다[2].

"하긴 누가 단지 유한개의 서로 다른 계수를 가진 멱급수가 유리함수를 나타내거나 수렴반경 밖으로 확장될 수 없다는 정리에 무관심할 수 있겠는가! 혹은 만일 음이 아니며 르벡적분 가능한 주기가 2π인 함수 f의 푸리에계수에 의해 토에플리츠 행렬이 만들어진다면 모서리를 잘라낸 $n\times n$ 행렬식의 n중근은 f의 기하평균에 수렴한다는 정리에 말이다. 나는 세괴의 초기의 두 예를 들고 있다. 첫 번째는 책 여기저기 흩어져 있는 많은 고립된 보석중의 하나이고 두 번째는 오래오래 지속될 발전의 시작인 것이다. 세괴의 업적 대다수는 구체적인 문제로부터 시작된다. 우아한 일반론으로 꽃피우는 그것들 대다수는 그의 통찰력의 깊이와 문제선택의 완벽한 취향에 기인한다. 세괴조차도 그의 업적이 궁극적으로 수학과 과학에 영향을 미치는 정도를 생각해 보지 못했다."

세괴의 업적은 토에플리츠형식과 직교 다항함수로부터 출발한다. 세괴의 첫 번째 논문은 양함수로부터 얻어지는 토에플리츠행렬의 행렬식의 극한에 관한 폴리아의 문제에 대한 해이다. 실수축에서 한켈행렬과 직교다항함수의 관계는 알려져 있으나, 토에플리츠행렬과 관계된 직교다항함수들은 알려져 있지 않았는데 이것들을 세괴가 도입하였다. 실수축에서 직교는 다음과 같이 정의된다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)p_m(x)\,dx=0, \quad m\neq n$$

세괴는 $\phi_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_{k,n}z^k$일 때 단위원에서 직교를 다음과 같이 정의했다([1], [7, Chapter 11], [8, p. 863]).

$$\int_0^{2\pi} \phi_n(e^{i\theta})\overline{\phi_m(e^{i\theta})}d\alpha(\theta)=0, \quad m\neq n$$

그리고 측도를 여러 가지로 변화시켰을 때의 직교다항함수를 구체적으로 구하였다. 세괴는 일반적인 커브 위에서의 직교다항함수를 도입하였고 이로부터 세괴 재생핵이 탄생되었다.

1924년 4월 10일 그가 쾨니그상을 외트뵈스 수리물리학회로부터 받았을 때, 수상위원회일원인 리츠(F. Riesz)가 발표한 세괴의 업적 내용은 다음과 같다[2].

"… 커브, 예를 들면, 원 안에서 해석적이고 그 원의 호에서 연속인 함수의 값은 함수가 상수일 때를 제외하고는 이 호에서 상수일 수가 없다. 1906년 파투(Fatou)가 그의 유명한 박사학위논문에서, 원 안에서 유계이며 해석적인 함수는 거의 모든 곳, 즉 측도 0인 집합을 제외한 곳에서 극한값을 갖는다고 증명한 뒤, 다음 의문을 제기하였다: 이 극한함수가 위의 호에서 상수일 수 없으므로 상수가 되는 집합은 얼마나 큰가 혹은 그 값이 0의 값을 취하는 집합은 얼마나 큰가? 이 집합이 위의 호의 거의 모든 부분을 채울 수 없음을 보인 뒤 그는 이 집합이 측도 0이라는 증명하기 어렵다고 믿어지는 가설을 만들었다. 세괴는 경계극한함수의 절대값의 로그는 르벡 적분 가능하다는 것을 증명했다. 그러므로 로그는 음의 무한값에 이른다, 즉 경계극한함수는 그 자신 측도 0인 집합에서만 0의 값을 취할 수 있다. 흥미있는 현상은 그와 동치인 다음 정리에 의해 더 잘 증명된다: 주어진 원판의 원주에서 음이 아닌 함수가, 경계값의 절대값이 거의 모든 곳에서 주어진 함수와 일치하는 점에서, 원판에서 해석적이며 원판에서 0의 값을 취하지 않으며 유계인 평균값을 가지는 함수의 존재성에 관한 동치조건은, 주어진 함수와 그의 로그 둘 다 적분 가능하다는 것이다. 세괴의 정리는 토에플리츠 형식과 양함수의 푸리에급수의 연구로부터 완곡하게 얻어진 것이며 유명한 옌센(Jensen) 공식으로부터 쉽게 얻어질 수 있다.

