

## 구성주의 관점에서 본 문제설정(포즈)

신 현 성<sup>1)</sup>

### 변화의 문제

수학교육의 변화의 관심은 탐구활동(또는 조사활동)으로 문제해결의 설정(posing), 교수학습의 형(format), 또는 지식획득의 형에 깊숙이 들어왔다. 이러한 조사활동(investigation)은 Love (1988)에 의하여 언급되었다. 즉, 보통 이 활동은 학습자가 완전한 조건이 결여된 문제 상황에서 시작하여 그 자신의 발문과 흥미에 이어 목표를 설정하고 자신의 수학을 하는 과정으로 여겨졌다. 이러한 현상을 그는 다음과 같이 말했다.

교사에 의하여 과제가 세팅되는 것이 아니고 이 활동에서는 사고, 결정, 프로젝트가 학습자의 통제하에서 이루어지기 때문에 학습자의 활동으로 정의할 수 있다.

그와 Ernest(1991) 모두 수학자의 정신을 강조하면서 교사의 역할을 상황제공으로 시작하여 과제의 구성적 접근이 가능하도록 도와주는 것으로 정리한다. 교실에서 조사활동을 강조하는 이는 이미 교사들이 느낀 것과 같다. 즉, 전통적인 교실수업보다 학습자가 흥미를 가지고 수업에 임한다든지, 수업의 과제에서 보다 수학적 활동이 활발해진다는지, 응용을 촉진시키는 수학적 과정에 잘 적응이 된다는지 등으로 요약할 수 있다. 이점에 대해 Wheeler(1982)는 모델링, 패턴의 연구, 일반화 등의 용어를 사용했다. 한편, Lerman(1989)은 이들의 생각과 약간 다르게 조사활동(또는 탐구활동)을 수학적 활동에 결부시킨다.

수학은 독특한 사고방법, 가설설정, 비형식 또는 형식적 모순법의 탐구 등에 의하여 연구되는 학문으로 수학적 내용(Content)보다 과정을 강조한 조사활동에 의하여 효과적으로 접근할 수 있다.

실제로 조사활동은 교실에서 탐구 지도 또는 발견적 지도 등과 비슷한 용어로 이해된다. 왜냐하면, 이 두 용어도 수학적 과정의 개발로 이해되기 때문이다.

### 실험 설계

구성주의의 교육에 대한 가장 큰 시사점은 학습자 자신의 이해 생성, 학습자의사교환, 학습자의 경험세계를 조직하는데 있다. 따라서, 이 연구로 학습자의 문제설정의 활동 속에는 이러한 구성주의 관점이 거의 수용되었다. 이를 연구로 실제화하기 위해서는 연구방법, 자료 수집 등이 계획되어야하므로 연구에서는 실험을 위해 소규모 협력집단, 관찰지 활용, 테이프녹음을 문제의도에 알맞은 연구를 진행하기 위하여 사용하였으며, 자료 수집으로 테이프 분석 및 코딩, 관찰지 분석, 2차 면담 등을 이용했다. 이들 방법 이외에도 실험에 참여한 학생들의 소감기록지를 활용하여 자료를 수집하는 일도 빼놓지 않았다. 실험은 한 집단에 3명으로 구성된 5개 집단을 한 장소에 모아 놓고 한 학기동안 아래에서 제시한 각 과제를 소집단별로 해결하고, 종합토론을 하는 방법으로 진행되었고, 학생들은 몇 가지 규칙을 충실하게 따르도록 연구보조자에 의하여 주의를

1) 강원대학교 수학교육과

받았다.

