

고등학교 학생들의 로그함수에 대한 이해도 및 오류에 관한 연구

이 경 숙¹⁾ · 김 승 동²⁾

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학의 성격, 수학교육의 방향을 가장 잘 표현한 말로 교육학자 Pestalozzi의 수학을 학습하는 것은 정신체조를 하는 것이라는 말을 들 수 있다. 이는 수학적 능력이란 수학의 아름다운 순수이론적 성격만이 아니라, 과학과 기술 및 생활에의 도구적 성격, 그리고 지혜의 스펀로서 두뇌의 질서와 진리감각을 함양하는 정신도야 특히, 사고력 도야재로서의 특성을 보다 강조해야 한다는 철학을 표현한 말이다.(우정호, 1999)

Prince(1961)는 로그가 학교 수학에 들어온 이유는 산업활동에서 사용되었던 복잡한 계산을 할 수 있는 수단으로 사용될 수 있었기 때문이라고 말한다. 그러나 계산기나 컴퓨터가 발달하면서 계산을 위주로 사용되었던 로그는 현재 고등학교에서는 함수로서 소개되고 있다. 수학은 사회가 발전하고 학문이 분화되는 데 없어서는 안 될 필수 불가결한 학문으로 등장하였는데, 이러한 유용성을 교사가 교실에서 적절하게 강조하여야 한다.(신현성, 1999)

문제해결 과정 중 어떤 단계에서의 오류는 결국 옳은 해를 구할 수 없게 만든다. 학습자의 부주의가 아니면 학습자가 범하게 되는 오류에는 학습자 나름대로 고유한 사고과정이 있기 때문에 잘못된 것을 그대로 방치하여 두면 그들이 가지고 있는 잘못된 사고과정이 고착화된다. 따라서 오류의 조기 교정은 반드시

필요하다. 옳은 해는 오류과정이 존재하기 때문에 있는 것이며 그것으로 인해서 점점 더 다져지는 것이다.(이대준, 1999)

제6차 교육과정에서는 고등학교 1학년 과정의 공통수학에서 다루어지고 있는 로그함수가 제7차 교육과정에서는 학습 부담 경감과 계통성을 고려하여 수학 I으로 이동된다. 많은 학생들이 로그함수의 학습에 어려움을 호소하고 있고 따라서 로그 함수에 관한 문제풀이 과정에서 많은 오류가 발생하고 있을 것으로 예측할 수 있다.

본 연구에서는 로그함수 단원을 지도하기에 앞서 어떤 부분에서 이해도가 높고 어떤 부분에서 이해도가 낮은지 참고를 함으로써 교수학습 방법의 방향 설정에 도움이 되고자 로그의 기본 성질에 관한 이해도에 대하여 알아보하고자 한다. 또한 로그함수에 대한 문제풀이 과정에서 발생하는 오류유형과 오류 모형에 따른 오류 원인을 분석하고 그 지도방법을 모색하여 교수 방법 개선과 학생들의 수학 학습에 도움이 되고자 한다.

2. 연구 문제

1) 계열(인문, 자연)에 따른 고등학교 2학년 학생들의 로그의 기본 성질에 대한 이해도에 대하여 알아본다.

2) 계열(인문, 자연)에 따른 고등학교 2학년 학생들의 로그함수에서의 오류 유형을 분석한다.

3) 오류 모형에 따라 오류 원인을 분석하고 그 지도 방법을 모색한다.

1) 동인천고등학교
2) 공주대학교 수학교육과

3. 연구의 제한점

1) 본 연구의 대상은 아산시에 소재하고 있는 다섯 개의 고등학교 중에서 남자 고등학교 1개교와 여자 고등학교 1개교를 선정하여 2학년 인문·자연 계열 상위 그룹 각 1학년씩 4학년 144명 대상으로 하였으므로 특성이 다른 집단에 대해서 일반화시키는 데에는 한계가 있다.

2) 본 연구에 사용된 이해도 및 오류 분석 검사지는 교과서, 참고서, 수능 기출 문제, 인터넷 수학관련 사이트 등에 기초하여 연구자가 문항을 작성 또는 선정하고 현직 교사들의 자문을 얻어 제작한 것이며 표준화된 검사지가 아니다.

3) 본 연구의 범위는 고등학교 공통수학 중 로그 함수 단원으로 제한되었으므로 이 결과를 전 단원으로 확대하기에는 어려움이 있다.

4) 본 연구는 검사지에 나타난 오류만을 분석 연구한다. 그러므로 본 연구결과를 오류의 판단 기준으로 일반화하는 데에는 주의를 요한다.

- (1)언어의 난이성
- (2)공간 정보 획득의 어려움
- (3)선행 기술, 사실과 개념의 미숙
- (4)사고의 경직성 또는 부정확한 연합
- (5)관련 없는 법칙 또는 전략들의 적용

2) 선행연구 분석

Movshovitz-Hadar, Orit & Shlomo(1987)는 고등 학생들이 졸업시험에서 반복적으로 보이는 실수에 대하여 관심을 갖고 체계적인 연구를 하여 고등학교 수학에서의 경험적인 오류 모델을 6가지로 분류하였다.