세괴의 탁월한 논문 중 하나는 직교체계의 내부 점근적이라 불리는 것과 상응하는 급수전개에 대해 조사한 것이다. 다시 말하자면 다항함수들이 $p(x)$라는 무게함수에 관해 직교가 되는 커브와 구간 위에서의 점근 행동에 대한 의문점을 토론하였다. 이 분야에서의 첫 연구결과는 라플라스와 다보(Darboux)의 이름과 연결되어 있는데, 세괴는 매우 일반적인 결과를 얻었고 그것은 기본적인 간단한 방법을 이용하여 매우 어렵게 보이는 의문점들을 고찰하여 얻은 것이다. 그의 방법의 주안점은 무게함수 $p(x)$를 다항함수 $P(x)$를 이용하여 $\sqrt{1-x^2}/P(x)$ 이라는 형태의 단순한 구조를 띤 두 함수사이에 집어넣는 방법인데 이 함수들이 우세함수과 열세함수로 여겨짐을 증명하였다. 그는 이러한 특별한 형태의 무게함수인 경우로 축소시켜서 양의 삼각다항함수에 관한 피제의 정리를 사용하여 상응하는 표현을 얻었다. 그리고 $p''(x)$가 존재하는 모든 점에서 직교다항함수의 내적 점근표현을 얻었다. 하르의 논문이 발표된 후 급수의 점근표현의 도움으로 급수의 합 가능성과 수렴에 관한 의문을 푸리에 급수와 같은 특별한 경우로 축소시킬 수 있다. 그는 다항함수의 점근표현을 이용하지 않고 동일한 기본 방법으로 직교급수의 부분합에 대한 점근표현을 얻었고 이 방법으로 수렴문제를 푸리에급수에 유사한 문제로 축소시켰다."

폴리아와 세괴의 두 권의 책은 여태껏 만들어진 수학문제의 모음으로는 최고의 찬사를 받

는 책이다. 그들은 서로 관련된 문제들을 다룸으로써 학생들을 수학연구하도록 이끌 수 있다고 생각한다. 이 책은 독자로 하여금 주의 깊게 선택하고 관련된 문제들을 통하여 수학연구를 하도록 유도하는데, 독자는 문제들을 분석하고 풀어봄으로써 이 특별한 분야에 독자적인 연구를 할 준비를 거의 갖추게 된다. 이 책은 제목을 보면 해석학에 관한 것이고, 대다수 문제가 해석학에 관련된 것이나 정수론, 조합론, 기하도 포함되고, 물리학에의 응용도 다루고 있다. 문제의 선택은 저자의 수학적 취향과 격조를 나타내고 기술적 기법을 나타낸다. 매쪽마다 기대하지 못했던 격조높은 주장, 기대 밖의 명쾌한 증명, 독자 눈앞에서 복소론으로 발전하는 문제 등을 제공한다. 폴리아는 이 책에 대해 "우리의 협력의 결과인 이 책은 나의 최고의 업적이자 세괴의 최고의 업적이다."라고 말했다[5]. 이 책에서는 생성함수를 이용하여 기초적인 문제로부터 정수론과 조합론의 복잡한 문제까지 다루는데, 생성함수는 공식적인 멱급수로 여겨지고 그의 해석적 성질이 중요한 역할을 하며 이항계수의 성질을 얻는데 사용된다. 그리고 변수 z를 가진 멱급수에 $f(z\ d/dz)$ 형태의 작용소의 효과와 관련된 문제들이 수록되고 함수의 멱급수가 만족시키는 함수방정식과 관련된 문제들이 수록되어 있다. 또한 이 책에서 모듈과 쎄타함수에 관한 오일러와 야곱의 등식은 가우스의 이항계수에 관한 부분, 조합론의 문제까지 유도한다. 복소해석학은 두 저자가 모두 좋아하는 주제인데, 단위원판에서 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$가 단엽함수일 때 $|a_3|\leq 3$이라는 뢰너의 증명에서 야기되는 문제라든지 다항함수의 영점에 관한 문제등이 이 책에 수록되어 있다. 이 책에는 조화측도 개념을 이용하여 후에 발전된 최대원리의 정제, 슈와르즈의 보조정리, 린될레프 원리, 블라쉬카곱 등을 소개하였고 전해석함수, 단엽함수 등 해석함수론에 관한 주제도 다루었다. 세괴는 삼각 다항함수의 특별한 성질에 흥미를 갖고 있었고, 후에 *Orthogonal Polynomials* 란 책에서 좀더 진행된 연구결과를 적어놓았다. 폴리아-세괴의 책에서 언급한 문제들은 수학연구에 도움이 되도록 관련이 있는 것을 나열하였는데 Part 4의 187번 문제[6, p. 31]처럼 아직도 풀리지 않은 문제로 이끌어 주는 문제도 있다.

