Historia Mathematica Vol. 15, No. 1, 2002, 69-82

원뿔곡선 이론의 발달

이화여자대학교 수학교육과 **이종희**

Abstract

The purpose of this study is to explore historical development of conic sections and analyze formal aspects, application aspects and intuitive aspects in conic sections. We suggest implication for learning-teaching conic sections.

0. 서론

수학은 형식적이고 연역적인 엄밀한 지식체로 볼 수 있지만, 그 이면에는 인간 활동의 과정이 포함되어 있다. Courant와 Robbins는 **수학이란 무엇인가**라는 책에서 수학은 인간 정신의 표현이며, 수학에는 능동적 의지뿐 아니라 관조적인 이성, 심미적인 완성에로의 욕망이 숨겨져 있다고 말하였다[8]. Fischbein도 수학이 창조되는 과정에는 계시, 망설임, 수용 그리고 반박의 순간들이 포함되어 있으며, 수세기에 걸친 노력, 계속적인 수정, 그리고 정련의 과정을 거쳐서 발전되었다고 보고 있다[13]. 이렇게 볼 때, 수학에는 논리와 직관, 분석과 구성이 포함되어 있을 뿐 아니라, 이러한 대립적인 요소들이 상호작용하는 가운데 그것들을 종합하기 위한 노력이 포함되어 있다고 할 수 있다. 학생들은 수학을 본질적으로 인간 활동이고 인간에 의해서 발명되었음을 이해해야 하고, 그들 스스로 정의를 해보거나 수학적 명제를 만들고 증명을 해보고, 직관적으로 수학적 명제의 타당성을 평가할 수 있어야 하고, 정의 및 정리에 이르는 명제들의 형식적·연역적 배열을 학습해야 한다.

전통적인 그리스 기하학에서 중요한 내용 중 하나는 Apollonius(BC. 262-190)의 **원뿔곡선론**(*Conic Sections*)에서의 연구 결과라 할 수 있다. 단순히 수학적 흥미에서 시작된 원뿔곡선 이론은 그 이론이 발달됨과 함께 많은 다른 분야에서 유용하게 쓰이고 있다. 예를 들면, Kepler의 행성 연구와 Newton의 연구에서 찾아볼 수 있다. 원뿔곡선은 이차곡선이라고 불리기도 하는데[1], 원뿔곡선도 인간 활동에 의해 발전된 개념이라고 볼 수 있다.

1) 이차곡선 단원에서 이차곡선과 원뿔곡선 용어 모두 사용하고 있다. 고등학교 수학 II에서 단원명을 원뿔 곡선이라 하지 않고 이차곡선이라고 한 것으로 보아, 원뿔의 단면보다는 이차 방정식에 의한

본고는 원뿔곡선(이차곡선)에서의 다양한 측면을 확인하고, 이로써 현재 원뿔곡선의 학습-지도에서 중요하게 다루어야 하는 점이 무엇인지를 논의하는 것을 그 목적으로 한다. 수학사는 인류의 대역적인 학습 과정으로 볼 수 있다. 수학적 개념의 다양한 측면을 확인하기 위한 방법 중 하나는 개념의 역사적 발달과정을 확인해 보는 것이다. 개념의 역사를 분석하는 것은 그러한 과정에 어떠한 요소가 포함되어 있는가를 살펴보는데 유용하며, 따라서 본고에서는 원뿔곡선 이론의 발달 과정을 살펴봄으로써 원뿔곡선 이론에 관한 다양한 측면을 확인할 것이다.

1. 원뿔곡선의 역사적 발달

원뿔 곡선에 관한 연구는 Apollonius, Durer, Kepler, Descartes, Dandelin 등에 의해서 그 이론이 정리되어 나갔다. 그러나 이들은 자신의 철학 및 그 관심사가 다르므로 원뿔 곡선을 각기 다른 관점에서 보고 발전시켰다. 본 장에서는 이들의 연구를 중심으로 살펴보고자 한다.

1-1. Apollonius 이전

고대 기하학은 문제 해결의 전통 아래 수학자들의 노력에 의해 발달되어왔다. Chias의 Hippocrates 시대부터 기하학의 연구자들은 기하 문제인 원의 면적과 같은 정사각형, 입방체의 체적을 두 배로 하는 것, 정다각형의 작도 등에 관심을 가지게 되었다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 새로운 기하학적 방법이 필요하게 되었으며, 그 중 하나가 원뿔 곡선이고, 이것은 입방체의 체적을 두 배로 하는 문제와 각의 삼등분 문제를 해결하는데 도움이 되었다. 원뿔곡선을 사용하여 여러 가지 문제를 해결하게 되면서 원뿔 곡선의 이론은 조금씩 그 모습을 갖추게 되었다.

고대 그리스 시대에는 기하학적 문제를 다양하게 분류하였다. 예를 들면, Pappus는 기하 문제를 평면, 입체, 곡선 문제로 분류하였다. 평면 문제는 자와 컴퍼스의 작도로 풀어야 하는 문제이고, 입체 문제는 평면 문제의 방법이 아닌 원뿔의 단면으로 풀어야 하는 것, 곡선 문제는 평면 문제의 방법도 입체 문제의 방법도 아닌 특별한 곡선에 의해 풀어야 하는 문제를 말한다. Pappus는 입방체의 체적의 두 배 문제와 각의 삼등분 문제를 입체 문제로 분류하였다[2][16].

