

句股互隱門에 대한 고찰*

수원대학교 수학과 호문룡

Abstract

Hong, Jung-Ha(1684-?) explained 78 problems which look for the length of right triangle satisfying the given conditions by the Pythagorean theorem or the ratio of similarity in the chapter 'Goo-Go-Hoh-Eun-Moon' of the 5th volume of his book *Goo-Ill-Jeep*. Most questions are formulated by equations of degree 2, 3, 4 which mostly have rational number solutions and part of the equations are expressed by counting stick. The explanation of each question describes the procedure to make the equation in detail, but only presents the solution with a few steps to solve.

0. 서론

洪正夏(1684-?)는 증인 출신의 산학자로 저술로는 九一集이 남아 있다[2]. 이 算書는 天, 地, 人 세 책으로 되어 있으며 天은 目錄, 凡例, 卷之一, 卷之二, 卷之三으로, 地는 卷之四, 卷之五, 卷之六으로, 人은 卷之七, 卷之八, 卷之九로 되어 있으며 각 권의 내용은 다음과 같다[1]. (앞으로 원본의 漢字중 古字, 俗字, 中國簡體字 등은 常用字로 쓰겠다.)

卷之一: 縱橫乘除門 19問, 異乘同除門 8問, 田畝形段門 29問, 折變互差門 16問, 商功修築門 8問

卷之二: 貴賤差分門 22問, 差等均配門 18問, 貴賤反率門 3問

卷之三: 之分齊同門 6問, 物不知總門 13問, 盈不足術門 13問

卷之四: 方程正負門 14問, 毬隻解隱門 9問, 罐瓶堆垛門 19問, 倉囤積粟門 26問

卷之五: 句股互隱門 78問, 望海島術門 6問

卷之六: 開方各術門 上 58問

卷之七: 開方各術門 中 66問

* 본 연구는 수원대학교 2002년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

卷之八: 開方各術門 下 42問

卷之九: 雜錄

구일집은 서문이 없으며 각 권마다 南陽 洪正夏 著라 쓰고 본문에 바로 들어갔다. 저술한 年度는 기록하지 않았으나 卷之九 雜錄에 “癸巳閏五月二十九日余與劉生壽錫入館中與五官司曆何國柱論算”과 같은 기록으로 보아 1713년 이후이다.

본고에서는 卷之五중 ‘句股互隱門’의 내용에 대하여 고찰하고자 한다.

1. 句股互隱門의 問과 答

‘句股互隱門’에는 78개의 문제와 답, 그 해법이 써 있다. 문제와 답을 풀어 쓰면 다음과 같다[1]. 원본에는 문제에 번호가 없으나 편의상 번호를 붙이고 측정단위는 원본을 따른다.

문 1] 지금 句(직각삼각형의 직각을 낀 두 변 중에서 짧은 변)는 24尺이고 股(직각삼각형의 직각을 낀 두 변 중에서 긴 변)는 45尺이다. 弦(직각삼각형의 빗변)은 얼마인가?

답. 弦 51尺

문 2] 지금 句는 24尺이고 弦은 51尺이다. 股는 얼마인가?

답. 股 45尺

문 3] 지금 句는 $6\frac{2}{3}$ 尺이고 股는 8尺이다. 弦은 얼마인가?

답. 弦 $10\frac{76}{189}$ 尺

문 4] 지금 股는 45尺이고 弦은 51尺이다. 句와 中容方圓(내접하는 정사각형과 원)은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 圓徑(원의 지름) 18尺, 方面(정사각형의 변) $15\frac{45}{69}$ 尺

문 5] 지금 池中에 蓮 두 줄기가 자라나 물 위로 올라온 길이는 6尺이고 한줄기는 바람으로 기울어져 24尺이르는 岸(둑)에 닿았다. 水深과 蓮의 길이는 각각 얼마인가?

답. 水深 45尺, 蓮의 길이 51尺

문 6] 지금 股는 45尺인데 弦은 句보다 27尺 크다고 한다. 句와 弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 弦 51尺

문 7] 지금 弦은 51尺인데 股는 句보다 21尺 크다고 한다. 句와 股는 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺

문 8] 지금 문(양쪽 여닫이)을 문지방에서 5寸 열었더니 벌어진 틈새는 1寸이다. 문 너비는 얼마인가?

답. 門廣 2尺4寸7分5厘

문 9] 지금 圓木이 진흙벽 속에 있는데 지름을 모른다. 톱으로 켜 깊이가 1寸이고 톱으로 켜 너비는 1尺이다. 나무의 지름은 얼마인가?

답. 木徑 2尺 6寸

문 10] 지금 圓木의 지름은 2尺6寸이고 톱이 나무에 들어간 깊이는 8寸이다. 톱으로 켜 너비는 얼마인가?