이 연구에서 두 해에 걸쳐 18개의 주관식 문제에 대한 오류를 분석한 결과 첫 해 150개, 둘째 해 130개의 오류가 선정되어졌으며 빈도수는 [표-1]과 같다.

[표-1] Movshovitz-Hadar의 오류 범주별 빈도수(%)

범	주	첫해	두번째해
잘못 이용된 자료		22	20
문제의 잘못된 해석		17	18
논리적으로 부적절한 추론		2	1
부적절하게 사용된 정리나 정의		34	32
논증되지 않은 해답		0	2
기술적 오류		25	27

II. 이론적 배경

1. 오류

1) 오류의 원인

김영채(1995)는 문제 해결을 위한 일반적인 접근 방식, 기질 내지 태도에서 유의해야 할 장애와 함정인 오류 요인을 다음 네가지로 정리하고 있다.

- (1)오류 요인 1 : 문제를 철저히 분석하지 않는다.
- (2)오류 요인 2 : 생각하고 싶은 대로 생각해 버린다.
- (3)오류 요인 3 : 기능 고착이다.
- (4)오류 요인 4 : 쉽게 떠오르는 정보에 의지한다.

Radatz(1979)는 정보처리 이론을 기초로 하여 “수학 내용에서 일어나는 오류의 다양한 원인은 수학 과제에 포함된 정보를 얻고, 처리하고, 파지하고, 재생산하는데 사용되는 메커니즘을 조사함으로써 확인되어질 수 있다.”고 하였다. 그는 오류의 원인과 과 같이 분류했다.

[표-1]에 의하면 고등학생의 경우에는 기술적인 오류도 흔히 범하지만 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 데서 오는 오류가 매우 빈번함을 알 수 있다.

Radatz(1979)의 조사에 의하면 오류 분석은 적어도 70년 동안, 수학교육을 담당하는 사람들의 주된 관심사였다고 한다. 그 동안의 오류에 관한 연구의 관점은 다음 다섯 가지 항목에 초점이 맞추어져 왔다.

- (1)발생할 수 있는 모든 오류기법을 목록으로 만들기
- (2)연령에 따른 오류기법의 발생빈도를 측정하기
- (3)나눗셈을 할 때와 '0'이 포함된 연산을 할 때 부딪히게 되는 특별한 난점들을 분석하기
- (4)각 개인이 범하는 오류 기법 조사하기
- (5)오류들을 분류해서 그룹으로 나누기

고등학생들이 범하는 대부분의 오류들은 결코 우연한 것이 아니며, 학생들에게는 대체로 그럴듯하게 생각되는 유사논리 전개과정에 의해서 발생된다는 기본적 가정(Ginsburg, 1977)하에서, 본 연구는 위의 첫 번째 항목과 다섯 번째 항목에 관심을 두어 문제 해결 과정에서 발생하는 오류들을 분류하여 분석하고자 한다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구대상 및 연구기간

- 1) 연구대상 : 아산시 소재 2개 고등학교 중 2학년 인문·자연계열 상위 그룹 각 1학급씩 4학급 144명
- 2) 연구기간 : 2000년 11월 - 2001년 10월

2. 검사 도구

본 연구에서 사용한 검사도구는 교과서·참고서·대입수학능력시험 기출문제·인터넷 수학관련 사이트 등을 참고로 제작하였으며, 식·그래프·문장제 등의 형태로 제시되었다. 검사도구는 선택형 12문항·단답형 3문항·서술형 15문항 등 총 30문항으로 구성되었는데, 오류유형 분석을 위한 서술형 문항은 응답의 내용 범위나 기술 양식에 대해 아무런 제한이 가해져 있지 않은 형태로 제시되었다.

각 문항의 특성은 [표-2]와 같다.

[표-2] 검사지의 문항 특성

번호	문항 형태	문항 내용	이해도	오류
1	선택형	로그의 정의	○	
2	선택형		○	
3	선택형	밑의 조건·진수 조건	○	
4	선택형		○	
5	단답형		○	
6	단답형	$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$	○	
7	선택형		○	
8	선택형		○	
9	서술형		○	○

10	선택형	$\log a^n = n \log a$	○	
11	서술형		○	○
12	선택형	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$	○	
13	선택형		○	
14	서술형	$\log a^n = n \log a$	○	○
15	선택형	지표와 가수	○	
16	서술형		○	○
17	단답형	상용로그표		○
18	서술형	지표와 가수의 성질	○	○
19	서술형			○
20	선택형	로그함수의 그래프	○	
21	선택형		○	
22	서술형	그래프를 이용한 로그함수값의 부호	○	○
23	서술형	로그 함수의 그래프에 나타난		○
24	서술형	정보로부터 자료값 구하기		○
25	서술형	로그 함수의 최대·최소		○
26	서술형	로그 방정식		○
27	서술형			○
28	서술형			○
29	서술형	로그 부등식		○
30	서술형			○

3. 자료 처리 및 분석

본 연구에서는 학생들이 검사지 문항 중 서로 관련이 있는 모든 문항들에 대하여 정확히 답을 하고 있는 정도를 백분율로 나타내어 로그의 기본 성질에 대한 이해도를 알아보려고 한다. 또한, II장에서 살펴본 선행 연구 사례들을 기초로 하여 오류를 분석하고자 한다.