곡선을 강조하고 있는 것으로 보인다. 본 고에서는 원뿔의 단면을 나타내는 경우는 원뿔 곡선으로, 방정식을 나타내는 경우는 이차곡선이라는 용어를 사용할 것이다. 그리고 원뿔곡선 중에서 포물선, 타원, 쌍곡선을 중심으로 논의한다.

2) 그러나 Proclus와 Eutocius 등은 이와는 다른 방법으로 분류하였다. 이와 유사하게 17세기 Descartes도 기하 문제를 분류했는데, 직선과 원으로 작도가능한 문제를 제 1종의 문제, 근이 원뿔 곡선을 이용하여 작도 가능한 3차 및 4차 방정식이 되는 문제를 제 2종 문제, $y=x^3$과 같은 3차 곡선을 이용해서 작도할 수 있는 5차 또는 6차 방정식이 되는 문제를 제 3종 문제로 분류하였다[6].

원뿔 곡선은 Menaechmus 시대 이래로 집중적으로 연구되어왔다. Menaechmus는 입체의 체적을 두 배로 하는 문제를 해결하기 위해 원뿔곡선을 사용하였다. 그는 타원, 포물선, 쌍곡선을 각각 꼭지각이 예각, 직각, 둔각인 세 가지 서로 다른 직원뿔의 절단면으로 정의하였다.

1-2. Apollonius

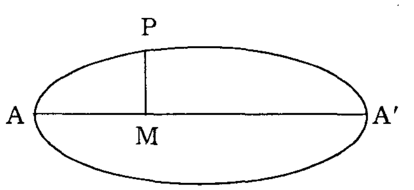
Apollonius(약 BC. 260-200)는 8권의 책으로 되어있는 **원뿔곡선론**(*Conic Sections*)[3]에서 절단면의 기울기를 바꾸는 것으로, 즉 하나의 원뿔로부터 세 종류의 원뿔곡선 모두가 얻어지는 것을 보임으로써 일반적인 원뿔 곡선의 계통적 정의를 내렸다. 이것으로 원뿔 곡선에 대한 이론을 한 단계 높이게 되었다. Apollonius이전에는 꼭지각이 예각인 원뿔의 절단면, 꼭지각이 직각인 원뿔의 절단면, 꼭지각이 둔각인 원뿔의 절단면[4]이라고 불러진 것에 반해, 타원, 포물선, 쌍곡선이라는 명칭으로 바꾸어 부르게 된 것도 Apollonius 이후의 일이다. 그는 면적으로 이러한 명칭을 부여하였다. 이것은 이들 세 곡선을 서로 연관짓게 하는 중요한 첫 걸음 이었다.

그의 원뿔 곡선 이론을 살펴보면 다음과 같다. 그는 원뿔을 '어떤 정점을 항상 지나는 무한의 길이를 갖는 직선이, 그 점과 동일 평면상에 있지 않는 원의 원둘레 위의 각 점을 지나서 움직일 때, 그 직선의 자취는 이중 원뿔이 된다'고 정의하였다. 이 정의에 의해서 쌍곡선은 오늘날과 같은 두 분지 곡선이 되었다. 그리고 원뿔 곡선을 원뿔의 단면으로 정의하였다[6].

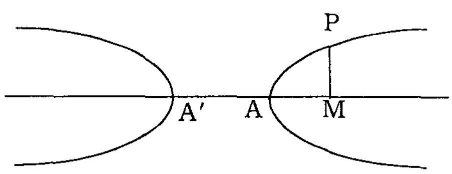
원뿔 곡선은 원래 3차원 도형으로부터 만들어진 것이지만, Apollonius는 원뿔 곡선을 비례로 다음과 같이 설명하였다[2].

[정리] 그림에서 원뿔 곡선의 꼭지점을 A와 A'이라고 할 때, 그 위의 임의의 점 P로부터 축 AA'에 내린 수선의 발을 M이라고 하면,

타원과 쌍곡선에서는 $\dfrac{MP^2}{AM \cdot MA'}$ 이 상수이고



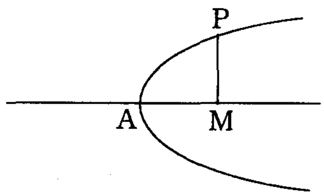
타원



쌍곡선

3) 원본에는 원추곡선이라고 되어 있으나 본고에서는 용어를 통일하기 위하여 원뿔곡선으로 표기한다.
4) 세 곡선은 이와 같은 방법으로도 특징지어질 수 있으며, 이를 그리스어로 '기본 성질(symptom)'이라고 한다.

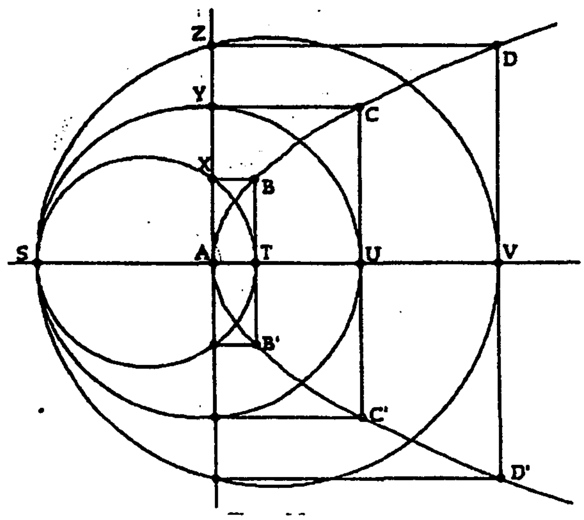
포물선에서는 $\frac{MP^2}{AM}$ 이 상수이다.



