

복합하중을 받는 평판에 존재하는 반타원 표면균열의 공학적 탄소성 파괴해석법

심도준* · 김윤재* · 최재봉* · 김영진†
(2001년 9월 6일 접수, 2002년 3월 2일 심사완료)

Engineering Elastic-Plastic Fracture Analysis for Semi-Elliptical Surface Cracked Plates Under Combined Bending and Tension

Do-Jun Shim, Yun-Jae Kim, Jae-Boong Choi and Young-Jin Kim

Key Words : Combined Loading(복합하중), Finite Element Analysis(유한요소해석), *J*-integral(*J*-적분), Reference Stress Method(참조응력법), Surface Crack(표면균열)

Abstract

The present paper provides an engineering *J* estimation equation for surface cracked plates under combined bending and tension. The proposed equation is based on the reference stress approach, and the most relevant normalising loads to define the reference stress for accurate *J* estimations are given for surface cracked plates under combined bending and tension. Comparisons with *J* results from extensive 3-D FE analyses, covering a wide range of crack geometry, plate geometry and loading combination, show overall good agreement not only at the deepest point but also at arbitrary points along the crack front. For pure tension, agreement between the estimated *J* and the FE results is excellent, even at the surface point.⁽⁸⁾ On the other hand, for pure bending and combined bending and tension, the estimated *J* values become less accurate for locations close to the surface point. Thus the results in this paper will be useful to assess short-term fracture or low cycle fatigue of surface defects in plates under combined bending and tension.

1. 서론

결함이 존재하는 구조물에 대한 건전성평가를 수행하기 위해서는 탄소성 파괴역학(Elastic-Plastic Fracture Mechanics; EPFM) 매개변수인 *J*-적분을 정확하게 계산할 필요가 있다. 반타원 표면균열의 경우, 균열의 3차원적인 파괴거동으로 인해 정확한 *J*-적분을 다양한 균열형상에 대해 계산하기 위해서는 수많은 3차원 유한요소해석을 수행해야 하는 문제가 있다. 또한 반타원 표면균열의 경우 최대 균열구동력(crack driving force)이 균열의 최심점(deepest point)에서뿐만 아니라 균열선단 임의의 위

치에서 발생할 수 있다. 따라서 균열의 최심점에 서뿐만 아니라 임의의 위치에서의 *J*-적분을 계산할 수 있는 공학적 *J*-적분 계산식이 요구된다.

공학적인 *J*-적분 계산식 가운데 가장 널리 사용되고 있는 방법은 GE/EPRI 방법⁽¹⁻⁴⁾과 참조응력법(reference stress method)⁽⁵⁾이다. GE/EPRI 방법에서는 극히 제한적인 경우에 대해서만 소성 영향 함수(plastic influence function)를 제시하고 있어서 실질적인 적용이 어렵다. 참조응력법은 GE/EPRI 방법과는 달리 사용이 매우 편리하고 해석 결과가 비교적 안정적이기 때문에 R6 평가법⁽⁶⁾ 등에 적용되고 있으나 참조응력의 정의 방법에 따라 해석 결과가 크게 변할 수 있다는 단점이 있다. 참조응력을 정의하기 위해서 각 구조물에 대한 소성한계하중(plastic limit load)⁽⁷⁾이 무차원화 하중으로 사용되고 있는데, 반타원 표면균열의 경우 한계 하중에 대한 정의 방법이 매우 다양하다. 따라서 참조응력법을 이용하여 표면균열에 대한 *J*-적분을 정

† 책임저자, 회원, 성균관대학교 기계공학부
E-mail : yjkim@yurim.skku.ac.kr
TEL : (031)290-5274 FAX : (031)290-5276
* 성균관대학교 대학원 기계공학부
* 회원, 성균관대학교 기계공학부

확하게 계산하기 위해서는 가장 적합한 한계 하중식을 선택할 필요가 있다. 저자들은 이와 같은 문제점을 고려하여 인장하중이 작용하는 평판에 존재하는 표면균열에 대한 공학적 J -적분식을 제안한 바 있다.⁽⁸⁾

본 논문의 목적은 참고문헌 (8)에서 수행한 연구의 연장으로 굽힘하중과 인장하중이 동시에 작용하는 평판에 존재하는 반타원 표면균열의 탄소성 파괴역학해석을 위한 공학적 J -적분 계산식을 참조응력법에 기초하여 제안하는 것이다.