144명의 학생들의 검사지에서 657개의 오류를 뽑아내었는데, 인문계열에서 343개, 자연계열에서 314개의 오류가 발생했다. 이 오류들은 이스라엘의 수학자 Movshovitz-Hadar의 오류 모델 6가지(잘못 이용된 자료, 문제의 잘못된 해석, 논리적으로 부적절한 추론, 부적절하게 사용된 정리나 정의, 논증되지 않은 해답, 기술적인 오류)를 참고하여 다음과 같이 6가지

모형을 설정하여 분석하였다.

- [E1] 익숙하지 못한 기호
- [E2] 문제의 잘못된 해석
- [E3] 논리적으로 부적절한 추론
- [E4] 정리나 성질의 불완전한 이해
- [E5] 논증되지 않은 해답
- [E6] 기술적 오류

한 문항에서 여러 개의 오류가 발생한 경우에는 연구자가 임의로 독특하거나 보다 결정적이라 판단되는 하나의 오류만을 분석의 대상으로 삼았고, 다음의 경우는 분석대상에서 제외시켰다.

- 완전한 답을 제시한 문항
- 무응답한 문항
- 답만 제시하고 그 답이 맞은 문항
- 답만 제시하고 그 답이 틀린 문항
- 현 단계까지는 풀이과정이 맞지만 더 이상 진행되지 않은 문항

IV. 결과 및 분석

1. 오류 모형의 설정

1) 익숙하지 못한 기호 [E1]

이 모형은 기호의 사용에 익숙하지 못함으로써 발생하는 오류로 세부 항목을 다음과 같이 정해 보기로 한다.

- (1)음의 지수의 정의에 대하여 익숙하지 못함으로 인한 오류
- (2)괄호() 사용의 소홀함으로 인한 오류
- (3)지표와 가수의 표기법에 익숙하지 못함으로 인한 오류

2) 문제의 잘못된 해석 [E2]

이 모형은 한 언어로 설명된 수학적 사실을 다른 언어로 잘못 옮김으로써 일어나는 오류로 세부 항목을 다음과 같이 정해보기로 한다

- (1)표에 나타난 정보를 잘못 해석하는 오류
- (2)문장을 수학적 언어로 나타낼 때의 오류
- 3) 논리적으로 부적절한 추론 [E3]

이 모형은 귀납 또는 연역적 추론 과정에서 논리적으로 부적절한 추론으로 인하여 주어진 정보로부터 새로운 정보가 잘못 유도되는 경우의 오류를 의미한다. 세부 항목을 다음과 같이 정해보기로 한다

- (1)비형식적인 방법에 의해 잘못 유도된 정보
- (2)특수한 해를 논리적인 추론 없이 일반적인 해로 여기는 오류
- (3)논리성이 결여된 귀납적 추론

4) 정리나 성질의 불완전한 이해 [E4]

이 모형은 규칙, 원칙, 정리 또는 성질 등이 잘못 이해되어 쓰여짐으로써 발생한다. 세부 항목을 다음과 같이 정해보기로 한다

- (1)로그의 성질에 대한 이해 부족으로 인한 오류
- (2)지표와 가수에 대한 이해 부족으로 인한 오류
- (3)로그 함수의 성질에 대한 이해 부족으로 인한 오류

5) 논증되지 않은 해답 [E5]

이 모형은 문제를 푸는 각 단계는 옳지만 제시된 마지막 결과는 문제에서 요구하는 해답이 아닌 경우의 오류이다. 이 오류는 문제의 이해 과정에서 주어진 문제의 마지막 목표가 무엇인가를 확인하지 않은 데서 생길 수도 있고 어떤 조건을 간과하거나 조건에 대한 이해 부족으로 인해서 발생할 수도 있다.

6) 기술적 오류 [E6]

이 모형은 계산 오류, 기본적인 대수 부호의 조작에서의 오류, 표로부터 자료를 잘못 읽음으로 인한 오류 등을 포함한다.

2. 결과 및 분석

분석과정에서 나타나는 $\log_a b$ 끝에서는 특별한 언급이 없는 한 $a > 0, a \neq 1$ 이고 $b > 0$ 라고 가정하기로 한다.

1) 연구문제 1

연구문제 1 : 계열에 따른 고등학교 2학년 학생들의 로그의 기본성질에 대한 이해도에 대하여 알아본

다.

연구문제 1을 위하여 학생들이 검사지 문항 중 서로 관련이 있는 모든 문항들에 대하여 정확히 답을 하고 있는 정도를 백분율로 나타내고자 한다.