포물선

원뿔곡선의 연구는 3차원적 접근에서 시작되었지만 Apollonius의 연구 이후 2차원적 접근으로 이론이 발전되었다. 한편, Boyer에 의하면, 포물선의 초점과 준선 사이의 관계는 Pappus의 **집성**(*Synagoge, Collection*) 제 7권에 기술되었는데, 그는 세 가지의 원뿔곡선이 초점과 준선으로써 결정된다고 하였다[6].

Apollonius의 원뿔 곡선 이론은 아랍 문화에서 번역되었다. 아랍 수학자 Ibn Sina(10세기)는 Apollonius의 저작에 대한 주석을 쓰고, 거기에서 자와 컴퍼스를 사용하여 원뿔곡선을 그리는 방법을 보여주었다. 그가 제시한 평면 위에 포물선을 그리는 방법은 다음 그림 1과 같다[5]. 그림에서 $(XA)^2 = SA \cdot AT$, $(YA)^2 = SA \cdot AU$, …이므로 $A, B, C, D, \cdots$는 포물선 위에 있다는 것을 확인할 수 있다.



<그림 1> Sina의 포물선 그리는 방법(출처: [9])

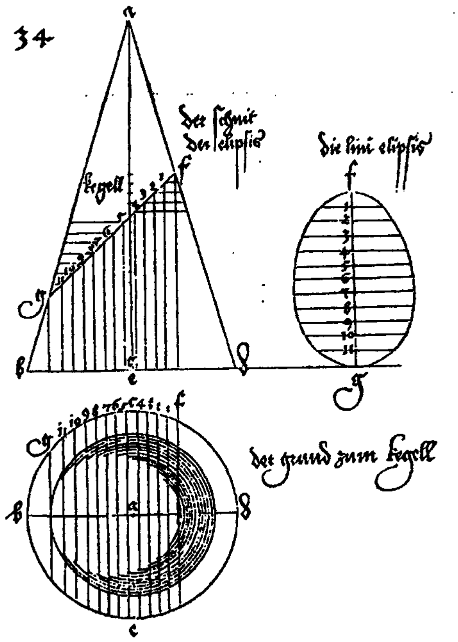
5) Boyer는 이러한 방법을 Werner(1468-1522)의 연구 업적으로 보았다[6].

Hellenism 시대와 Islam 시대에는 원뿔곡선을 응용한 문제가 제기되었고, 그중 하나가 포물면경과 같은 불을 붙이는 도구였다.

원뿔곡선은 삼차방정식의 해를 구하기 위해서 이용되었는데, 삼차방정식의 일반적인 대수적 해법은 16세기 이탈리아에서 발견되었지만, 11세기 페르시아 수학자인 Khayyam은 쌍곡선을 이용한 기하학적 해법을 제시하였다[6].

1-3. Durer

원뿔의 단면의 모양에 대해서 Durer(1471-1528)의 연구 방법은 획기적이라 할 수 있다. 그는 "직선 및 평면과 일반 도형에서 자와 컴퍼스에 관한 연구(*Treatise on Measuring by Rule and Compass on the Line, on the Plane and on Every Body,* 1525)"에서 사영(projection)을 이용하여 연구했는데, 그 방법은 그림 2와 같다. 그리고 이러한 방법은 Descartes의 해석기하와 화법기하학의 발전에 영향을 주었다[14].



<그림 2> Durer의 방법 (출처: [14])

6) $x^3+b^2x+a^3=cx^2$(a, b, c, x 등은 선분의 길이)에 대한 Khayyam의 풀이 과정은 Eves[11]를 참고할 수 있다.

원뿔의 단면과 원기둥의 단면의 모양 비교는 Durer 이전에 Serenus, Witelo 등에 의해서 연구되었는데, 그들은 두 입체를 적당히 자른다면 같은 종류의 단면을 갖는다고 생각하였다[7][7].

Durer는 타원 대신에 달걀 모양의 곡선 그림 2를 그렸다. 그리고 이후에 Guldin은 Durer의 연구에 오개념[8]이 있음을 입증하였고, 원통과 원뿔의 단면을 연구하였다.

1-4. Kepler

Kepler(1571-1630)는 광학, 포물면 거울의 특성을 연구하기 위해서 원뿔곡선에 관심을 갖게 되었다. Apollonius는 원뿔곡선을 타원, 포물선, 쌍곡선의 서로 다른 세 가지 유형으로 나눈 반면, Kepler는 동일한 원뿔 곡선의 특수한 경우로 파악하였다[2]. 다시 말하면, 한 쌍의 직선으로부터 원까지의 5가지 곡선 형태가 연속적으로 생긴다고 보았다. 그는 1604년에 **뷔텔로 광학 입문**(*Ad Vitellionem Paralipomena*)에서 이 이론을 전개하였는데, 그는 '초점'을 사용하여 원뿔곡선을 연구했다[6]. 원뿔곡선은 교차하는 두 곡선에서 시작되고 그 교점에서 두 초점이 생긴다. 한 초점이 다른 초점으로부터 멀어짐에 따라 점차로 무수히 많은 쌍곡선이 나타난다. 그리고 하나의 초점이 무한히 멀어졌을 때에는 두 개의 쌍곡선이 아니라 포물선이 된다. 이 움직이는 초점이 무한원[9]을 통과하여 반대 방향에서 다시 접근해 올 때에는 무수히 많은 타원이 나타난다. 그래서 마지막 두 초점이 일치하면 원이 된다.