연구자가 직교다항함수를 탐구하는 이유는 여러 가지가 있다. 역사적으로 이 다항함수는 특별함수, 수치해석학, 접근론과 관련되어 있다. 그들은 연속함수의 수렴값의 분모와 분자이기도 하다. 그러나 직교다항함수의 일반 접근론의 기초는 1920년대에 세괴가 쓴 일련의 논문에서 처음 나타났다. 세괴는 직교다항함수에 관련된 많은 문제들을 어떤 토에플리츠와 한켈 행렬식의 접근적 성질로 축소하는데 성공하였다. 이런 착상은 최소한 '세괴류'로 불리는 경우, 즉 단위원에서 르벡 적분 가능한 절대연속성분을 가진 측도에 대해서는, 많은 문제의 해를 쉽게 만든다. 많은 수학자들이 세괴이론을 발전시키려 기여하였다. 세괴이론은 수치해석, 이산분산이론, 미분방정식과 차분방정식, 수리통계, 통계물리, 코딩이론, 프랙털 등 다른 과학분야에서도 중요하게 응용된다. 세괴류 이외의 직교다항함수에 관한 이론은 최근에야 발견되었다. 직교다항함수에 관한 책은 잘 쓰여진 것이 몇 권 안 되는데 그 중 세괴의 책 *Orthogonal Polynomials* 이야말로 아이디어와 정보면에서 대표적이라 할 수 있다.

3. 세괴 재생핵

이 절에서는 세괴가 정의한 세괴 재생핵에 대해 알아보고자 한다. 매끄러운 영역의 경계에서 L^2인 함수에 내부에서 해석적인 함수를 대응시키는 작용소를 세괴 사영작용소라 하며 이를 나타내는 핵함수를 세괴 재생핵이라 한다. 자세히 설명하자면 Ω를 다변수 복소공간 $\mathbb{C}^n$ 상의 C^2 경계를 가진 영역이라 하고 $\partial\Omega$를 그 경계라 하자. $H^2(\partial\Omega)$를 Ω에서 해석적이며 $C(\overline{\Omega})$인 함수집합 $A(\Omega)$를 $\partial\Omega$로 국한시킨 원소들의 $L^2(\partial\Omega)$ 폐포라 하자. 그러면 $H^2(\partial\Omega)$는 $L^2(\partial\Omega)$의 힐베르트 부분공간이 되고 $H^2(\partial\Omega)$의 모든 원소 f는 푸아송의 적분 Pf에 의해 Ω로 해석적으로 확장된다. 모든 $\zeta\in\partial\Omega$에 대해 ν_ζ를 밖으로 향하는 단위법선벡터라 할 때, 거의 모든 점에서 $\lim_{z\to 0} Pf(\zeta-\varepsilon\nu_\zeta)=f(\zeta)$이다. 모든 $z\in\Omega$와 모든 $f\in H^2(\partial\Omega)$에 대해 범함수 $\Psi_z : f\to Pf(z)$는 연속이다. $k_z(\zeta)$를 이 범함수 Ψ_z를 나타내는 힐베르트 공간상의 대표원소라고 할 때 세괴 재생핵은 $z\in\Omega$와 $\zeta\in\partial\Omega$에 대해 $S(z,\ \zeta)=\overline{k_z(\zeta)}$로 정의된다. $d\sigma$를 면적측도라 할 때 만약 $f\in H^2(\partial\Omega)$라면 모든 $z\in\Omega$에 대해 다음이 성립한다.

$$Pf(z)=\oint_{\partial\Omega} S(z,\ \zeta)f(\zeta)\,d\sigma(\zeta)$$

한편, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$를 $H^2(\partial\Omega)$의 직교기저라 하고 $z,\zeta\in\Omega$에 대해 다음과 같이 정의하자.

$$S'(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j(z)\overline{\phi_j(\zeta)}$$