- (1)로그의 정의 : 인문 79.17%, 자연 94.44%
- (2)밑의 조건 : 인문 43.06%, 자연 58.33%
- (3)진수조건 : 인문 45.83%, 자연 65.28%
- (4)로그의 성질

① $\log_a 1 = 0$ 또는 $\log_a a = 1$

인문 20.83%, 자연 62.50%

② $\log_a b^n = n \log_a b$

인문 22.22%, 자연 52.78%

③여러가지 로그의 성질

$$\begin{cases} \log_a xy = \log_a x + \log_a y \\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \\ \log_a b^n = n \log_a b \end{cases}$$

인문 22.22%, 자연 54.17%

(5)상용로그의 지표와 가수

①지표와 가수의 의미

인문 27.78%, 자연 45.83%

②(진수가 1보다 큰 경우)지표의 성질

인문 36.11%, 자연 52.78%

③(진수가 1보다 작은 경우)지표의 성질

인문 27.78%, 자연 43.06%

④가수의 성질

인문 25.00%, 자연 44.44%

(6)로그함수의 그래프의 성질

인문 15.28%, 자연 34.72%

다음은 이해도 산출 과정을 나타낸 것이다.

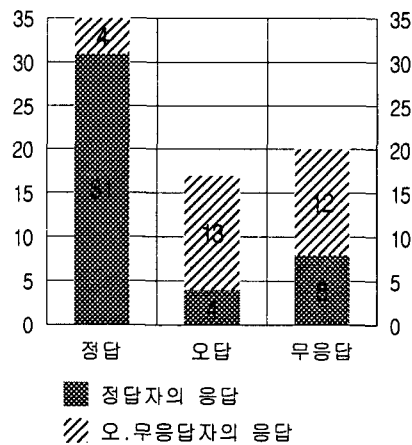
◆밑의 조건

[표-3] 밑의 조건에 대한 반응 빈도표

문항	계열	정답(%)	오답(%)	무응답(%)	총원(명)
3	인문	43(59.72)	27(37.50)	2(2.78)	72
	자연	61(84.72)	10(13.89)	1(1.39)	72
	계	104(72.22)	37(25.39)	3(2.09)	144
5	인문	35(48.61)	17(23.61)	20(27.78)	72
	자연	47(65.28)	18(25.00)	7(9.72)	72
	계	82(56.94)	35(24.31)	27(18.75)	144

3번 문항에 대한 정답률은 인문계 59.72%, 자연계 84.72%이고 5번 문항에 대한 정답률은 인문계 48.61%, 자연계 65.28%이다. 다음은 인문계열 학생들 중 3번 문항에 대한 응답자의 5번 문항에서의 응답현황을 나타낸 것이다.

[그림-1] 인문계열



3번 문항에 대한 정답자 43명중 31명(정답자의 72.09%)만이 5번 문항에서 밑의 조건을 정확히 기술하고 있으며 4명은 오답, 8명은 무응답을 하고 있다. 또 3번 문항에서 오답 또는 무응답을 한 학생 29명중 4명은 밑의 조건을 정확히 기술하고 있는데, 이런 현상은 밑의 조건을 단순 암기는 하였으나 실제 문제 상황에 적용하지는 못하는 경우라고 생각된다. 본 검사지를 통해서 밑의 조건을 정확히 이해하고 있는 학생은 31명(계열 전체의 43.06%)이라고 할 수 있다.

◆로그의 성질

[표-4] 로그의 성질 $\log_a 1 = 0$ 에 대한 반응 빈도표

문항	계열	정답 (%)	① (%)	② (%)	기타 (%)	무응답 (%)	총원 (명)
7	인문	39 (54.17)	9 (12.5)	12 (16.67)	10 (13.88)	2 (2.78)	72
	자연	55 (76.39)	5 (6.94)	7 (9.73)	3 (4.16)	2 (2.78)	72
	계	94 (65.28)	14 (9.72)	19 (13.19)	13 (9.03)	4 (2.78)	144

7번 문항에 대한 정답률은 인문계 54.17%, 자연계 76.39%이다. 로그의 밑의 조건을 알지 못하고 ①과 ② 즉, $\log_1 1 = 0$ 또는 $\log_1 1 = 1$ 에 응답하고 있는 학생들이 인문계 29.17%, 자연계 16.67%를 차지하고 있다.

[표-5] 로그의 성질 $\log_a a = 1$ 에 대한 반응 빈도표

문항	계열	정답 (%)	① (%)	② (%)	기타 (%)	무응답 (%)	총원 (명)
8	인문	42 (58.33)	10 (13.89)	13 (18.06)	5 (6.94)	2 (2.78)	72
	자연	57 (79.17)	7 (9.72)	6 (8.33)	1 (1.39)	1 (1.39)	72
	계	99 (68.75)	17 (11.81)	19 (13.19)	6 (4.17)	3 (2.08)	144

8번 문항에 대한 정답률은 인문계 58.33%, 자연계 79.17%이다. 이 문항에서는 로그의 밑의 조건을 알지 못하고 ①과 ② 즉, $\log_1 1 = 0$ 또는 $\log_1 1 = 1$ 에 응답하고 있는 학생들이 인문계 31.95%, 자연계 18.05%를 차지하고 있다.