Kepler는 원뿔곡선과 넓이를 계산하는 방법을 이용하여 행성의 운동에 관한 법칙을 발견하였다[2].

(1) 행성은 타원 궤도 위를 운동하며, 태양은 그 초점에 위치한다.

(2) 행성 궤도의 동경은 동일시간 내에 항상 같은 넓이의 부채꼴을 그린다.

(3) 행성이 태양 주위를 공전하는 시간의 제곱은 태양까지의 평균 거리의 세제곱에 비례한다.

1-5. Descartes

해석 기하의 개념이 17세기 유럽 수학에서 전개되었을 때, 그 용어의 의미는 지금의 개념과 달랐다. 주된 개념상의 차이는 수적이나 대수적 성질의 분석보다는 곡선은 이전에 존재하는 것으로 생각했다는 점이다. 다시 말하면, 방정식이 곡선을 만드는 것이 아니라, 곡선에서 방정식이 나온다는 것이다.

7) 원기둥의 단면에 대해서는 Teukolsky을 참고할 수 있다[17].

8) Durer의 오개념에 대한 수정된 내용에 대해서는 Herz-Fischer 또는 Bussi와 Mariotti의 논문을 참고할 수 있다([7], [14]).

9) 포물선이 두 개의 초점을 가지며 그 하나는 무한원에 있다는 아이디어는 Kepler에서 나온 것이다. 이러한 개념은 1세기 후에 Desargues에 의해 확장된다[2].

Descartes(1596-1650)가 1638년에 기하학(*Geometry*)을 출간했을 때, 그는 많은 곡선으로부터 대수 방정식을 도출해 내었다. 그러나 그는 방정식을 가지고 좌표에 점들을 찍어서 곡선을 만들지는 않았다[10]. 곡선을 그리는 기하학적 방법이 주어지고, 곡선을 그리는 도구에 포함된 기하학적 행동을 분석하고, 좌표에 의해 곡선의 방정식을 알아내는 과정으로 연구했다[9]. 그는 대수적 식으로 방정식을 분류하였으나. 기하학적 행동을 분석해서 얻어지지 않은 방정식은 중요하지 않다고 생각했으며, 이러한 전통은 이후 Robervl, Pascal, Newton, Leibniz등으로 이어졌다.

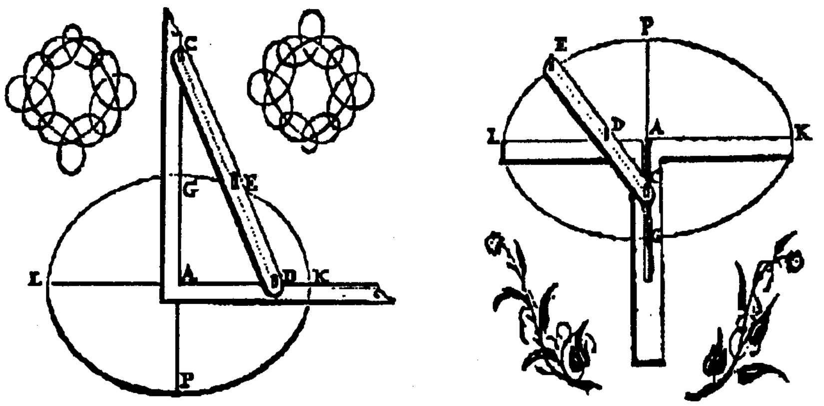
Descartes는 Pappus의 자취문제를 자세히 연구하여 방정식 $y^2 = ax - bxy + cx - dx^2$을 이끌어 내었다. 이 식은 원점을 지나는 원뿔곡선의 일반적인 방정식이다. 계수를 양수로만 생각해도, 이것은 원뿔곡선의 해석에 대해서 그 전에 없었던 훨씬 포괄적인 접근이었다. Descartes는 이 방정식이 직선, 포물선, 타원 또는 쌍곡선이 되기 위한 계수의 조건을 지적했는데, 이것은 어떤 의미에서 보면 원뿔곡선의 특성을 아는 것이기도 했다. Descartes는 원점과 축을 적당히 취하면 원뿔곡선 방정식의 가장 단순한 형태를 얻는 것을 이해했으나, 표준형을 분명히 제시하지는 않았다[6].

Wallis의 원뿔곡선(*Tractatus de sectionibus conics*)은 Descartes가 시작한 원뿔곡선의 산술화를 완성한 것으로 볼 수 있다[6]. 이 저작에서는 원뿔의 절단면이 곡선을 만든다는 사실에 대한 언급으로 시작했으나, 평면좌표를 사용하여 원뿔곡선의 잘 알려진 모든 성질로부터 세 개의 표준형을 얻어냈다. 이후 그는 이러한 세 개의 표준형 방정식을 원뿔곡선의 독립적인 정의로 사용하였는데, 이것으로 원뿔곡선은 원뿔을 이용한 정의에서 벗어났다. 오늘날에는 원뿔곡선을 평면 좌표계에서 그 좌표값이 두 변수의 이차방정식을 만족하는 점의 자취로 정의하기도 하고, 이차곡선이라고 부르고 있다.

van Schooten(1615-1660)은 1657년에 데카르트에 의한 기하학(*Geometria a Renato Des Cartes*)에서 Descartes의 기하학에 대한 광범위한 해설을 하였으며, 초점과 준선 방법을 사용하여 포물선 그리기를 시도하였다[11]. 그의 저작에는 Descartes가 설명하지 않은 부분에 대해서도 보충되어 기술되었기 때문에, Descartes의 '기하학'보다도 더 일반적으로 읽혀졌다. 원뿔곡선이 대수적으로 표현되면서 그 내용과 본질이 이차 곡선으로 바뀌게 되었다. 이후에 해석기하가 미분적분학으로 발전해 나감에 따라, 이차곡선은 곡선과 방정식을 서로 관련지어서 연구되었다.