- (1) 각 집단의 구성원사이에 충분한 의사교환
- (2) 오픈 엔드(open-end)방식
- (3) 초기의 발산적 사고 후 가장 바람직한 생각에 집중
- (4) 포즈 표현(posing representation)방식의 기록

이들에 의하여 논의되는 의사교환의 활동은 연구 보조자들에 의하여 녹음이 되고, 준비된 관찰지에 의하여 녹음이 되지 않은 부분을 기록했다. 그러나, 실험이 끝난 후 가장 도움이 되는 자료는 실험자들이 기록한 자기 보고서였다. 파일럿 실험에서 원활한 의사 교환이 일어나지 않아 탐구접근법지를 이용하여 실험초기에는 탐구방식으로 연구자가 개발한 자료 (open-end 방식)를 이용했다. 이 개별자료의 특징은 각 소집단이 오픈-엔드 방식의 활동이 익숙하지 않을 때 일종의 훈련을 할 수 있는 IPI자료이다. 실험이 끝났을 때 이 자료의 훈련이 매우 효과적이었음을 관찰할 수 있었다.

### 실험과제

실험에 주안점을 둔 연구문제는 다음 8가지의 관점이 있다. 이 관점은 한 학기동안 파일럿 테스트에서 얻어진 것이거나 연구자가 평소 관찰한 것으로 문제 설정에 효과적인 영향을 줄 수 있다고 생각한 포즈활동이었다. 따라서, 이 실험을 통해 이 활동의 가능성을 관찰해 보기로 했다.

- (1) 주어진 문제의 조건 “만일~”을 수정해 가는 활동
- (2) 의미 있는 발견술을 담고있는 문제세트를 창안하는 활동
- (3) 개념이해에 관련된 문제상황(situation)을 만드는 활동
- (4) 신문, 잡지, 광고를 보고 문제 세트를 만드는 활동
- (5) 실세계의 경험을 통해 모델링 상황을 만드는

활동

- (6) 실세계의 조합적 상황을 창출하는 활동

이러한 활동을 가능하게 할 수 있는 소재의 개발은 쉽지 않으나 (1),(2),(6)의 활동을 위해서는 연구 보조자들이 여러 문제유형을 준비했다. 주의했던 점은 문제를 설정할 때 발산적 사고와 문제표현을 다양하게 할 수 있는 점을 중시했다. 실험에 투입된 문제를 분류해보면 다음과 같다.

- (1) 추상, 일반화
- (2) 의사 결정
- (3) 최적화
- (4) 게임이론, 미래예측이론
- (5) 조합적사고
- (6) 그래프 색칠
- (7) 계획 세우기

이를테면, 그래프 색칠문제로 조건을 다양하게 변경해 가는 포즈에서는 처음 주어진 문제를 다음과 같은 것으로 할 수 있다.

A대학에서는 개교기념일에 6명의 연사를 초청하여 인간복제의 윤리적 문제에 대한 강의를 듣기로 하였다. 강사 한 사람당에 1시간을 할당했기 때문에 강의 일정을 짜는데, 여러 고민이 생겼다. 6명을 선형으로 배열하여 발표시키면 한 장소에서 6시간의 일정을 소화해야 하는데, 강의를 듣는 사람들의 지루함도 배려해야겠고 또, 동시에 장소를 여러 개 선정하여 강의를 진행시키면 인기 있는 강사의 강의를 들을 수 없는 상황이 일어난다. 그래서 학교에서는 4시간에 6명의 연사의 강의를 소화하기로 하고, 다음과 같은 계획을 발표했다.

	A	B	C	D	E	F
A					×	
B						
C				×	×	×
D			×		×	×
E	×		×	×		×
F			×	×	×	

이 표를 읽는 방법은 다음과 같다. 이를테면, A행에 E열이 만나는 곳에 ×를 한 것은 A연사와 E연사는 동시에 강의를 진행해서는 안되며, ×가 없는 곳은 두 연사가 같은 시간대에 강의를 할 수 있다는 뜻이다. 다른 곳에서도 같은 해석을 내릴 수 있다.

이 표대로 한다면, 4시간에 6명의 연사들의 강의를 소화할 수 있겠는가?

또, 미래예측의 문제로 흔히 농장경영에서 일어나는 실세계문제를 예를 들 수 있다.

농장을 경영하는 김씨는 어느 날의 일기예보는 전 날의 것으로 예측하는 방법을 써 왔다. 그가 15일 동안 날씨를 관찰해본 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

C R R S S S C R S S C S R C C

여기서 R은 비가 온 날, S는 햇빛이 있는 날, C는 구름이 낀 흐린 날이다.