답. 톱으로 켜 너비는 2尺4寸

문 11] 지금 句는 30尺인데 股弦합은 90尺이라 한다. 股弦은 각각 얼마인가?

답. 股 40尺, 弦 50尺

문 12] 지금 股는 45尺인데 句弦합은 75尺이라한다. 句弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 弦 51尺

문 13] 지금 弦은 51尺인데 句股합은 69尺이라한다. 句股는 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺

문 14] 지금 句弦차는 27尺이고 股弦차는 6尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 15] 지금 句股차는 21尺이고 股弦차는 6尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 16] 지금 句股차는 21尺이고 句弦차는 27尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 17] 지금 句弦합은 75尺이고 股弦합은 96尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 18] 지금 句股합은 69尺이고 句弦합은 75尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 19] 지금 句股합은 69尺이고 股弦합은 96尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 20] 지금 句股합은 69尺이고 股弦차는 6尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 21] 지금 句股합은 69尺이고 句弦차는 27尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 22] 지금 句弦합은 75尺이고 句股차는 21尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 23] 지금 句弦합은 75尺이고 股弦차는 6尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 24] 지금 股弦합은 96尺이고 句弦차는 27尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 25] 지금 股弦합은 96尺이고 句股차는 21尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 26] 지금 句股田(직각삼각형 모양의 밭)의 넓이는 540尺인데 弦은 51尺이라 한다. 句股는 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺

문 27] 句股田의 넓이는 540尺인데 句股차는 21尺이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 28] 지금 句股積(직각삼각형의 넓이)은 540尺인데 句弦차는 27尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 29] 지금 句股積은 540尺인데 股弦차는 6尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 30] 지금 句股積은 540尺인데 句股합은 69尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 31] 지금 句股積은 540尺인데 句弦합은 75尺이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 32] 지금 句股積은 540尺인데 股弦합은 96尺이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 33] 지금 句股積은 540尺인데 句股弦합은 120尺이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 34] 지금 句股積은 540尺인데 句弦곱은 1224尺이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 35] 지금 句股積은 540尺인데 股弦곱은 2295尺이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 36] 지금 句弦곱은 1224尺이고 股弦곱은 2295尺이다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 37] 지금 句股積은 540尺인데 句弦차와 句弦합의 곱은 2025尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 38] 지금 句股積은 540尺인데 股弦차와 股弦합의 곱은 576尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 39] 지금 句股積은 540尺인데 句股차와 句股합의 곱은 1449尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 40] 지금 句股積은 540尺인데 句로 股를 나누면 1尺8寸7分5厘라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 41] 지금 句股積은 486尺인데 股로 句를 나누면 7寸半이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺

문 42] 지금 句股積은 540尺인데 句로 弦을 나누면 2尺1寸2分半이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 43] 지금 句股積은 486尺인데 股로 弦을 나누면 1尺2寸半이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺

문 44] 지금 句股積은 486尺인데 弦으로 句를 나누면 6寸이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺

문 45] 지금 句股積은 486尺인데 弦으로 股를 나누면 8寸이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺

문 46] 지금 句는 24尺인데 股弦곱은 2295尺이라 한다. 股弦은 각각 얼마인가?

답. 股 45尺, 弦 51尺

문 47] 지금 句股차는 21尺인데 句弦곱은 1224尺이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 48] 지금 句股차는 21尺인데 股弦곱은 2295尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 49] 지금 股弦차는 6尺인데 句弦곱은 1224尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 50] 지금 股弦합은 96尺인데 句弦곱은 1224尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 51] 지금 句股합은 69尺인데 股弦곱은 2295尺이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺

문 52] 지금 句는 27尺인데 股로 弦을 나누면 1尺2寸半이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 股 36尺, 弦 45尺

문 53] 지금 股는 36尺인데 弦으로 句를 나누면 6寸이라 한다. 각각은 얼마인가?

답. 句 27尺, 弦 45尺

문 54] 지금 弦은 45尺인데 股로 句를 나누면 7寸半이라 한다. 句股는 각각 얼마인가?

답. 句 27尺, 股 36尺

문 55] 지금 句股합은 69尺인데 句로 股를 나누면 1尺8寸7分半이라 한다. 句股弦은 각각 얼마인가?