2. 복합하중이 작용하는 경우에 대한 공학적 J -적분 계산식

2.1 참조응력법에 기초한 J -적분 계산식

참조응력법에서는 결함이 존재하는 구조물에 대한 J -적분값을 다음과 같은 식을 이용하여 계산한다.^(5,6)

$$\frac{J}{J_e} = \frac{E\varepsilon_{ref}}{\sigma_{ref}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{ref}}{\sigma_y} \right)^2 \frac{\sigma_{ref}}{E\varepsilon_{ref}} \quad (1)$$

여기서, E 는 탄성계수, σ_y 는 재료의 항복강도, σ_{ref} 는 참조응력, ε_{ref} 는 진응력-진변형률 곡선상의 참조응력에서 정의되는 변형률이며, J_e 는 J -적분의 탄성 성분이며 다음과 같이 정의 된다.

$$J_e = \frac{K^2}{E'} \quad (2)$$

여기서, K 는 선형탄성파괴역학 매개변수인 응력확대계수이며, 평면 변형률(plane strain) 상태에 대해서는 $E'=E/(1-\nu^2)$ 이며 평면 응력(plane stress) 상태에 대해서는 $E'=E$ 이다. 참조응력, σ_{ref} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_{ref} = \frac{Q}{Q_{OR}} \sigma_y \quad (3)$$

여기서, Q 는 일반화된 하중(인장 P 또는 굽힘 M)이며, Q_{OR} 은 결함이 존재하는 구조물에 대한 일반화된 최적참조하중으로서, 인장의 경우 $Q_{OR}=P_{OR}$ 이고 굽힘의 경우 $Q_{OR}=M_{OR}$ 이다.

따라서 결함이 존재하는 특정 구조물에 대해서 J_e 값과 Q_{OR} 값을 결정하게되면, 식 (1)~(3)을 이용하여 J -적분값을 계산할 수 있다.

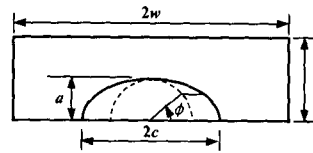
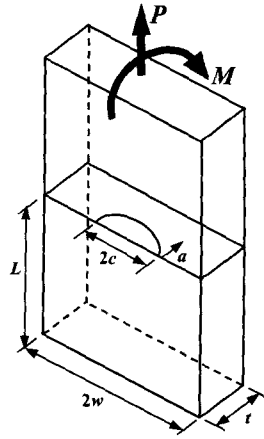


Fig. 1 Schematic illustration of surface cracked plate under combined bending and tension

2.2 탄성 J -적분 계산식, J_e

J_e 를 계산하기 위해서는 K 값을 식 (2)에 대입한다. Fig. 1과 같이 굽힘과 인장이 동시에 작용하는 평판에 존재하는 반타원 표면균열에 대한 K 값을 계산하기 위해서는 다음과 같은 Raju-Newman⁽⁹⁾식을 이용한다.

$$K = (\sigma_m + H\sigma_b) \sqrt{\pi a} \frac{F}{Q} \quad (4)$$

여기서, σ_m 과 σ_b 는 각각 균열이 존재하지 않는 단면에서의 막응력과 굽힘응력으로서 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_m = \frac{P}{2wt}, \quad \sigma_b = \frac{3M}{wt^2} \quad (5)$$

식 (4)에서 H 와 F 는 참고문헌 (9)에서 상세하게 정의되는 무차원 함수로서 $a/t, a/c, w/c, \phi$ 의 함수이며, Q 는 다음과 같이 정의되는 타원 적분이다.