마르코브 연쇄의 용어를 사용한다면 시스템의 현재 상태(state)가 C라 해보자.

(1) 시스템이 다음과 같은 상황이 될 확률은?

- 비오는 날로 변경
- 햇빛이 있는 날로 변경 · 흐린 날로 변경

(2) 시스템의 오늘 상태가 비오는 날이라 한다면 시스템이 내일 다음 상황이 될 확률은?

- 비오는 날
- 햇빛이 있는 날
- 흐린 날

(3) 시스템의 오늘 상태가 햇빛이 있는 날이라면 시스템이 내일 다음 상황이 될 확률은?

- 비오는 날
- 햇빛이 있는 날
- 흐린 날

### 실험과정, 관찰, 토론

실험은 연구 보조자가 각 소집단에 한 명씩 배정이 되어 의사 교환, 토론, 구성적 활동에 협력을 할 수 있도록 사전에 교육을 받았으며, 이러한 교육이 가능한 것은 파일럿 실험에서 나타난 여러 결론을

분석했기 때문이었다. 매주 1시간씩으로 대학에 입학한 1학년을 대상으로 봄학기(2001년)에 실시했다. 실험 계획을 구상하기 전에는 두 사람의 연구결과와 영국개방대학에서 실시한 교사를 위한 실세계 문제해결의 프로젝트를 검토했고, 이를 연구 결과가 매우 적절하다는 생각이 들었다. 다시 말하면, 국내의 연구논문 중에서 정민수(1997)의 연구 결과를 보면 문제 포즈활동에서 효과적인 학습은 구성원간의 능동적 의사교환이 이루어지고, 이미 개념화된 지식 체계에 바탕을 둔 구성적 접근이 가능할 때 진행이 된다는 것이었다. 여기서 구성주의를 사용하여 보고되지는 않았지만 실제로 구성주의에서 제시하는 방법과 이론을 적용했다고 보았다. 한편 영국개방대학에서 실시한 모델링 프로그램은 이 프로그램의 운영에 도움이 되었다. 이 대학에서 사용한 교사를 위한 모델링 수업단계를 보면

- (1) 탐구활동을 위한 분야 정의
- (2) 발문할 내용 요약
- (3) 집에서 실질적 데이터 수집
- (4) 문제 포즈(posing)

와 같이 실생활에서 데이터를 수집하고 이를 교실에서 분석하는 과정이 이 연구의 진행과정에 많은 도움을 줄 수 있었다.

실제로 실험은 앞에서 말한대로 한시간에 (1) 자기의 아이디어 표(representation) (2) 자유로운 의사교환 (3) 중요아이디어에 대한 집중 토론 (4) 탄성적 포즈 (5) 전체 구성원 토론의 순서로 진행이 되었다.

이 과정에서 문제 포즈를 위한 협력적인 의사교환의 문제는 Weissglass(1990)가 제안한 다음과 같은 말을 반영시켰다.

수학교실에서 구성원간의 의사 교환과 토론을 가장 촉진시키는 수업방법으로 협력적 집단 학습(cooperative group learning)은 매우 의미가 있다.

실제 실험에서는 앞에서 언급한 주제(총 6주제)에 1.5주~2주를 할당했으며, 연구보조자는 의사교환이 활발히 이루어지고, 구성원들로부터 얻은 중요 아이디어의 집중 토론이 성공적으로 진행이 되도록 분

위기를 창출하는 역할만을 하도록 했다. 모든 학습 활동은 녹음이 되었고, 관찰지를 이용한 학습 활동의 기록, 개인보고서의 작성 등으로 진행이 되었다. 또 실험 초기에 자기 아이디어의 자유로운 표현, 의사 교환, 집중 토론을 원활하게 하기 위한 학습자료를 다음과 같이 탐구지를 이들 활동에 대한 학습자들의 능력이 일정 수준에까지 도달할 때까지 효과적으로 사용했다.

① 활동

(1) 다섯 명의 학생이 종이에 A 또는 B를 적고 종이를 모아 A와 B가 나온 종이의 수를 조사하여 보자.