- 답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺
- 문 56] 지금 股弦합은 81尺인데 股로 句를 나누면 7寸半이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺
- 문 57] 지금 句弦합은 72尺인데 股로 句를 나누면 7寸半이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺
- 문 58] 지금 句股합은 63尺인데 弦으로 句를 나누면 6寸이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺
- 문 59] 지금 句股합은 63尺인데 股로 弦을 나누면 1尺2寸半이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺
- 문 60] 지금 股弦합은 96尺인데 句로 弦을 나누면 2尺1寸2分半이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺
- 문 61] 지금 句股차는 21尺인데 句로 股를 나누면 1尺8寸7分半이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺
- 문 62] 지금 句弦차는 18尺인데 股로 句를 나누면 7寸半이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺
- 문 63] 지금 句弦차는 27尺인데 句로 股를 나누면 1尺8寸7分半이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺
- 문 64] 지금 股弦차는 9尺인데 股로 句를 나누면 7寸半이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺
- 문 65] 지금 股弦차는 9尺인데 弦으로 股를 나누면 8寸이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺
- 문 66] 지금 句股차는 21尺인데 句로 弦을 나누면 2尺1寸2分半이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 24尺, 股 45尺, 弦 51尺
- 문 67] 지금 股弦차는 9尺인데 弦으로 句를 나누면 6寸이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺
- 문 68] 지금 句股차는 9尺인데 弦으로 股를 나누면 8寸이라 한다. 각각은 얼마인가?
답. 句 27尺, 股 36尺, 弦 45尺
- 문 69] 지금 句股田의 長(길이)은 15步이고 濶(너비)은 10步이다. 이제 뽕족한 데부터 濶 4步를 끊는다. 長은 얼마 끊기는가?
답. 長은 6步를 끊긴다.
- 문 70] 지금 句股田의 長은 15步이고 濶은 10步이다. 이제 뽕족한 데부터 長 6步를 끊는다. 濶은 얼마 끊기는가?
답. 濶은 4步를 끊긴다.
- 문 71] 지금 句股田의 濶은 10步이다. 이제 뽕족한 데부터 끊어 파는데 그 長은 6步이고 濶은 4步이다. 元長(처음 길이)은 얼마인가?
답. 15步

문 72] 지금 句股田의 長은 15步이다. 이제 畝족한 데부터 끊어 버리는데 濶은 4步 남고 長은 9步 남았다. 元濶(처음 너비)은 얼마인가?

답. 10步

문 73] 지금 句股田의 濶은 10步이다. 이제 畝족한 데부터 끊어 버리는데 濶은 4步 남고 長은 9步 남았다. 元長은 얼마인가?

답. 15步

문 74] 지금 句股田의 長은 15步이고 濶은 10步이다. 이제 畝족한 끝부터 截積(끊긴 넓이)은 12步이다. 두 截長闊(끊긴 길이와 너비)은 각각 얼마인가?

답. 截長 6步, 截濶 4步

문 75] 지금 句股田의 積(넓이)은 75步이다. 이제 畝족한 데부터 끊어 파는데 그 長은 6步이고 濶은 4步이다. 元長濶은 각각 얼마인가?

답. 元長 15步, 元濶 10步

문 76] 句股田의 積은 75步이다. 이제 畝족한 데부터 끊어 버리는데 長은 9步 남고 濶은 4步 남았다. 元長闊은 각각 얼마인가?

답. 元長 15步, 元濶 10步

문 77] 지금 句股玉(직각삼각형 모양의 옥) 한 덩어리로 정사각형 모양의 도장을 도장의 한 변이 4寸 되게 만드는데 남은 股는 8寸이라 한다. 元句(처음 밑변)는 얼마인가?

답. 元句 6寸

문 78] 지금 長短을 알지 못하는 句股玉으로 정사각형 모양의 도장을 만드는데 자로 길이를 재고 남은 것은 餘股 8寸이고 餘句 2寸이다. 도장의 한 변과 句股는 각각 얼마인가?

답. 도장의 한 변 4寸, 句 6寸, 股 1尺2寸

2. 測定單位

길이를 측정하는 단위로 尺을 사용했다.

1尺=10寸, 1寸=10分, 1分=10厘, 1厘=10毫, 1毫=10絲, 1絲=10忽

넓이(積)를 측정하는 단위로 尺(平方尺이 아님)을 사용했다.

1尺=100寸, 1寸=100分, 1分=100厘, 1厘=100毫, 1毫=100絲, 1絲=100忽

3. 句股互隱門의 法

각 문제의 해법과 적용한 성질을 고찰하면 다음과 같다[1]. 여기서 측정단위는 원본을 따르고, 직각삼각형의 세 변의 길이는 a, b, c 라 두고 $a < b < c$ 인 것으로 한다.