$$Q = \sqrt{1 + 1.4637(a/t)^{1.6507}} \quad (6)$$

2.3 참조하중 계산식, Q_{OR}

저자들은 표면균열이 존재하는 평판에 대한 다양한 한계 하중식들^(7,10-12)을 요한요소해석에 입각

한 최적참조하중(optimised reference load)식들^(3,4)과 비교하여, Goodall⁽¹⁰⁾이 제안한 한계 하중식이 J -적분 계산을 위해서는 가장 적합한 무차원 참조하중이라는 결론을 얻은 바 있다.⁽⁸⁾ Goodall식에서는 굽힘과 인장이 동시에 작용하는 평판에 대한 참조응력을 다음과 같이 정의하고 있다.⁽¹⁰⁾

$$\sigma_{ref} = \frac{(\sigma_b + 3\zeta\sigma_m) + \{(\sigma_b + 3\zeta\sigma_m)^2 + 9\sigma_m^2\xi\}^{0.5}}{3\xi} \quad (7)$$

$$\xi = (1-\zeta)^2 + 2\zeta(\psi - \zeta)$$

여기서, σ_m 과 σ_b 는 식 (5)에서 정의되며, ψ 과 ζ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\psi = \frac{a}{t} ; \quad \zeta = \frac{ac}{wt} \quad (8)$$

식 (3), (5)와 (7)을 이용하면 최적참조하중, Q_{or} 을 하중형태에 따라 정의할 수 있다. 인장하중만 작용하는 경우($M=\sigma_b=0$)에 대한 최적참조하중은 다음과 같이 정의된다.

$$Q_{or} = P_{or} = 2wt\sigma_y \left[\frac{\xi}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \xi}} \right] \quad (9)$$

한편, 식 (7)은 w/c 에 대해서는 제한이 없으며, 평판의 균열단면 전체가 소성을 일으키는 시점을 소성한계 하중으로 가정하고 있기 때문에 평판의 폭(w)이 증가함에 따라 균열부에서 발생하게 되는 국부적인 소성붕괴를 고려하지 못한다. 저자들은 평판에 인장하중만 작용하는 경우에 대하여 w/c 의 변화가 J -적분 계산식에 미치는 영향을 분석하기 위해 다양한 w/c 에 대한 유한요소해석을 수행하여 다음과 같은 최적참조하중을 제안하였다.⁽⁸⁾

$$Q_{or} = P_{or} = 2wt\sigma_y \eta \left[\frac{\xi}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \xi}} \right] \quad (10)$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{for } w/c \leq 4 \\ -0.01(w/c) + 1.04 & \text{for } 4 \leq w/c \leq 9 \\ 0.95 & \text{for } w/c \geq 9 \end{cases}$$

여기서, η 는 평판의 폭(w/c)에 대한 보정계수이다.

굽힘하중만 작용하는 경우($N=\sigma_m=0$)에 대한 최적참조하중은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_{or} = M_{or} = \frac{wt^2}{2} \sigma_y \xi \quad (11)$$

굽힘과 인장이 동시에 작용하는 경우, 최적참조하중에 대한 항복계적(yield locus)을 식 (7)를 이용하여 구할 수도 있지만, 인장만 작용하는 경우에 대해 보정계수(η)를 사용하였기 때문에 식 (7)을 사용하는 것이 부적합하다고 판단하였다. 저자들은 굽힘과 인장이 동시에 작용하는 배판에 존재하는 판통균열에 대해 다음과 같은 간단한 항복계적을 제시하였다.⁽¹³⁾

$$\left(\frac{P}{P_{or}} \right)^2 + \frac{M}{M_{or}} = 1 \quad (12)$$

여기서, P_{or} 과 M_{or} 은 각각 식 (10)과 식 (11)에 나타낸 식들이다. 본 논문에서는 평판에 대하여 식 (7)과 식 (12)를 적용하여 J -적분을 계산한 결과 식 (12)가 보다 정확한 결과를 나타내어 식 (12)를 최적참조하중에 대한 항복계적으로 사용하였다.