10) 사실 그는 음의 좌표의 의미를 충분히 이해하지 못했다. 그는 음의 세로 좌표가 양의 세로 좌표에 대하여 반대 방향에 있다고는 생각했으나, 음의 가로 좌표에 대해서는 이렇게 생각하지 않았다[6].

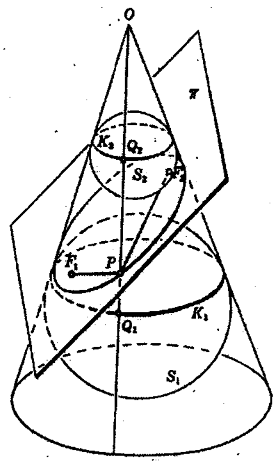
11) 이후 탈문맥화되고, 추상화됨에 따라 수학은 과학과 분리가 되었다. 따라서 물리적이고 경험적인 근원과 분리된 순수 수학과 응용 수학의 분야가 생겼다. 따라서 다른 학문과의 의사소통이 부족하게 되었고, 수학을 문화적 도구 혹은 문제와 활동에 근원을 가지고 있는, 즉 사회적 역사적 발생의 근원을 가진 문화적 도구로서 생각하지 않게 되었다. 이러한 경향성은 곡선 그리기 잘치가 더 이상 중요하지 않게 된 원인이 되기도 하였다.



<그림 3> van Schooten의 타원 그리는 도구(출처: [10])

1-6. Danderin

Dandelin은 원뿔곡선에 대한 2차원적 접근과 3차원적 접근을 연결하려고 시도하였다. 그 동안에는 2차원적 접근을 중심으로 연구가 진행되었으나, 그는 1822년에 원뿔곡선의 초점을 원뿔과 그 단면의 모양과 관련지은 연구결과를 발표하였다. 타원에 대한 방법은 다음 그림 4와 같다[12].



<그림 4> Dandelin의 구(출처: [8])

12) 포물선과 쌍곡선에 대해서도 마찬가지 방법으로 가능하다.

그림 4에서 점 F_1과 F_2에서 평면 π에 접하도록 두 개의 구 S_1과 S_2을 놓는다. S_1과 S_2는 각각 원 K_1과 K_2를 포함하고, 이들 원은 서로 평행하다. 임의의 점 P와 F_1과 F_2를 연결하고, P를 원뿔의 꼭지점 O와 연결한다. 이 직선은 원 K_1과 K_2와 각각 점 Q_1과 Q_2와 만난다. 직선 PF_1과 PQ_1은 S_1에 접한다. 따라서 $PF_1 = PQ_1$이다. 마찬가지로, $PF_2 = PQ_2$이다. 따라서 $PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2 = Q_1 + Q_2$의 값은 일정하다.

2. 원뿔곡선에 대한 제 측면

2-1. 활동으로서의 수학

Freudenthal은 수학을 결과적 지식 체계로서의 수학, 곧 기성 수학과 활동으로서의 수학, 곧 실행되는 수학으로 구분한다. 이러한 생각은 일찍이 지식과 지식의 기록으로 구분한 Dewey, 체계적인 연역적 과학으로서의 수학과 발생상태의 수학을 구분한 Polya의 생각과 유사하다고 할 수 있다[4].

Freudenthal은 실행되는 수학의 중요한 수학적 활동을 수학화 활동으로 보고 있다. 수학화란 수학적 수단에 의해 현상을 정리하고 조직하는 활동이며, 현실 상황이 들어있는 현상 가운데에서 그 정리 수단인 본질을 찾는 활동, 즉 현상에 질서를 부여하는 활동을 말한다[4]. 수학화 과정은 현실의 풍부한 문맥 내에서 이상화와 단순화 과정을 통해서 비본질적인 것을 제거하고 그 문맥내의 본질을 이해하는 활동으로 볼 수 있으며, 소음이 있는 현상 가운데에서 그 정리 수단인 본질을 찾고 조직해 나가는 과정이라 할 수 있다[5]. 수학화 활동의 대표적인 예로는 공리화, 형식화, 도식화를 들 수 있다. 수학은 문제 해결을 위해서 비약적으로 발생했으며, 이러한 상황이 수학 발전의 원동력이 되었다. 수학의 응용은 수학의 방향을 제시함과 동시에 수학의 유용성을 드러내 주는 구실을 함으로써, 수학의 이론과는 불가분의 관계에 있다.