투표	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4	학생 5	투표결과
1회	A	B	A	B	A	A 3표, B 2표
2회	B	B	A	A	A	A 3표, B 2표
3회	A	B	B	B	A	A 2표, B 3표
4회	A	A	A	A	A	A 5표, B 0표

투표 결과는 모두 몇 가지가 나올 수 있는가 알아 보아라.

(2) 투표결과가 같아도 각 학생의 투표내용은 다를 수 있다. A가 2표를 얻고, B가 3표를 얻었을 때의 학생들의 투표내용을 모두 써보아라.

② 토론

- (1) 1과 2 만을 사용하여 5자리 수를 만들어 보자. 모두 몇 개의 숫자를 만들 수 있는가?
- (2) 각 자리에 있는 수가 틀리면 다른 수가 된다. 따라서 합의 법칙과 곱의 법칙 중 어떤 것이 적용되는가?

실험의 초기에는 실험에 참여하고 있는 학생들의 활발한 의사 교환의 활동이 위촉되어 문제설정의 과정에서 불협화음이 있었으며, 이를 극복하기 위하여 탐구접근지(탐구지)는 각 소집단의 학습자들을 집중하는 효과는 있었다. 그런데, 탐구지에 집중할 때는 집단의 의원들간에 비슷한 의견 접근이 이루

어졌으나 탐구지 과정이 끝나고 열린 과정이 시작된 다음에는 역시 개인의 시각과 관점, 개인의 경험 조직능력, 개인의 탐구지 과정을 해석하는 능력 등에 큰 차이를 보이기 시작했다. 이들 과정을 관찰(관찰지, 개인 보고서, 녹음 테이프 등)해보면 몇 가지 문제 포즈활동에 중요한 단서가 되는 원리를 가설적으로 제시할 수 있다.

첫째는 학습자의 문제 장면의 해석(interpretation) 능력과 태도는 포즈활동을 발전시키거나 후퇴시키는 요인이 될 수 있다. 즉, 한 문제의 풀이 방식 또는 표현방법을 다양하게 경험한 학습자는 포즈표현 방식을 바꾸거나 새로운 포즈를 생성하는데 좋은 접근을 보여준다. 이를 다음 문제를 주고 “만일~” 전략을 생각하도록 한 포즈활동에서 연구보조진행자는 이와 관련된 문제 또는 상황을 설정하도록 유도했다.

파티를 주관하는 김씨는 시장에서 4가지 상표가 붙어있는 음료 각 한 개씩을 포장한 6개의 꾸러미를 담은 한 상자를 샀다. 이 파티에 사용될 수 있는 캔음료의 수가 k개라면 k개에 대한 여러 조합의 수를 구하여라.

몇 가지 의사교환의 예를 담은 녹음 테이프를 들어 보자.

Re: 이 문제를 해석하여 보아라.

...

S<sub>1</sub>: 아마 고등학교에서 한바와 같이...아니 좀 발전해서

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = k$$

를 생각하면 어떨까요. 또, 생성함수  $g(x)$ 를 이용하여

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^6$$

으로하면...

S<sub>2</sub>:  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 가 무엇이지?

S<sub>3</sub>: 고등학교 식으로 조합기호를 사용해서 할 수도 있고...

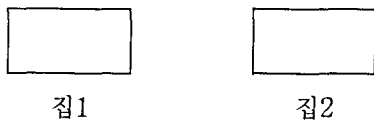
위에서 S<sub>1</sub>은 문제를 해석하고 이를 여러 상황(Situation)에 연결하는 능력이 뛰어난 학생이다. 그는 이후 이 문제의 “만일~”전략을 이용하여 여러

개 문제를 설정하였다.