句股互隱門에 대한 고찰

- 문 1] $a^2+b^2=2601$ 尺은 實, 제곱근을 구하면 弦이다.
- 문 2] $c^2-a^2=2025$ 尺은 實, 제곱근을 구하면 股이다.
- 문 3] $a^2+b^2=\frac{976}{9}$, 제곱근을 근사값으로 구하면 弦이다.
- 문 4] 내접원의 반지름이 r 인 직각삼각형의 면적은 $\frac{r}{2}(a+b+c)=\frac{ab}{2}$, 피타고라스 정리, 답은 풀의 성질
- 문 5] 피타고라스 정리, $a^2+(c-b)^2=540$ 은 實(나눗수), $2(c-b)=12$ 는 法(나눗수)으로 (水深)=(實) \div (法)
 一法, 피타고라스 정리에서 $a^2=(c-b)(c+b)$
- 문 6] 피타고라스 정리, $b^2-(c-a)^2=1296$ 尺은 實, $2(c-b)=54$ 는 法으로 $a=(實)\div$ (法)
 一法, 피타고라스 정리에서 $b^2\div(c-a)=c+a$
- 문 7] 피타고라스 정리에서 $2c^2=(b-a)^2+(b+a)^2$
 一法, $c^2-(b-a)^2=2160$ 尺은 實, $2(b-a)=42$ 尺은 從方, 2는 隅法으로 帶從平方을 풀어 句를 구한다.
 (隅法) (句)²+ (從方)(句)-(實)=0
 이는 연립방정식 $a^2+b^2=51^2$, $b-a=21$ 에서 b 를 소거한 a 의 이차방정식과 같다.
- 문 8] 피타고라스 정리에서 一邊門廣(문 한쪽 너비)={(去闕)²-(不合/2)²}\div(不合)
- 문 9] 피타고라스 정리
 一法, 피타고라스 정리
- 문 10] 피타고라스 정리
- 문 11] 피타고라스 정리에서 $a^2\div(b+c)=c-b$
 一法, 피타고라스 정리에서 $\{(b+c)^2-a^2\}\div 2=b(b+c)$
- 문 12] 피타고라스 정리에서 $b^2\div(a+c)=c-a$
 一法, 피타고라스 정리에서 $a=\{(a+c)^2-b^2\}\div 2\div(a+c)$
- 문 13] 피타고라스 정리에서 $(a-b)^2=2c^2-(a+b)^2$
- 문 14] 피타고라스 정리에서 $b=c-a+\sqrt{2(c-a)(c-b)}$
- 문 15] 피타고라스 정리에서 $a=c-b+\sqrt{2(b-a)(c-b)+2(c-b)^2}$
- 문 16] 피타고라스 정리에서 $b=c-a+\sqrt{2(c-a)^2-2(b-a)(c-a)}$
- 문 17] 피타고라스 정리에서 $a=\sqrt{2(a+c)(b+c)}-(b+c)$
 一法, $(a+c)^2+(b+c)^2=14841$ 尺은 實, $\{(a+c)+(b+c)\}\times 2=342$ 尺은 從方, 1은 隅法으로 減從平方을 풀어 弦을 구한다.
 (隅法) (弦)²-(從方)(弦)+(實)=0
 이는 연립방정식 $a^2+b^2=c^2$, $a+c=75$, $b+c=96$ 에서 a 와 b 를 소거한 c 의 이차 방정식과 같다.
- 문 18] $(a+c)^2-(a+b)^2=864$ 尺은 實, $2\{(a+c)-(a+b)\}=12$ 尺은 從方, 1은 隅法으로 帶從平

方을 풀어 句를 구한다.

문 19] $(b+c)^2 - (a+b)^2 = 4455$ 尺은 實, $2\{(b+c) - (a+b)\} = 54$ 尺은 從方, 1은 隅法으로 帶從平方을 풀어 股를 구한다.

문 20] $(a+c)^2 - (a+b)^2 = 864$ 尺은 實, $2\{(a+c) - (a+b)\} = 12$ 尺은 從方으로 帶從平方을 풀어 句를 구한다.

문 21] $(b+c)^2 - (a+b)^2 = 4455$ 尺은 實, $2\{(b+c) - (a+b)\} = 54$ 尺은 從方으로 帶從平方을 풀어 股를 구한다.

문 22] 피타고라스정리에서 $a + b + c = \sqrt{2(a+c)(b+c)}$

문 23] $(a+c)^2 - (a+b)^2 = 864$ 尺은 實, $2\{(a+c) - (a+b)\} = 12$ 尺은 從方으로 帶從平方을 풀어 句를 구한다.

문 24] $(b+c)^2 - (b+a)^2 = 4455$ 尺은 實, $2\{(b+c) - (b+a)\} = 54$ 尺은 從方으로 帶從平方을 풀어 股를 구한다.

문 25] $(c+a)^2 + (b+c)^2 = 14841$ 尺은 實, $2\{(c+a) - (b+c)\} = 342$ 尺은 從方으로 減從平方을 풀어 弦을 구한다.