Fischbein은 수학을 활동으로 볼 때, 수학의 기본 성분으로 형식적인 것, 알고리즘적인 것, 직관적인 것으로 보고 이들 사이의 상호 관계가 중요하다고 보았다[13]. 첫째, 형식적 측면은 공리, 정의, 정리, 증명 등을 말한다. 형식적 측면을 학습하기 위해서는 가설-연역적 과정에서 엄밀성이 의미하는 것이 무엇인가를 이해해야 하고, 일관성이나 무모순성에 대해 자각하고, 명제적으로 사고하는 능력을 지녀야 한다. 이것은 자발적으로 획득될 수 없으며, 적절한 교수 과정에 의해 형성된다. 둘째, 알고리즘적인 측면은 풀이 테크닉과 기본 전략들을 말한다. 공리, 정리, 증명, 정의, 개념 등을 이해해야 할 뿐 아니라 알고리즘을 사용할 수 있는 기술, 그리고 각각의 알고리즘 절차에 대한 타당성을 아는 것도 중요하다. 셋째, 직관적 측면은 각 개인이 개념, 정리, 또는 문제의 풀이에 대해서 정당화할 필요가 있다는 느낌 없이 즉각적으로 받아들이는 인지의 한 형태이다. 예를 들어, '전체는 그것의 부분보다 더

크다', '두 점을 연결하는 가장 짧은 길은 직선이다' 등은 겉으로 보기에 자명하기 때문에, 직관적으로 받아들여지게 된다. 직관은 해석이나 추론에 지배적인 영향을 미친다. 직관적 인식이란 때로는 논리적으로 정당화 될 수 있는 진리와 일치할 수도 있지만, 때로는 모순될 수도 있다. 따라서 직관이란 학습, 풀이, 발명 과정에서 장애가 될 수 있다.

지금까지 논의된 수학의 본질을 고려해볼 때, 인간 활동으로서의 수학의 기본성분을 응용적 측면, 형식적 측면, 알고리즘적인 측면, 직관적인 측면으로 정리할 수 있다. 이러한 성분들은 상호작용 하면서 수학을 발전시키게 된다.

본 연구에서는 기하학적 개념인 원뿔곡선의 다양한 측면을 고찰해 보고자 하는 것이므로 형식적 측면, 응용적 측면, 직관적 측면에 대해서 분석하기로 한다.

2-2. 형식적 측면

Apollonius 시대 이래로, 원뿔 곡선을 좀더 깊이 이해하게 됨에 따라 원뿔곡선의 성질은 대체로 관계에 의해서 표현되어지고, 그것은 원뿔의 모양이나 단면의 모양과는 관계가 없었다. 예를 들면, Apollonius의 이론은 비율과 면적의 응용으로 발전하였고, 자르는 평면에 의한 원뿔곡선이 비에 의해 특징지어졌다. 다시 말하면, 3차원 접근에서 2차원적 접근으로 관점이 옮겨지게 되었다.

17세기에는 계산에 기초하여 이러한 과정이 진행되었고, 방정식으로 원뿔 곡선을 대수적으로 표현하게 됨으로써 그 정점에 이르게 되었다. 원뿔곡선에 좌표를 도입하여 이차식으로 나타냄으로써 원뿔곡선을 통일적으로 다룰 수 있게 되었다. 그러나 수학자들은 수세기에 걸쳐 3차원적 접근과 2차원적 접근을 의미있게 연결하는 것을 간과하였다. Dandelin이 1822년에 3차원에서 초점과 원뿔 곡선의 관계에 대한 연구 결과를 얻음으로써 3차원적 접근과 2차원적 접근을 연결시키게 되었다. 이러한 연구들은 그 나름대로 형식화되었다.

강홍규 등은 수학에서의 정의 방법을 상식적 정의 방법과 학문적 정의 방법으로 나누고, 동의적 방법, 예시적 방법, 암묵적 방법 등은 상식적 정의 방법에, 구성적 방법(혹은 발생적 방법), 분석적 방법, 종합적 방법 등은 학문적 정의 방법에 포함시켰다[1]. 구성적 방법은 사물이 생성되는 방식으로 기술하는 것으로, Euclid의 '원론'에서 어떤 한 변을 중심으로 삼각형이나 평행사변형을 회전시켜 얻은 도형들을 각각 원뿔과 원기둥으로 정의하는 것이 그 예가 될 수 있다. Apollonius가 원뿔곡선을 원뿔의 절단면으로 정의한 것도 구성적 방법이라 할 수 있다. Boyer에 따르면, 고대 사람들이 평면 곡선을 정의하는 방법으로 인정한 것은 한 점의 운동을 두 방향 운동의 합성으로 하는 운동학적 정의와 원뿔, 구, 원기둥과 같은 기하학적 입체의 겉면을 평면으로 자르는 것뿐이었다. 이러한 방식의 정의는 구성적 방법에 속한다고 할 수 있다[6].

종합적 정의는 관계들로 이루어진 어떤 체계 내에서 정의하려는 사물이 차지하는 위치를 부여하는 식으로 이루어지는 정의이다. 이차식에 의한 원뿔곡선의 정의가 이에 해당한다. 무엇보다도 초점과 준선에 의한 정의는 포물선, 타원, 쌍곡선의 본질을 가장 잘 나타내고 있는데 이는 분석적 정의라고 할 수 있다. 예를 들면, 한 정점과 그 점을 지나지 않는 직선에 이

르는 거리가 같은 점의 자취를 포물선이라고 정의하는 것을 들 수 있다.

2-3. 응용적 측면

수학의 유용성은 지력을 도야하고 합리성을 개발하는 도야재로서의 유용성과 생활과 과학의 도구로서의 유용성을 생각할 수 있다. 원뿔 곡선도 그 이론이 발달되어 가는 가운데, 수학 내적, 그리고 수학 외적으로 응용되었다. 수학 내적에서는 수학 문제를 해결하는데 응용되었으며, 예를 들면, Hipocrates는 입방체의 배적 문제를 $a:x=x:y=y:2a$인 x를 구하는 문제가 되며, 이것은 두 포물선 $x^2=ay$, $y^2=2ax$의 교점인 x좌표를 구하는 것으로 귀착된다고 생각하였다.