본 논문에서는 굽힘과 인장이 동시에 작용하는 경우에 대한 최적참조하중, Q_{or}^C 를 결정하기 위해서 굽힘하중과 인장하중이 비례적으로 가해진다고 가정하여 다음과 같은 하중 비례상수(load proportionality factor)를 정의하였다.

$$\lambda = \frac{M}{Pt} \quad (13)$$

식 (13)을 식 (12)에 대입하면 최적참조하중을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$Q_{or}^C = M_{or}^C = \frac{1}{2} \left[-\frac{(\lambda P_{or} t)^2}{M_{or}} + \sqrt{\left(\frac{(\lambda P_{or} t)^2}{M_{or}} \right)^2 + (2\lambda P_{or} t)^2} \right] \quad (14)$$

또는

$$Q_{or}^C = P_{or}^C = \frac{M_{or}^C}{\lambda t} \quad (15)$$

3. 유한요소해석

앞 절에서는 복합하중(굽힘과 인장)이 작용하는 평판에 존재하는 반타원 표면균열에 대해 참조응

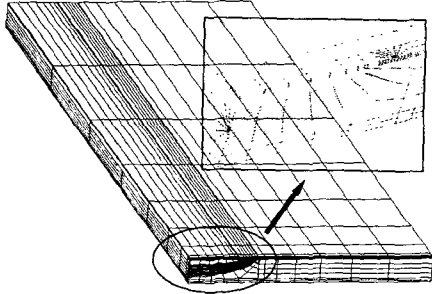


Fig. 2 A typical FE mesh for surface cracked plate with the magnified view for the crack tip region

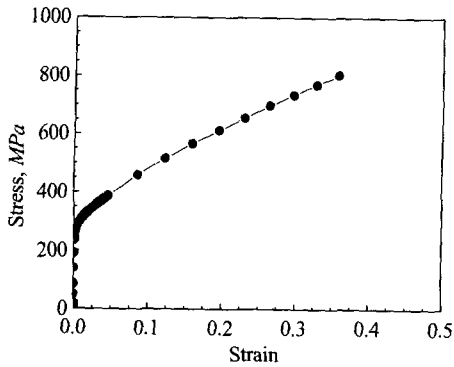


Fig. 3 Stress-strain data for the SA312 TP304 stainless steel

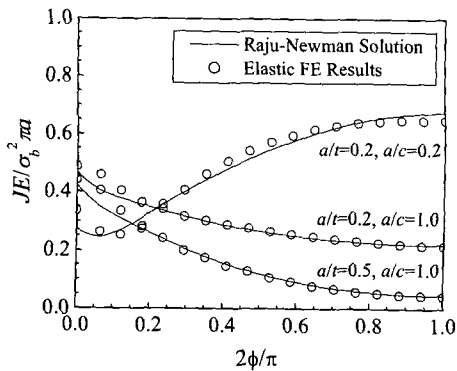


Fig. 4 Comparison of the normalised elastic J values along the crack front from the present FE analysis with the Raju-Newman solution for pure bending

력법에 기초한 공학적 J -적분식을 제안하였다. 본 절에서는 제안된 J -적분 계산식의 결과와 3차원 유한요소해석 결과를 비교하여 제안된 계산식의 유효성을 검증하고, 균열선단의 임의의 위치에서의 적용성을 확인하였다.