문 26] $\frac{1}{2} ab \times 2 = 1080$ 尺은 實, $b - a = 21$ 尺은 從方으로 帶從平方을 풀어 句를 구한다.

一法, $\left(\frac{1}{2} ab \times 2\right)^2 = 1166400$ 尺은 實, $c^2 = 2601$ 尺은 從方으로 減從平方을 풀어 句羈(句의 제곱)을 구한다.

$$(\text{句羈})^2 - (\text{從方})(\text{句羈}) + (\text{實}) = 0$$

문 27] $\frac{1}{2} ab \times 2 = 1080$ 尺은 實, $b - a = 21$ 尺은 從方으로 帶從平方을 풀어 句를 구한다.

문 28] $(ab)^2 = 1166400$ 尺은 實, $(c-a)^2 = 729$ 尺은 從廉, $2(c-a) = 54$ 尺은 隅法으로 帶從立方을 풀어 句를 구한다.

$$(\text{隅法})(\text{句})^3 + (\text{從廉})(\text{句})^2 + (\text{從方})(\text{句}) - (\text{實}) = 0$$

이는 연립방정식 $a^2 + b^2 = c^2$, $ab = 1080$, $c - a = 27$ 에서 b 와 c 를 소거한 a 의 삼차 방정식과 같다.

문 29] $(ab)^2 = 1166400$ 尺은 實, $(c-b)^2 = 36$ 尺은 從廉, $2(c-b) = 12$ 尺은 隅法으로 帶從立方을 풀어 股를 구한다.

문 30] $ab = 1080$ 尺은 實, $a + b = 69$ 尺은 從方으로 減從平方을 풀어 句를 구한다.

문 31] $(a+c)ab \times 2 = 162000$ 尺은 實, $(a+c)^2 = 5625$ 尺은 從方正, 1은 隅法負로 立方減從을 풀어 股를 구한다.

$$-(\text{隅法})(\text{股})^3 + (\text{從方})(\text{股}) - (\text{實}) = 0$$

이는 $a^2 + b^2 = c^2$ 의 양변에 b 를 곱하여 변형한

$$-b^3 + (a+c)^2 b - 2ab(a+c) = 0$$

에 $a + b = 1080$, $a + c = 75$ 를 대입한 b 의 삼차방정식과 같다.

문 32] $2ab(b+c)=207360$ 尺은 實, $(b+c)^2=9216$ 尺은 從方正, 1은 隅法負로 減從立方을 풀어 句를 구한다.

$$-(隅法) (句)^3+(從方)(句)-(實)=0$$

문 33] 피타고라스 정리에서 $2c=(a+b+c)-\frac{2ab}{a+b+c}$

$$-法, 피타고라스 정리에서 $c=\frac{\frac{1}{2} [(a+b+c)^2-2ab]}{a+b+c}$$$

문 34] $a^4=(ac)^2-(ab)^2=331776$ 尺은 實, 네제곱근을 구하면 句이다.

문 35] $b^4=(bc)^2-(ab)^2=4100625$ 尺은 實, 네제곱근을 구하면 股이다.

문 36] $c^4=(ac)^2-(bc)^2=6765201$ 尺은 實, 네제곱근을 구하면 弦이다.

문 37] $b^2=(c-a)(c+a)=2025$ 尺은 實, 제곱근을 구하면 股이다.

문 38] $a^2=(c-a)(c+b)=576$ 尺은 實, 제곱근을 구하면 句이다.

문 39] $(ab)^2=1166400$ 尺은 實, 0은 甲從, $b^2-a^2=1449$ 尺은 乙從, 0은 丙從, 1은 丁從(隅法)으로 帶從三乘方을 풀어 句를 구한다.

$$(丁從)(句)^4+(丙從)(句)^3+(乙從)(句)^2+(甲從)(句)-(實)=0$$

이는 연립방정식 $ab=1080$, $(b-a)(b+a)=1449$ 에서 b 를 소거한 a 의 사차방정식과 같다.

문 40] 피타고라스 정리와 $b^2=ab \times \frac{b}{a}$

$$-法, 피타고라스 정리와 $a^2=ab \div \frac{b}{a}$$$

문 41] 피타고라스 정리와 $a^2=ab \times \frac{a}{b}$

$$-法, 피타고라스 정리와 $b^2=(ab) \div (\frac{a}{b})$$$

문 42] $(ab)^2=1166400$ 尺은 實, $(\frac{c}{a})^2-1=3.515625$ 尺은 隅法으로 帶從三乘方을 풀어 句를 구한다.