수학 외적으로 응용될 때는 초점의 개념이 중요한데, 원뿔 곡선이나 원뿔 곡면은 일상 생활에서 흔히 나타난다. 앞에서도 살펴본 바와 같이 원뿔 곡선의 초점이라는 말은 Kepler가 그 광학적 성질 때문에 붙인 이름이다[13]. 타원면의 경우 초점에서 불이 나면, 다른 초점에서도 불이 난다고 생각할 수도 있다. 타원 꼴의 푸울 이라면, 한 초점에서 일으킨 수면의 물결을 다른 초점으로 모일 것이다. Archimedes는 포물면경의 성질을 이용하여 태양광선을 쓴 용광로를 만들고, 적의 군함을 태울 수 있는 장치도 만들었다고 한다[3]. 포물면을 이용한 것으로는 자동차의 헤트라이트, 반사 망원경 등이 있다.

원뿔곡선은 고대부터 계속 연구되었음에도 불구하고 Kepler와 Galilei 시대에 와서야 과학 분야에서 본격적으로 응용되었다. 타원은 천문학에, 포물선은 물리학에 주로 응용되었다. 1610년 경에 Keper는 혜성들이 태양을 한 초점으로 가지는 타원 운동을 함을 발견하였고, 또 Galilei는 던저 올린 물체가 포물선 운동을 함을 보였다. Newton은 1686년 *Principia*에서 Kepler의 법칙이 만유 인력의 법칙과 운동의 세 법칙들로부터 증명됨을 보였다[14]. 원자 물리학에서는 소미립자의 전자 궤도가 타원임을 밝혀냈으며, 양자 역학에서의 중요한 정리는 자기타원 작용소(선형 변환)에 관한 스펙트럼 정리이다[3].

2-4. 직관적 측면

기하학에서는 개념적 측면과 형상적 측면을 동시에 지니는 정신적 실재를 다룬다. 예를 들면, 기하학적 곡면의 경우 추상적이고 형식적인 정의를 통한 실재이기도 하고 동시에 도형적 성질도 지닌다. 이러한 개념과 도형의 측면사이의 공생은, 이미지 측면에서는 새로운 사고를 할 수 있는 방향으로 자극하고, 논리적이고 개념적인 측면은 형식적이고 엄밀한 과정에 개입한다. 그래서 Fischbein은 기하적 도형을 도형적 개념이라고 부르고, 이러한 개념

13) 초점(focus)라는 말은 지금도 카메라를 다룰 때 쓰인다. 동양에서 초점이라 할 때, 초는 "볶을 초, 구울 조, 델 초, 불내날 초"등의 뜻을 가지는 데, 이는 렌즈로 태양 광선을 모아 불을 붙인다는 데서 나온 듯 하다[3].

14) Newton은 "해석적으로 계산한 것이 아니라 고대 사람들의 요구에 따라 기하학으로 계산 한 것이다"라고 하면서 자신의 연구에 Descartes의 방법보다는 종합기하학적 방법에 의한 원뿔곡선을 이용하였다[1].

은 두 측면 즉, 개념적 측면과 도형적 측면을 모두 가지는 것으로 본다[12]. 따라서 기하학적 개념에서의 직관적 측면은 형상적 측면으로 설명될 수 있다.

원뿔곡선도 형식적 측면과 형상적 측면(도형적 측면)을 모두 가지고 있다. 원뿔 곡선의 형상적 측면은 원뿔의 단면의 모양에서 찾을 수 있다. 단면의 모양을 예측하기는 쉬운 일이 아니다. 원뿔과 평면의 공통부분은 집합론적으로는 쉽게 정의될 수 있지만, 단면이 되는 도형의 모양을 탐구하기 위해서는 두 도형의 복잡한 기하학적 성질을 고려하여야 한다[7]. 예를 들어 평면으로 정육면체를 자른다고 할 때, 단면이 되는 모양을 생각해 보자. 단면이 되는 것으로 정사각형이나 직사각형을 생각하기는 쉬워도 다른 모양을 상상하기는 어렵다. 어려운 이유는 도형적 측면과 개념적 측면과의 갈등이다. 도형적 측면인 대상의 전체적인 모양과 그 구성 요소, 즉 모든 면이 정사각형이고, 그 면들은 서로 평행이거나 수직이라는 정육면체의 도형적 측면과 자르는 평면과의 관계를 생각해야 하는 것과, 개념적 측면인 정육면체의 점의 집합과 주어진 평면의 점의 집합과의 교점의 성질에 관한 것과의 갈등이다. 정육면체에는 많은 암묵적인 성질이 있는데, 그것은 단면의 모양을 알아내기 위해서 결정적인 것이지만, 즉각적으로 파악되지는 않는다. 그리고 지각적 속성과 상충되기도 한다. 따라서 단면의 성질을 인식하기가 어렵다. 이러한 점에서 볼 때, 단면의 모양과 관련된 개념은 고차적 수준의 개념임을 시사한다.

다음으로 Descartes의 원뿔곡선의 연구에서 사용한 곡선을 그리는 기하학적 방법을 들 수 있으며, 그는 그리는 활동을 분석하여 이차식을 얻을 수 있었다.