Table 1 Material properties for SA312 TP304

E (GPa)	σ_y (MPa)	σ_u (MPa)	ν
204	269	559	0.3

Table 2 Cases considered in the present FE analysis for pure bending

a/t	a/c	w/c
0.2	0.2	4, 6, 8, 10, 20
0.2	1	4
0.5	0.2	4
0.5	1	4

Table 3 Cases considered in the present FE analysis for combined bending and tension

λ , Eq. (13)	a/t	a/c	w/c
0.5	0.2	0.2	4
	0.2	1	4
2	0.5	0.2	4
	0.5	1	4

3.1 해석모델 및 해석방법

굽힘과 인장이 동시에 작용하고 표면균열이 존재하는 평판(Fig. 1)에 대하여 3차원 탄소성 유한요소해석을 수행하였으며, 해석에는 범용 유한요소해석 프로그램인 ABAQUS⁽¹⁴⁾를 사용하였다. Fig. 2는 해석에 사용된 대표적인 유한요소모델을 나타낸 것이다. 해석 모델의 대칭성을 고려하여 전체의 1/4만을 모델링하였으며, 20절점 등계수 사각주요소(20-nodes isoparametric brick reduced integration element)를 사용하였다. 다양한 a/t , a/c , w/c 에 대해 해석을 수행하였으며, 특히 w/c 는 4에서 20까지 넓은 범위에 걸쳐 해석을 수행하였다. 모든 경우에 대하여 소규모 변형을 해석(small strain analysis)을 수행하였으며, 균열선단의 각 위치(ϕ)에서 J -적분값을 산출하였다. 해석에 사용된 재료 물성치는 SA312 TP304 스테인리스강에 대하여 50°C에서 수행된 준정적(quasi-static) 실험결과⁽¹⁵⁾를 사용하였으며, 응력-변형을 곡선 및 재료물성치를 각각 Fig. 3와 Table 1에 정리하였다.

본 논문에서는 순수굽힘하중이 작용하는 경우와 굽힘과 인장이 동시에 작용하는 경우에 대하여 유한요소해석을 수행하였다. 참고로 순수인장하중이 작용하는 경우에 대해서는 참고문헌 (8)에서 해석을 수행한 바 있다. 유한요소모델에 굽힘하중을 가하기 위해서 모델상단부의 모든 절점(node)을 ABAQUS 명령어 MPC (Multi-Point Constraint)를 이용하여 구속하였고, 굽힘과 인장이 동시에 작용하는 경우에도 이와 유사한 방법으로 굽힘과 인장하

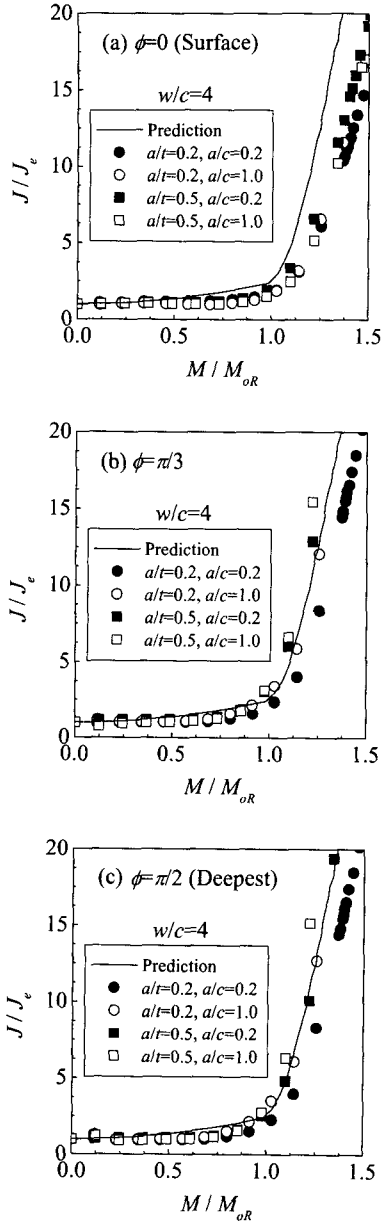


Fig. 5 Comparison of the proposed J estimation equation with the FE results for pure bending, at three different locations along the crack front for various values of a/t and a/c , but with fixed $w/c=4$

증을 동시에 비례적으로 가하였다. 본 논문에서는 세가지 하중 비례상수($\lambda=0.5, 1.0, 2.0$, 식 (13) 참고)에 대하여 해석을 수행하였다. Table 2와 Table 3은 본 논문에서 수행한 유한요소해석에 대한 각 경우를 정리한 것이다.