[표-6] 로그의 성질 $\log_a 1 = 0$,

$\log_a a = 1$ 에 대한 반응 빈도표

문항	계열	정답 (%)	오답 (%)	무응답 (%)	총원 (명)
9	인문	20(27.78)	16(22.22)	36(50.00)	72
	자연	51(70.83)	11(15.28)	10(13.89)	72
	계	71(49.31)	27(18.75)	46(31.94)	144

9번 문항에 대한 정답률은 인문계 27.78%, 자연계 70.83%이다. 다음 그래프는 인문계열 학생들 중 7번과 8번 정답자의 9번 문항에서의 응답현황을 나타낸 것이다.

7번과 8번 정답자 37명 중 15명(정답자의 40.54%)만이 9번 문항에서 정답을 하고 있으며 6명은 오답, 16명은 무응답을 하고 있다.

[그림-2] 인문계열



본 검사지를 통해서 로그의 성질 $\log_a 1 = 0$ 과 $\log_a a = 1$ 을 정확히 알고 문제에 적용한 학생은 15명(계열전체의 20.83%)라고 할 수 있다.

2) 연구문제 2

연구문제 2 : 계열에 따른 고등학교 2학년 학생들의 로그함수에서의 오류유형을 분석한다.

(1)로그의 성질에서의 오류

[표-7] 로그의 성질에 대한 정답률 및 모형별 오류 빈도표

계열	정답률 (%)	오답률 (%)	무응답률 (%)	오류 모형						
				E1	E2	E3	E4	E5	E6	계(개)
인문	48.96	34.03	17.01	17	1	4	30	0	15	67
자연	75.17	19.45	5.38	5	0	3	22	1	20	51
계	62.07	11.20	26.73	22	1	7	52	1	35	118

[표-7]에서 보는 바와 같이 인문계열에서는 30개(계열의 44.78%), 자연계열에서는 22개(계열의 43.14%)로 [E4]모형의 빈도가 가장 높게 나타났다.

(2) 상용로그에서의 오류

[표-8] 상용로그에 대한 정답률 및 모형별 오류 빈도표

계열	정답률 (%)	오답률 (%)	무응답률 (%)	오류 모형						
				E1	E2	E3	E4	E5	E6	계(개)
인문	42.08	23.89	34.03	19	6	30	31	0	45	131
자연	57.64	19.86	22.50	7	2	39	24	0	19	91
계	49.86	21.88	28.26	26	8	69	55	0	64	222

[표-8]에서 보는 바와 같이 인문계열에서는 [E6]모형이 45개(계열의 34.35%), 자연계열에서는 [E3]모형이 39개(계열의 42.86%)로 가장 높게 나타났다.

(3) 로그함수의 그래프에서의 오류

[표-9] 로그함수의 그래프에 대한 정답률 및 모형별 오류 빈도표

계열	정답률 (%)	오답률 (%)	무응답률 (%)	오류 모형						
				E1	E2	E3	E4	E5	E6	계(개)
인문	31.25	34.03	34.72	7	3	0	22	2	9	43
자연	50.69	29.00	20.31	4	6	2	25	1	9	47
계	40.97	31.52	27.51	11	9	2	47	3	18	90

[표-9]에서 보는 바와 같이 인문계열에서는 22개(계열의 51.16%), 자연계열에서는 25개(계열의 53.19%)로 [E4]모형의 빈도가 가장 높게 나타났다.

(4) 로그방정식과 로그부등식에서의 오류

[표-10] 로그방정식과 로그부등식에 대한 정답률 및 모형별 오류 빈도표

계열	정답률 (%)	오답률 (%)	무응답률 (%)	오류 모형						
				E1	E2	E3	E4	E5	E6	계(개)
인문	13.61	29.72	56.67	0	11	34	30	21	6	102
자연	28.33	36.67	35.00	0	30	45	21	20	10	126
계	20.97	33.19	45.84	0	41	79	51	41	16	228

[표-10]에서 보는 바와 같이 인문계열에서는 34개(계열의 33.33%), 자연계열에서는 45개(계열의 35.71%)로 [E3]모형의 빈도가 가장 높게 나타났다.

위에서 문항 내용에 따라 살펴본 정답률 및 모형별 오류빈도를 종합하면 [표-11]과 같다.

[표-11] 정답률 및 모형별 오류 빈도표

계열	정답률 (%)	오답률 (%)	무응답률 (%)	오류 모형						
				E1	E2	E3	E4	E5	E6	계(개)
인문	34.97	31.03	34.00	43	21	68	113	23	75	343
자연	53.83	26.24	19.93	16	38	89	91	22	58	314
계	44.40	28.64	26.96	59	59	157	204	45	133	657

[표-11]에서 보는 바와 같이 인문계열에서는 113개(계열의 32.94%), 자연계열에서는 91개(계열의 28.98%)로 [E4]모형의 빈도가 가장 높게 나타났다.

3) 연구문제 3

연구문제 3 : 오류 모형에 따라 오류 원인을 분석하고 그 지도방법을 알아본다.