원뿔곡선의 형식적 측면, 응용적 측면, 형상적 측면 사이의 관계에 대해 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 원뿔곡선 이론의 발달은 형식적 측면과 응용적 측면의 상호작용으로 확인할 수 있다. 원뿔 곡선에 대한 이론적 측면과 실제 및 응용의 측면은 시대에 따라 독립하여 발전되기도하고, 때로는 두 세계가 접촉하여 서로 도움이 되기도 하였다. 그러나 서로 독립된 두 세계는 각기 독특한 관점이나 추론 스타일을 지니고 있다. Kepler와 Newton 등이 이론적 측면을 응용에 적극적으로 적용시키고자 노력한 것 등이 그 예라고 할 수 있다. 둘째, 형식적 측면과 형상적 측면의 상호작용을 들 수 있다. 원뿔의 단면에 의한 형상적 측면과 형식적 측면 사이의 관계를 Duler와 Dandelin 등이 관련짓고자 하였다. 그리고 Descartes는 도구로 곡선을 그리고, 곡선을 그리는 도구에 포함된 기하학적 행동을 분석하여 곡선의 방정식을 알아냈으며, 2차원에서 형상적 측면과 형식적 측면을 연결시키고자 하였다.

3. 결론

기하 문제를 해결하기 위해서 본격적으로 연구된 원뿔 곡선은 그 이론이 발전함에 따라 많은 응용을 하게 되었으며, 특히 원뿔 곡선은 일상생활에서 유용하게 쓰이고 있다. 그리고 원뿔곡선과 이차곡선 사이의 전환은, 수학이 본질과 내용 면에서 성장 뿐 아니라 재구성되었음을 보여주는 예가 된다.

본 연구에서는 원뿔 곡선의 역사적 발달과 함께 형식적 측면, 응용적 측면, 직관적 측면에서 원뿔곡선을 살펴보았다. 이러한 여러 요소를 고려하는 것은 원뿔곡선을 지도하는데 있어서 중요한 요소이다. 특히, 수학적 개념에 다양한 정의가 있음이 원뿔곡선에서도 확인되었다. 형식적 측면에서 다양한 정의 및 그 응용이 지도되어야 하는 것은 Archimedes의 연구과정을 통하여서도 알 수 있다. 기하학은 공리, 정의, 정리로 구성된 것으로 볼 수 있는데, 원뿔곡선과 관계된 기하학적 논증이나 문제 해결에서는 원뿔곡선의 정의나 그에 관한 정리를 사용하게 될 것이다. 하나의 수학적 개념에 대하여 다양한 수학적 정의를 알고 있어야 하고 그것 중 알맞은 것을 선택해야 성공적으로 문제를 해결할 수 있다. 구는 주어진 한 점으로부터 주어진 거리에 있는 점의 자취로 정의되거나, 지름을 축으로 하여 회전하는 원에 의해 그려지는 곡면으로 정의하기도 한다. Archimedes가 구의 표면적을 구하는 문제를 해결하고자 하였을 때, 그는 고정된 지름을 축으로 회전함으로서 생성되는 구의 정의에 의하여 문제를 해결하였다[12]. 이러한 예를 통하여 알 수 있듯이 하나의 수학적 개념에 대해 다양한 수학적 정의의 지도도 중요하다고 할 수 있다.

참고 문헌

1. 강흥규, 조영미, "학교 수학에서의 다양한 정의 방법과 교수학적 의의," **대한 수학교육학회 수학교육 연구 발표대회 논문집**, 2000, 161-185.
2. 김용운, 김용국, **수학사 대전**, 우성문화사, 1988.
3. 박세희, 수학의 세계. 서울대학교 출판부1992.
4. 우정호, **수학학습-지도 원리와 방법**, 서울대학교 출판부, 2000.
5. 정영옥, **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**, 서울대학교 대학원 박사학위논문, 1997.
6. Boyer, C.B./ 양영오, 조윤동(역), **수학의 역사 상하**, 경문사, 2000.
7. Bussi, M., Mariotti, M.A., "Semiotic mediation: from history to the classroom," *For the Learning of Mathematics*, 19(1999), 27-35.
8. Courant, Robbinson, *What Is Mathematics,* Oxford university Press, 1943.
9. Dennis, D., *Historical Perspectives for the Reform of Mathematics Curriculum: Geometric Curve Drawing Devices and Their Roll in the Transition to an Algebraic Description of Functions,* Ph.D. Dissertation, Cornell University, 1995.
10. Dennis, D.& Confrey, J., "Geometry curve-drawing devices as an alternative approach to analytic geometry: An analysis of the methods, voic, and epistemology of high school senior," *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space,* Lawrence Erlbaum Associates, 1998, 297-318.
11. Eves, H./ 허민, 오혜영(역), **수학의 위대한 순간들**, 경문사,1999.

12. Fischbein, E., "The theory of figural concepts." *Educational Studies in Mathematics*, 24, 1993, 139-162.
13. Fischbein, E., "The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive compents in a mathematical activity," *Didactics of Mathematics as Scientific Discipline,* Kluwer Academic Publisher, 1994, 231-245.
14. Herz-Fischer, R., "Durer's paradox or an ellipse is not egg-shaped." *Mathematics Magizine*, 63(1990), 139-162.
15. Polya, G./ 우정호(역), **어떻게 문제를 풀 것인가**, 천재교육, 1986.
16. Sinclair, N.M., *Mathematical Applications of Conic Sections in Problem Solving in Ancient Greece and Medieval Islam,* M.S. Dissertation, Simon Faser University, 1993.
17. Teukolsky, R., "Conic Sections: An exciting enrichment topic." *Learning and Teaching geometry, K-12,* NCTM, 1987, 155-174.