굽힘하중에 대한 유한요소모형을 검증하기 위해

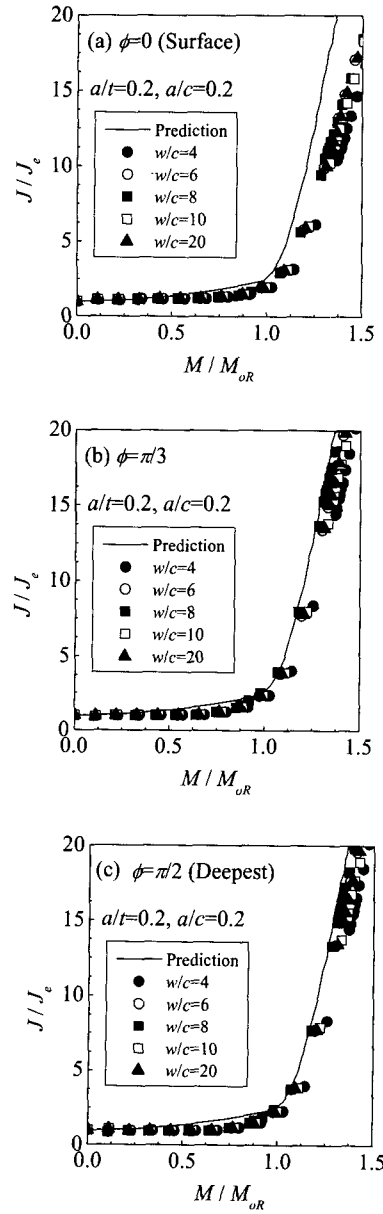


Fig. 6 Effect of w/c on J : comparison of the proposed J estimation equation with the FE results for pure bending, at three different locations along the crack front for various values of w/c , but with fixed $a/t=0.2$ and $a/c=0.2$

탄성해석을 수행하여 각 위치에서 산출한 J -적분값을 무차원화하여 Raju-Newman식의 결과와 비교하였다. Fig. 4에 나타난 바와 같이 다양한 a/t 와 a/c 에 대하여 두 결과가 잘 일치하여 해석모델의 타당성을 검증하였다. 인장하중만 작용하는 경우에 대한 검증은 참고문헌 (8)에서 수행한 바 있다.

3.2 해석결과

Fig. 5는 순수굽힘만 작용하는 경우 유한요소해석을 통해 세 가지 위치($\phi=0, \phi=\pi/3, \phi=\pi/2$)에서 산출한 J -적분값과 참조응력법(식 (1)~(3)과 식 (11))을 이용하여 계산한 결과를 비교한 것으로, 유한요소해석 결과는 a/t 가 0.2에서 0.5, a/c 가 0.2에서 1까지 변하고 w/c 는 4로 고정된 경우에 대한 결과들이다. 각 위치에서의 J -적분값은 그 위치에서 Raju-Newman식을 이용하여 계산한 탄성성분(J_e)으로 무차원화하였다. 인장하중만 작용하는 경우에는 유한요소 해석결과와 참조응력법을 이용하여 계산한 결과가 표면점을 제외한 나머지 위치에서 정확히 일치하였으나,⁽⁸⁾ 순수굽힘하중만 작용하는 경우에는 Fig. 5에 나타난 바와 같이 두 결과가, 특히 표면점에서, 약간의 차이를 나타내었다. 이와 같은 오차가 발생한 이유는 평판에 대한 참조응력을 선택하는데 있어서 표면점이 아닌 최심점을 기준으로 선택했기 때문이라고 판단된다. 하지만 본 논문에서 제시한 계산방법의 간단성을 고려한다면 이 정도의 오차는 공학적인 측면에서 허용할 수 있다고 판단된다.