둘째는 위와 관련되는 것으로 이해를 생성하는 또는 의미를 생성해내는 능력 또는 학습 습관이 포즈활동에 중요한 동기로 작용할 수 있다. 이점에 대해서는 평소 교실에서 관찰할 수 있는 것으로, 수학 교사라면 이해는 문제해결과 깊은 관련이 있다는 것을 알고 있으나, 포즈에서는 예측이 어려울 수도 있다. 포즈활동에 성공적인 경우와 그렇지 않는 경우의 녹음테이프를 분석해보면 이해의 생성은 문제의 해석 방법 또는 수준과 관련이 있다는 점을 알 수 있다. 여기서는 생성은 한 개념을 여러 가지 유형의 표현(representation)으로 나타낸다는 의미를 가진다.

셋째는 탐구학습지는 문제 포즈의 초기 단계에서 소집단 포즈활동을 정착시키는데 중요한 역할을 할 수 있다. 이를테면, 다음은 비둘기집 원리(pigeonhole)에 대한 간단한 탐구학습지이다.

활동1 : 3마리의 비둘기를 자기들 집으로 분배하는 가능한 방법을 이야기하여라.



활동2 : 9마리의 비둘기와 8개의 집이 있다. 9마리는 어떻게 자기들 집으로 들어갈 수 있는가? 즉, 두 마리 또는 2 이상이 한 개의 집에 들어가는 경우가 있는가?

활동3 :  $k + 1$  또는 2이상의 비둘기가  $k$ 개의 집에 분산이 된다면, 2마리 또는 그 이상의 비둘기를 수용하는 적어도 한 개의 집이 있는가?

토론 : 위의 활동을 분석하여 적절한 명제를 만들어라.

각 소집단에서 자유로운 토론과 의사 교환이 이

루어진 다음에 전체 학생의 토론에서 연구자는 문제 포즈의 본 학습활동으로 유도했다.

학생  $S_1$  : 교실에서 일어나는 상황(situation)을 생각해보자.

학생  $S_2$  : 나의 경우는 좀 다르다. 내가 속해 있는 기숙사 동아리에서 생각할 수 있을 것 같고...

학생  $S_3$  : 교실에서라... 지난번에 본 중간고사는 0점에서 100점까지 점수를 정할 수 있을 것 아닌가?...

학생  $S_4$  : 맞다. 101개의 가능한 점수가 나올 수 있다. 그렇지? (학생  $S_5$ 는 옆 사람에게 동의를 구하는데 옆 사람은 글썽... 라고 하자. 다른 학생들에게 어떤 아이디어를 구한다.)

학생  $S_1$  : 그러면, 몇 명의 학생이 ... 필요할까?

이러한 전체 의사교환이 이루어진 다음에 각 소집단에서는 자기를 수준에 알맞은 포즈활동이 진행되었다. 이후 상당한 시간이 흐른 후 2개의 포즈가 제시되어 O.H.P를 이용한 설명이 있었다.

포즈 1 : 중간고사에서 같은 점수를 얻은 학생이 적어도 2명이 있기 위해서는 총 몇 명의 학생이 우리반에 있어야 하는가?

다음은 다른 소집단에서 제안한 포즈이다.

포즈 2 : 우리 축구 동아리에서는 회원들에게 50보다 작은 홀수를 등 번호로 주려 한다. 25명의 학생에게 서로 다른 홀수를 부여할 수 있는가?

이들 탐구지를 활용한 포즈 활동에서는 실험 진행자(교사)가 알아야 할 몇 가지 과제를 적어볼 수 있다.

(1) 의사교환이 활발히 진행되도록 한 개의 중요

한 발문을 준비 해야 한다.

(2) 소집단내에서 토론이 진행될 때, 토론이 진행되지 못하는 어려움을 빨리 잡아야 한다.

(3) 때로는 소집단에서 토론을 이끌어 갈 수 있는 학생을 정해야 한다.

넷째는 위와 같이 한 개념에 대한 탐구지들 통해 여러 종류의 포즈를 정착(setting)시키는 활동을 익숙하지 않는 상황 또는 문제에 대처하는 유연한 사고를 주어 비교적 쉽게 이 상황(또는 문제)에 적용하게 한다.