각 오류 모형에서 오류가 발생되고 있는 부분에는 ★ 또는 ☆ 로 표시를 하고 분류 대상의 오류가 발생하고 있는 부분에는 ★ 표를 하기로 한다.

(1) [E1] 모형에서의 오류의 원인 및 지도 방법

◆문항 18.2. $\log 1.06 = 0.0253$ 일 때, 다음의 값을 구하시오.

오류) ④ $\log 0.106$
 $= \log (1.06 \times 10^{-1})$
 $= \log 1.06 + \log 10^{-1}$
 $= -1 + 0.253$
 $= \star -1.0253$

[원인] 지표가 음의 정수로 나타날 때 지표와 가수를 구분하여 표기하는 방법에 익숙하지 못함으로 인하여 오류가 발생하고 있다.

[지도방법] 이런 오류를 범하고 있는 학생 중에는 일반적인 수의 계산에서 $-1 + 0.253 = -0.747 \neq -1.0253$ 임을 알고 있었을 지도 모른다. 그런데 지표와 가수라는 생소한 용어와 그 표기법에 익숙하지 못하면서 $-0.747 = -1.0253$ 와 같은 오류를 범하고 있다. 따라서 지표와 가수라는 용어의 의미와 그 표기법을 정확히 알 수 있도록 한다.

(2) [E2] 모형에서의 오류의 원인 및 지도 방법

◆문항 28. 매 시간 2배로 분열하는 박테리 아가 있을 때, 다음에 답하시오.

단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.

2) 처음수의 1000 배가 되는 것은 약 몇 시간 후가 되겠는가?

오류) $\star 2^t a \geq 1000a$, $\log 2^t \geq \log 1000$
 $t \log 2 \geq 3$, $t \geq \frac{3}{\log 2}$
 $t \geq 10$, $\star \therefore$ 약 10시간 후

[원인] ‘처음수의 1000 배가 되는’ 이라는 문장은 ‘처음수의 1000배와 같아지는’과 같은 의미이므로 방정식으로 해석이 되어야 함에도 불구하고 부등식으로 해석을 하면서 오류가 발생하고 있다.

[지도방법] 일상적인 언어에서 수학적 언어로 번역하는 과정에서 문제를 철저히 분석하지 않음으로 인하여 오류가 발생하고 있는데 문제를 좀더 면밀하게 분석하는 습관을 갖도록 해야한다.

(3) [E3] 모형에서의 오류의 원인 및 지도 방법

◆문항 27. 다음 방정식을 만족시키는 해를 구하시오.

$$x^{\log_3 x} = 3$$

오류) $3^{\log_3 3} = 3^1 = 3$
 $\star \therefore x = 3$

[원인] 논리적으로 적절한 추론을 통하여 문제해결을 하려 하지 않고 $x=3$ 을 대입하여 억지로 끼워 맞추듯 문제풀이를 시도하고 있다.

[지도방법] 특수한 해를 논리적인 추론 없이 일반적인 해로 여기고 있는데 이 것이 해로서 정당성이 부여되기 위해서는 특수한 값 이외의 것들에 대해서 해가 될 수 없다는 것을 증명해야 한다는 사실을 알게 한다. 이런 경우는 지수형식을 로그 형식으로 고치거나 양변에 밑을 3으로 하는 로그를 취한 후 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 문제를 풀어 나가도록 한다.

(4) [E4] 모형에서의 오류의 원인 및 지도 방법

◆문항 14.

$\log 2 = a$, $\log 3 = b$, $\log 7 = c$ 일 때,

$\log \frac{7^3}{12}$ 을 a, b, c 로 나타내시오.

오류) $\log \frac{7^3}{12} = \log 7^3 - \log 12$
 $= \log 7^3 - \log (2 + 3 + 7)$
 $= \star \log 7^3 - \log 2 \cdot \log 3 \cdot \log 7$
 $= 3c - abc$

[원인] 로그의 성질을 완전히 이해하지 못하고 다음과 같이 로그의 성질(O)를 (X)로 착각을 하면서 오류가 발생하고 있다.

• $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (O)

$\Rightarrow \log_a (x + y) = \log_a x \cdot \log_a y$ (X)

[지도방법] 로그의 성질 하나하나를 증명을 통하여 이해하도록 하고 다양한 예를 접할 수 있도록 한다.

(5) [E5] 모형에서의 오류의 원인 및 지도 방법

◆문항 29. 로그부등식

$$2 \log_{0.5} (x-2) > \log_{0.5} (x+4)$$

을 만족시키는 x 의 범위를 구하시오.

$$\begin{aligned} \text{오류) } \log_{0.5}(x-2)^2 > \log_{0.5}(x+4) \\ (x-2)^2 < (x+4) \\ x^2 - 5x < 0, \quad \star \therefore 0 < x < 5 \end{aligned}$$

[원인] 로그 부등식을 감소함수의 성질들을 이용하여 바르게 풀이했지만 진수조건을 고려하지 않음으로써 또는 진수에 대한 이해부족으로부터 오류가 발생하였다.