-法, 피타고라스 정리와 $b^4=b^2(c^2-a^2)=a^2b^2(\frac{c^2}{a^2}-1)=4100625$ 尺에서 네제곱근을 구하면 股이다.

문 43] $(ab)^2=944784$ 尺은 實, $(\frac{c}{b})^2-1=0.5625$ 尺은 隅法으로 三乘方(帶從三乘方에서 甲從, 乙從, 丙從은 모두 0인 경우)을 풀어 股를 구한다.

$$-法, 피타고라스 정리와 $ac=(ab)(\frac{c}{b})$$$

문 44] $b^4=(bc)^2-(ab)^2=1679616$ 尺은 實, 네제곱근을 구하면 股이다.

- 문 45] $a^4 = (ac)^2 - (ab)^2 = 531441$ 尺은 實, 네제곱근을 구하면 句이다.
- 문 46] $(bc)^2 = 5267025$ 尺은 實, $a^2 = 576$ 尺은 從方, 1은 隅로 帶從平方을 풀어 股羈을 구한다.
- 문 47] $(ac)^2 = 1498176$ 은 實, $(b-a)^2 = 441$ 은 乙從, $2(b-a) = 42$ 는 丙從, 2는 丁從(隅)으로 帶從三乘方을 풀어 句를 구한다.
- 문 48] $(bc)^2 = 5267025$ 는 實, $(b-a)^2 = 441$ 은 乙從正, $2(b-a) = 42$ 는 丙從負, 2는 丁從正(隅)으로 三乘方翻을 풀어 股를 구한다.
 (隅)(股)⁴ - (丙從)(股)³ + (乙從)(股)² + (甲從)(股) - (實) = 0
 이는 연립방정식 $b-a=21$, $bc=2295$, $b^2=c^2-a^2$ 에서 a 와 c 를 소거한 b 의 사차방정식과 같다.
- 문 49] $(ac)^2 = 1498176$ 은 實, $(c-a)^2 = 36$ 은 從廉負, $2(c-b) = 12$ 는 隅法正으로 立方翻을 풀어 弦을 구한다.
 (隅法)(弦)³ - (從廉)(弦)² + (從方)(弦) - (實) = 0
 이는 연립방정식 $c-b=6$, $ac=1224$, $c^2=a^2+b^2$ 에서 a 와 b 를 소거한 c 의 삼차방정식과 같다.
- 문 50] $2ac(b+c) = 235008$ 은 實, $(b+c)^2 = 9216$ 은 從方, 1은 隅法으로 帶從立方을 풀어 句를 구한다.
- 문 51] $(bc)^2 = 5267025$ 는 實, $(a+b)^2 = 4761$ 은 乙從正, $2(a+b) = 138$ 은 丙從負, 2는 丁從正(隅)으로 三乘方翻을 풀어 股를 구한다.
- 문 52] $a^2 = 729$ 尺은 實, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 - 1 = 0.5625$ 尺은 正隅로 平方帶從(帶從平方)을 풀어 股를 구한다.
- 문 53] $b^2 = 1296$ 尺은 實, $\left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 0.64$ 尺은 正隅로 平方帶從을 풀어 弦을 구한다.
- 문 54] $c^2 = 2025$ 尺은 實, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = 1.5625$ 尺은 隅法으로 平方帶從을 풀어 股를 구한다.
- 문 55] 피타고라스 정리와 $a = (a+b) \div \left(\frac{b}{a} + 1\right)$.
- 문 56] $(b+c)^2 = 6561$ 尺은 實, $2(b+c) = 162$ 尺은 從方, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 0.5625$ 尺은 隅法으로 帶從平方을 풀어 股를 구한다.
- 문 57] $(a+c)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2916$ 은 實, $2(a+c) \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 81$ 은 從方, 1은 隅로 帶從平方을 풀어 句를 구한다.
- 문 58] $(a+b)^2 \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1428.84$ 尺은 實, $2(a+b) \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 45.36$ 尺은 從方正, $1 - 2\left(\frac{a}{c}\right)^2 = 0.28$ 尺은 正隅로 帶從平方을 풀어 句를 구한다.

문 59] $(a+b)^2=3969$ 은 實, $2(a+b)=126$ 은 從方正, $2-\left(\frac{c}{b}\right)^2=0.4375$ 尺은 負隅로 減從平方을 풀어 股를 구한다.

$$-(\text{負隅})(\text{股})^2+(\text{從方})(\text{股})-(\text{實})=0, \text{ 즉 } (\text{隅法})(\text{股})^2-(\text{從方})(\text{股})+(\text{實})=0$$

문 60] $(b+c)^2\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right]=32400$ 은 實, $2(b+c)\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right]=675$ 는 從方, 1은 隅法으로 帶從平方을 풀어 股를 구한다.