조밀한 집합 $K\subseteq\Omega$에 대해 $S'(\cdot,\cdot)$을 정의하는 급수는 $K\times K$에서 평등수렴한다. Riesz-Fisher정리를 이용하면 $S'(\cdot,\zeta)$는 $H^2(\partial\Omega)$에 속하는 원소의 푸아송의 적분이고 $S'(z,\cdot)$는 $H^2(\partial\Omega)$에 속하는 원소의 푸아송의 적분의 공액원소이므로, $S'(\cdot,\cdot)$은 거의 모든 점에서 $(\partial\Omega\times\Omega)\bigcup(\Omega\times\partial\Omega)$로 확장됨을 알 수 있다. 또한 $S'(\cdot,\cdot)$은 $H^2(\partial\Omega)$를 재생하므로 세괴 재생핵의 유일성에 의해 $S'(\cdot,\cdot)=S(\cdot,\cdot)$이다. 특히 모든 $z,\zeta\in\Omega$에 대하여 $S(z,\zeta)=\overline{S(\zeta,z)}$가 성립한다. 그러므로 세괴 재생핵은 $L^2(\partial\Omega)$에서 $H^2(\partial\Omega)$로의 다음 사상을 나타내는 것으로 여겨진다.

$$S:f\to\int_{\partial\Omega} f(\zeta)S(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta)$$

이 사상 S는 자기수반사상이며 $S=S^2$이므로 $L^2(\partial\Omega)$에서 $H^2(\partial\Omega)$ 위로의 힐베르트 공간사영작용소이다[4, p. 55]. 세괴 재생핵은 두 영역 사이의 등각사상, 고유사상 등의 성질을 알아내는 데 많이 이용된다. 참고로 [3]에서는 일변수 복소평면영역에서의 세괴 재생핵의 여러 성질에 대해서 다루었다. 특히 일변수 복소평면영역에서의 세괴 재생핵을 이용하면 Riemann map과 Ahlfors map을 간단히 구체적으로 표현할 수 있다.

4. 결론

세괴가 수학자로서 첫발을 디딜 수 있었던 계기는 헝가리의 수학경시대회라 할 수 있다. 폴리아가 "세괴와 나는 둘 다 문제풀이를 강조하는 헝가리 고등학생을 위한 헝가리 수학잡지의 독자였다."라고 말했듯이 헝가리는 문제를 이용하여 유망한 젊은 학생들을 수학으로 이끄는 데 오래 숙달되어 있었고, 헝가리의 수학경시대회는 젊은 학생들이 수학에 흥미를 갖도록 문제풀이를 강조하는 데서 비롯되었다. 다른 나라들도 그들에게 배워서 더 깊은 수학적 사고를 북돋워주도록 경시대회를 갖는다. 우리나라에도 순수하게 수학의 학문적인 업적을 성취하고 능력을 신장시킬 수 있는 진정한 수학경시대회가 많이 있어야 하겠다.

스탠포드대학의 명예교수였고, 비엔나 과학아카데미의 회원, 헝가리과학아카데미 회원이기도 하였으며 20세기의 탁월한 고전적인 해석학자인 세괴는 해석학에서 발전하여 조합론에 이르기까지 우리에게 기념비적인 수학적 업적을 남겨놓았는데, 특히 세괴 재생핵의 개념을 낳은 토에플리츠 행렬에 관한 이론, 그리고 단위원에서 세괴의 직교다항함수에 관한 세괴의 이론으로 유명하다. 순수수학 및 응용수학, 더 나아가 공학에 이르기까지의 그의 업적이 계속 새 업적으로 이끌게 되었으면 좋겠다.

참고 문헌

1. Askey, R., "An Overview of Szegö's Mathematics," *Gabor Szegö: Collected papers* - Vol. 1, 1982, p.15-19.
2. Askey, R. and P. Nevai, "Gabor Szegö: 1895-1985," *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 18(1996), p.10-22.
3. Bell, S., *The Cauchy Transform, Potential Theory, and Conformal Mapping*, CRC Press, Boca Raton, 1993.
4. Krantz, S., *Function Theory of Several Complex Variables*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1982.

5. Pólya, G., "On my Cooperation with Gabor Szegö," *Gabor Szegö: Collected papers* - Vol. 1, 1982, p. 11.
6. Pólya, G. and G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis I-II*, Springer-Verlag, Berlin, 1972-1976.
7. Szegö, G., *Orthogonal polynomials*, AMS Colloquium Publications Vol 23, Providence, 1939.
8. Szegö, G., *Gabor Szegö: Collected papers* - Vol 1-3, Birkhauser, 1982.