[지도방법] 위와 같은 오류는 로그 방정식에 관한 문제 풀이 과정에서도 흔히 발생하고 있는데 문제를 풀기 전에 문제 속에 포함되어 있는 조건이 무엇인가를 꼼꼼하게 점검하는 습관을 갖도록 해야 한다. 특히, 로그방정식·로그부등식에서는 밑과 진수조건을 항상 염두에 두고 있어야함을 지적해 준다.

(6) [E6] 모형에서의 오류의 원인 및 지도 방법

◆문항 11. $\log 3 = 0.4771$ 일 때, $\log 3^{-10}$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} \text{오류) } \log 3^{-10} = -10 \log 3 \\ = -10 \times 0.4771 = \star 0.0000000004771 \end{aligned}$$

[원인] \times 를 $+$ 로 착각하여 지표는 -10 , 가수는 0.4771 로 보고 '지표가 -10 이면 진수는 소수 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나온다'는 지표의 성질을 막연히 적용해 보려고 하면서 계산오류를 범하고 있다.

[지도방법] -10×0.4771 이 로그가 아닌 일반적인 수의 계산과정에서 나오는 식이었다면 위와 같은 계산오류는 발생하지 않았을 것이다. 위 오류는 지표와 가수라는 새로운 용어와 부딪히면서 기존의 지식체계에 혼란이 일고 있음을 보여주고 있는데, 새로운 용어가 도입이 될 때 용어의 정의를 확실히 알 수 있도록 하고 다양한 예들을 통해서 지표와 가수의 성질을 이해할 수 있도록 해야 한다.

IV. 결론 및 제언

본 연구로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 로그의 기본 성질에 대한 이해도는 인문계보다 자연계 학생들이 더 높다는 것을 알 수 있는데 두 그룹간에 로그의 성질을 문제에 적용하는 과정에서 가장 큰 이해도의 차(34.73%)를 보이고 있고 로그의 정의 및 밑의 조건에서 가장 작은 이해도의 차(15.27%)를 보이고 있다.

둘째, 인문계 학생들은 로그함수 그래프의 기본성질(15.28%)과 로그의 성질을 문제에 적용하는 과정(21.76%)에서 낮은 이해도를 보이고 있다.

셋째, 자연계 학생들은 로그함수 그래프의 기본성질(34.72%)과 상용로그의 지표와 가수의 성질(46.53%)에서 낮은 이해도를 보이고 있다.

넷째, 인문·자연 모든 학생들은 [E4]모형의 정리나 성질의 불완전한 이해로 인한 오류(인문 32.94%, 자연 28.98%)를 가장 많이 범하고 있다.

다섯째, 인문계 학생들은 자연계 학생에 비해 [E1]모형의 기호에 익숙하지 못함으로 인한 오류(인문 12.54%, 자연 5.10%)와 [E4]모형의 정리나 성질의 불완전한 이해로 인한 오류(인문 32.94%, 자연 28.98%), 그리고 [E6]모형의 기술오류(인문 21.87%, 자연 18.47%)에서 높은 빈도를 보이고 있다.

여섯째, 자연계 학생들은 인문계 학생들에 비해 [E2]모형의 문제의 잘못된 해석으로 인한 오류(인문 6.12%, 자연 12.10%)와 [E3]모형의 논리적으로 부적절한 추론으로 인한 오류(인문 19.83%, 자연 28.34%)에서 높은 빈도를 보이고 있다.

적절한 치료과정 없이 오류가 반복되면 부적절한 사고가 고정될 수 있다. 교사는 문제 풀이를 할 때 발생하기 쉬운 오류의 예를 적시에 제시할 수 있어야 하고 지속적인 관찰과 질의 응답을 통하여 오류의 예방 및 치료를 해야 한다. 오류의 예방과 치료 그리고 이해도의 증진을 위하여 다음과 같은 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 학생들이 로그함수 그래프의 기본성질에서 가장 낮은 이해도를 보이고 있다. 그래프를 통한 함수의 시각적인 면을 강조하여야 하고 그래프에 나타난 정보를 적절히 활용할 수 있도록 해야 한다.

둘째, 수학은 기호에 의하여 의사소통이 이루어지고 기호에 의하여 수학적 지식이 기록이 되며 기호에 의하여 새로운 개념이 전달되는 학문이므로 기호나 용어의 의미를 정확히 알 수 있도록 하고 작은

기호라도 소중히 생각하는 마음을 갖도록 해야 한다.

셋째, 주어진 정보로부터 타당성이 결여된 비형식적이고 독창적인 방법에 의해 새로운 정보가 잘 못 유도되는 경우가 많은데, 논증된 정리·규칙 등을 바탕으로 새로운 정보가 논리적으로 추론되도록 해야 한다.

넷째, 정리나 성질이 정확히 이해되지 않은 상태에서 공식만을 외워 문제 풀이를 하려는 과정에서 많은 오류가 발생하고 있는데 단순히 공식 외우기보다는 왜 그런가 하는 쪽으로 학습의 방향을 전환시켜야 한다.