문 61] $b-a=21$ 尺은 實, $\frac{b}{a}-1=0.875$ 尺은 法으로 句를 구한다.

문 62] $(c-a)^2=324$ 는 實, $2(c-a)\frac{a}{b}=27$ 은 從方負, 1은 隅法正으로 平方翻을 풀어 股를 구한다.

$$(\text{隅法})(\text{股})^2-(\text{從方})(\text{股})-(\text{實})=0$$

이는 연립방정식 $c-a=18$, $\frac{a}{b}=0.75$, $a^2+b^2=c^2$ 에서 a 와 c 를 소거한 b 의 이차방정식과 같다.

문 63] $(c-a)^2=729$ 尺은 實, $2(c-a)=54$ 尺은 從方負, $\left(\frac{b}{a}\right)^2=3.515625$ 尺은 隅法正으로 平方翻을 풀어 句를 구한다.

문 64] $(c-b)^2=81$ 尺은 實, $2(c-b)=18$ 尺은 從方負, $\left(\frac{a}{b}\right)^2=0.5625$ 尺은 隅法正으로 平方益積을 풀어 股를 구한다.

$$(\text{隅法})(\text{股})^2-(\text{從方})(\text{股})-(\text{實})=0$$

이는 연립방정식 $c-a=9$, $\frac{a}{b}=0.75$, $a^2+b^2=c^2$ 에서 a 와 c 를 소거한 b 의 이차방정식과 같다.

문 65] $(c-b)^2=81$ 尺은 實正, $2(c-b)=18$ 尺은 從方負, $1-\left(\frac{b}{c}\right)^2=0.36$ 尺은 正隅로 平方翻積을 풀어 弦을 구한다.

$$(\text{正隅})(\text{弦})^2-(\text{從方})(\text{弦})+(\text{實})=0$$

이는 연립방정식 $c-b=9$, $\frac{b}{c}=0.8$, $a^2+b^2=c^2$ 에서 a 와 b 를 소거한 c 의 이차방정식과 같다.

문 66] $(b-a)^2=441$ 은 實, $2(b-a)=42$ 는 從方負, $\left(\frac{c}{a}\right)^2-2=2.515625$ 尺은 正隅로 平方翻을 풀어 句를 구한다.

문 67] $(c-b)^2=81$ 은 實, $2(c-b)=18$ 은 從方負, $\left(\frac{a}{c}\right)^2=0.36$ 尺은 隅法正으로 平方翻積을

풀어 弦을 구한다.

문 68] $(b-a)^2=81$ 은 實, $2(b-a)\frac{b}{c}=14.4$ 尺은 從方正, $2\left(\frac{b}{c}\right)^2-1=0.28$ 尺은 負隅로 平方翻積을 풀어 弦을 구한다.

$$-(\text{負隅})(\text{弦})^2+(\text{從方})(\text{弦})-(\text{實})=0$$

문 69] 닭은꼴의 성질에서 $(\text{截長})=(\text{截濶})\times(\text{元長})\div(\text{元濶})$

$$\text{一法}, (\text{小長})=(\text{元長})\div(\text{元濶})\times(\text{元長})$$

문 70] 닭은꼴의 성질에서 $(\text{截濶})=(\text{截長})\times(\text{元濶})\div(\text{元長})$

문 71] 닭은꼴의 성질에서 $(\text{元長})=(\text{截長})\times(\text{元濶})\div(\text{截濶})$

문 72] 닭은꼴의 성질에서 $(\text{元濶})=(\text{餘濶})\times(\text{元長})\div(\text{截去長})$

문 73] 닭은꼴의 성질에서 $(\text{元長})=(\text{餘長})\times(\text{元濶})\div(\text{餘濶})$

문 74] 닭은꼴의 성질에서 $(\text{截長})^2=(\text{截積})\times 2\times(\text{元長})\div(\text{元濶})$, $(\text{截濶})=(\text{倍積})\div(\text{截濶})$

$$\text{一法}, (\text{截濶})^2=(\text{截積})\times 2\times(\text{元濶})\div(\text{元長})$$

문 75] 닭은꼴의 성질에서 $(\text{元長})^2=(\text{積})\times 2\times(\text{截長})\div(\text{截濶})$

$$\text{一法}, (\text{元濶})^2=(\text{積})\times 2\times(\text{截濶})\div(\text{截長})$$

문 76] $(\text{餘長})^2(\text{餘濶})=324$ 步는 實, $2\{(\text{元積})-(\text{餘長})(\text{餘濶})\}=78$ 步는 從方, $(\text{餘濶})=4$ 步는 隅法으로 減從平方을 풀어 尖截長을 구한다.