그러나, 네 번째의 관찰은 좀 더 많은 실험을 통해 조사되어야 한다. 실제로 탐구지는 주로 연구과제 (4), (5), (6)에서 실시한 것이기 때문에 과제 범위를 확장하여 조사할 필요가 있다. 현재 우리 나라 교육의 취약점 중의 하나가 이 네 번째와 관련이 있다.

## 결 론

Noss(1994)는 미래 수학 교육의 변화를 말하는 중에 미래의 직업시장의 본질이 변화하기 때문에 수학 교육에서 유연성(flexibility)과 적응성(adaptability)이 가장 중요한 이슈로 표출되었다고 말했다. 현재 우리 나라 수학 교육의 가장 중요한 문제는 학교의 교육(특히, 문제해결)과 산업사회(또는 직업시장)에서 요구하는 능력을 만족시키지 못하고 있다는 것이다. 구체적으로 말하면 교실에서 행하는 문제해결은 수능시험과 동시에 망각되어지는 지식이 된다는 점이며, 새로운 환경에 직면했을 때는 새로운 교육이 시작된다는 것을 지적할 수 있다. 기업, 정부 또는 연구 기관에서는 새로 들어온 신입 사원에게 미래사회에 적응하는 새로운 직장인을 창출하기 위하여 막대한 예산을 세워야 한다. 중고등학교 6년에 대학 4년 동안 이러한 문제를 해결할 수 없을까? 라는 질문이 학교 교육에 던져진다. 이 연구는 부분적으로 이러한 질문에 접근하고 있다. 문제 포즈 활동에서 서로 다른 상황의 창출, 유연성을 기를 수 있는 탐구적 포즈 활동, 이해의 생성, 자

유로운 의사 교환과 토론 등이 논의되었으며 이 결과가 위에서 던져진 질문에 답할 수 있는 일부분의 해답인 셈이다.

## 참 고 문 헌

- Noss, R.(1994), Structure and ideology in the mathematics curriculum. *for the learning of mathematics*, 14(1)
- The social shaping of computing in mathematics education, in D. Pimm and E. Love(eds) teaching and learning. School mathematics. London:Hodder and stoughton, 1991
- Peterson, P. Teaching for higher order thinking in mathematics: the challenge for the next decade, in D. Grouws and T. Cooney(eds) effective Mathematics Teaching. Reston: virginia: Lawrence Erlbaum.
- Lerman, S.(1989), Althervative perspective of the nature of mathematics and their influence on the teaching of mathematics. *British Educational Teaching Journal*, 16(1)
- Masinsila, J.(1993), Learning from mathematics practice in out-of-school situation, for the learning of mathematics, 13(2)
- Moise, E.(1965), Activity and motivation in mathematics, *American Mathematical Monthly*, 72
- Brown, S.(1983), The art of problem posing. Hillsdate, NJ : Lawrence Erlbaum Associates
- Weissglass, J.(1990), Cooperative Learning using a small-group Lab. approach Cooperative Learning in math.(Dav. eds), Addison-Wesley

## Problem posing based on the constructivist view

Shin, Hyun Sung<sup>1)</sup>

### Abstract

In this experiment we emphasized the cooperative small group learning and the members of any group worked together to succeed and communicate their mathematics ideas freely.

The researcher(teacher) became an observer and facilitator of small group interaction, paying attention to the ongoing learning process, Sometimes the researcher suggested some investigation approach(or discovery)being written by computer software or papers.

In this experiment we provided 6 activities as follows :

- (1) changing the conditions in given problem.
- (2) operating the meaningful heuristics with the problem sets.
- (3) creating the problem situations related to understanding
- (4) creating the Modeling situations.
- (5) creating the problem related to combinatorial thinking in real world.
- (6) posing some real problem from real world.

we could observed several conjectures

First, Attitude and chility to interpret the problem setting is highly important to pose the problem effectively.

Second, Generating the understanding can be a great tool to pose the problem effectively.

Third, Sometimes inquiry approach represented by software or programmed book could be some motivation to enhance the posing activities.

Forth, The various posing activities relate to one concept could give the students some opportunity to be adaptable and flexible in the their approach to unfamiliar problem sets.

---

1) Dept. of Mathematics Education, Kang-won University