다섯째, 일상적인 언어에서 수학적 언어로 번역을 할 때 학생이 임의로 생각하고 싶은 대로 생각하는 경향이 많은데 문제를 보다 면밀하게 분석하는 습관을 갖도록 해야 한다. 그리고 어떤 문제에 대해 마음에 여유를 갖고 침착하게 체계적으로 기술하는 습관의 정착으로 표현기술이 신장되도록 해야 한다.

참 고 문 헌

- 김주영(1999), 고등학교 수학 교육과정에서 명제 부분의 오류에 관한 연구, 경원대학교 석사학위 논문
- 김영채(1995), 사고와 문제해결 심리학, 박영사
- 김창호(1983), 로그함수에 관한 연구, 고려대학교 석사학위 논문
- 김혁재(2000), 고등학교 학생의 미분에 대한 이해와 오개념 및 오류에 관한 연구, 아주대학교 석사학위 논문
- 나대균(1998), 확률개념 인지 과정에서의 오류 유형분석 연구, 강원대학교 석사학위 논문
- 성종기(2000), 이차함수의 그래프에 대한 오류 분석에 관한 연구, 교원대학교 석사학위 논문
- 신주식(1997), 기하증명에 대한 정의적 영역과 오류 유형에 있어서 남녀차에 관한 연구, 한국교원대 석사학위 논문
- 신현성(1999), 수학교육론, 서울:경문사
- 신현학(편찬책임)(1995), 뉴 셀프성경 오픈찬송, Agape
- 오은균(1998), 중학교 수학의 기하 영역에 있어서의 오류 유형별 원인 분석 및 지도 방안, 충북대학교 석사학위 논문
- 우정호(1999), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부
- 이대준(1999), 오류예방 학습지도에 의한 수학적 문제 해결력 신장, 인하대학교 석사학위 논문
- 이태규편저(1989), 이야기 수학사, 백산출판사
- 이홍섭(2001), 개념원리 공통수학, 디딤돌
- 이홍천·강옥기·박재석(2001), 공통수학, (주)두산
- 정영욱(1997), Freudenthal의 수학적 학습-지도론 연구, 서울대학교 박사학위 논문
- 주익한(1997), 문장제 문제풀이의 실패 유형과 그 지도 방안, 서원대학교 석사학위 논문
- 최경미(1992), 문제 풀이 과정에서 발생하는 수학적 오류의 분석 및 힌트 제시 효과에 관한 연구, 이화여자대학교 석사학위 논문
- 한중희(1997), 고등학교 2학년 학생의 극한에 대한 오개념과 오류에 관한 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문
- 허남호(1990), 고등학교 수학에서 수학적 오류의 분류 모델에 관한 연구, 강 원대학교 석사학위 논문
- 홍성대(2001), 공통수학의 정석, 성지사
- Howard Eves(2001), 수학사 / 이우영·신항균역, 경문사
- Howard Eves(1999), 수학의 위대한 순간들 / 허민·오혜영역, 경문사
- Richard Skemp(2001), 수학학습심리학 / 황우형역, 서울:사이언스북스
- <http://math4u.new21.org>
- Edwards, C. H.(1979), *The Historical Development of the Calculus*, New York : Springer
- Ginsburg(1977), *Principles underlying errors in arithmetic*, p. 129
- Nitsa Movshovitz-Hadar, Orit & Shlomo (1987), *An empirical classification model for errors in high school mathematics*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol.18, No.1, 3-14
- Radatz, H.(1979), *Error analysis in mathematics education*. journal for Research in Mathematics Education 10. pp. 163-172

A Study on the Understanding and Errors of the Logarithmic Function in High School Students

Lee, Kyung-suk¹⁾ · Kim, Seung Dong²⁾

Abstract

The purpose of this study was to examine high school second graders' understanding of the basic nature of logarithm, the major type of error they made about logarithmic function and the cause of such an error, and to seek ways to instruct it better. For that purpose, three research questions were posed:

1. Investigate how much high school students in their second year comprehend the nature of logarithm.
2. Analyze what type of error they make about logarithmic function.
3. Analyze the cause of their error according to the selected error models and how it could be taught more efficiently.

The findings of this study were as below:

First, the natural science students had a better understanding of the basic nature of logarithm than the academic students. What produced the widest gap between the two groups' understanding was applying the nature of logarithm to the given problems, and what caused the smallest gap was the definition of logarithm and the condition of base.

Second, the academic students had a poorer understanding of the basic nature of logarithmic function graph and of applying the nature of logarithm to the given problems.

Third, the natural science students didn't comprehend well the basic nature of logarithmic function graph, the nature of characteristics and mantissa.

Fourth, for all the students from academic and natural science courses, the most common errors were caused by the poor understanding of theorem or nature of the [E4] model.

Fifth, the academic students made more frequent errors due to the unfamiliar signs of the [E1] model, the imperfect understanding of theorem or nature of the [E4] model, and the technical part of the [E6] model.

Sixth, the natural science students made more frequent errors because of the improper problem interpretation of the [E2] model and the logically improper inference of the [E3] model.

1) Dong Incheon High School

2) Dept. of Mathematics Education Kongju National University, 314-701, Korea