一法, $(\text{餘長})(\text{餘濶})^2=144$ 步는 實, $2\{(\text{元積})-(\text{餘長})(\text{餘濶})\}=78$ 步는 從方負, $(\text{餘長})=9$ 步는 隅法正으로 減從平方을 풀어 尖截濶을 구한다.

문 77] $(\text{印方})^2=16$ 寸은 實, $(\text{餘股})=8$ 寸은 法으로 餘句를 구한다.

문 78] 닭은꼴의 성질에서 $(\text{餘股}):(\text{印方})=(\text{印方}):(\text{餘句})$

4. 결론

洪正夏의 ‘句股互隱門’은 피타고라스 정리 또는 닭은꼴의 성질을 써서 주어진 조건을 만족하는 직각삼각형의 변의 길이를 구하는 78문제와 답, 그 해법으로 되어있다. 그중 직각을 낀 두 변의 길이가 24와 45인 것이 47문제, 27과 36인 것이 16문제, 10과 15인 것이 8문제, 6과 12인 것이 2문제, 5와 12인 것이 2문제, 30과 40인 것이 1문제, 20/3과 8인 것이 1문제, 0.5와 2.475인 것이 1문제이고, 문4, 5, 8, 9, 10은 응용문제이다.

각 문제의 法에서 방정식을 세우는 과정은 상세하게 설명하였다. 피타고라스정리 또는 비례식을 쓰면 바로 풀리는 문제도 있으나 대부분의 문제는 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a, b, c(a < b < c)$ 라 할 때 주어진 조건은 이원이차 또는 삼원이차연립방정식이 되어 이를 일원방정식으로 유도하면 4차 이하가 되며 사차방정식의 경우는 모두 二次平方(복이차)이다. 이들 방정식은 각 경우에 따라 平方, 三乘方, 帶從平方(平方帶從), 減從平方, 帶從立方, 減從立方(立方減從), 帶從三乘方, 三乘方翻, 立方翻, 平方翻, 平方益積, 立方翻積이라 하였으며 방

정식을 푸는 방법은 거의 설명하지 않았다. 그중 帶從立方 4문제, 帶從平方 8문제, 減從立方 1문제, 三乘方 3문제, 帶從三乘方 1문제, 三乘方翻 2문제, 立方翻 1문제, 減從平方 2문제, 平方翻 3문제, 平方益積 1문제, 平方翻積 2문제는 방정식을 산가지로도 표현했다.

각 문제의 답은 대부분 유리수이며 무리수인 것이 2문제 있는데 하나는 근사값(유리수)으로, 다른 하나는 유리수 답만 구하였다. 문3에서 $(弦)^2 = \frac{976}{9}$ 의 제곱근을 근사값으로 구하면 $10\frac{76}{189}$ 尺이라 하였는데 참값보다 1寸1分5厘5毫 작다. 또 문31에서 股는 45尺 또는 $\frac{-45 + \sqrt{16425}}{2}$ 尺이나 45尺만 구하였다.

문46, 49 ~ 51, 53, 54, 58 ~ 60, 66 ~ 68에서는 法の 끝 부분에 유사문제를 풀 때 그 방법도 제시했다. 문49는 法の 끝 부분에 “問句弦差若干股乘弦若干之法倣此先得弦”와 같이 句와 弦의 차는 얼마 股와 弦의 곱은 얼마인 문제는 이를 본떠서 弦을 먼저 구한다고 써있다.

전반적으로 길이, 넓이를 모두 尺, 寸, 分, 厘, 毫, 絲, 忽 또는 步로 측정하였으나 “七寸半自乘得五寸六分二厘半”과 같이 尺, 寸, 分, 厘, 毫, 絲, 忽 사이의 환산은 길이, 넓이에 따라 다르다. 또 “句乘弦得一千二百二十四尺”과 같이 尺과 尺의 곱을 尺, “句除弦得二尺一寸二分半”과 같이 尺을 尺으로 나눈 몫도 尺이라 하였다.

‘句股互隱門’은 조선말의 일반적인 산술서[4]인 東算抄의 卷之二에도 75문제가 실려있다 [3]. 이는 九一集의 78문제중 문1, 2, 3을 제외한 것으로 문제와 답은 같고 풀이는 몇 字 다르다.

참고 문헌

1. 홍정하, 九一集(寫本九卷三冊, 서울대학교도서관소장), 年代未詳.
2. 김용운 · 김용국, 韓國數學史, 悅話堂, 1982.
3. 著者未詳, 東算抄(寫本三卷三冊, 종로시립도서관소장), 年代未詳.
4. 김용운 解題, 韓國科學技術史資料大系, 數學篇 八卷, 驪江出版社, 1985.