Fig. 6은 w/c 가 J -적분 계산에 미치는 영향을 분석 하기 위해 a/t 와 a/c 를 각각 0.2로 고정시키고 다양한 w/c 에 대해 유한요소해석을 수행한 결과를 참조응력법을 이용한 결과와 비교한 것으로, w/c 를 고정시킨 경우(Fig. 5)와 유사한 결과를 나타내었다.

Fig. (7)~(9)는 평판에 굽힘과 인장이 동시에 작용하는 경우에 대한 유한요소 해석결과를 참조응력법을 이용하여 계산한 결과와 비교한 것으로, 세 가지 하중 비례상수($\lambda=0.5, 1.0, 2.0$)에 대한 결과를 나타낸 것이다. 하중 비례상수 λ 가 0.5인 경우에는 인장하중이 지배적이며, λ 가 2.0인 경우에는 굽힘하중이 지배적이다. 모든 경우에 대하여 본 논문에서 제안한 계산식의 결과가 유한요소 해석결과와 비교적 잘 일치하였다. 앞서 언급한 바와 같이, 본 논문에서 제시한 J -적분 계산방법의 간단성을 고려한다면 Fig. (7)~(9)에 나타난 두 결과의 차이는 공학적인 측면에서 허용 가능하다고 판단된다. 따라서 본 논문에서 제안한 공학적 J -적분 계산식은 굽힘과 인장이 동시에 작용하는 평판에 적용 가능할 것으로 판단된다.

4. 결론

본 논문에서는 굽힘하중과 인장하중이 동시에 작용하는 평판에 존재하는 반타원 표면균열에 대한 공학적 J -적분 계산식을 참조응력법에 기초하여 제안하였다. 본 논문에서 제안한 공학적 J -적분

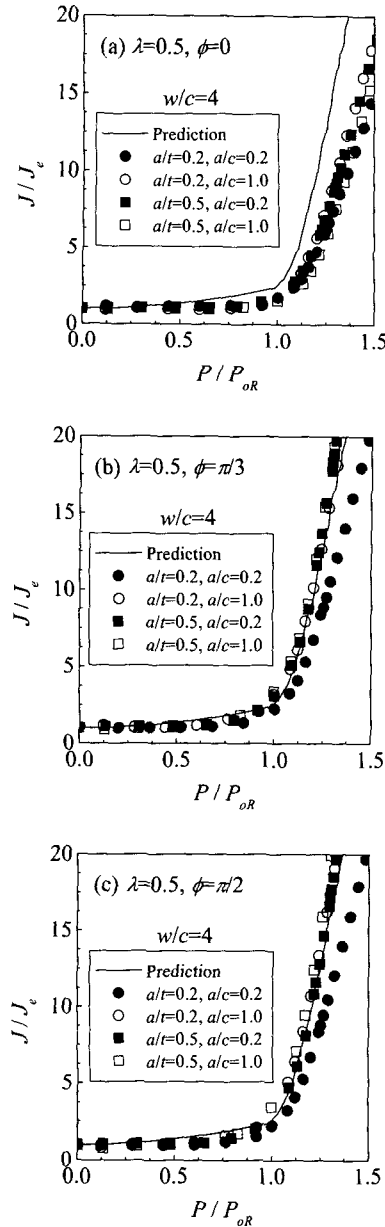


Fig. 7 Comparison of the proposed J estimation equation with the FE results for combined bending and tension with $\lambda=0.5$, at three different locations along the crack front for various values of a/t and a/c , but with fixed $w/c=4$

계산식은 경우에 따라, 특히 표면균열의 표면점에서 정확성은 다소 떨어지나 사용방법이 매우 간단하며 다양한 하중형태에 대하여 적용이 용이하기 때문에 공학적인 측면에서는 매우 유용할 것으로 판단된다. 또한, 표면균열의 최심점 뿐만 아니라

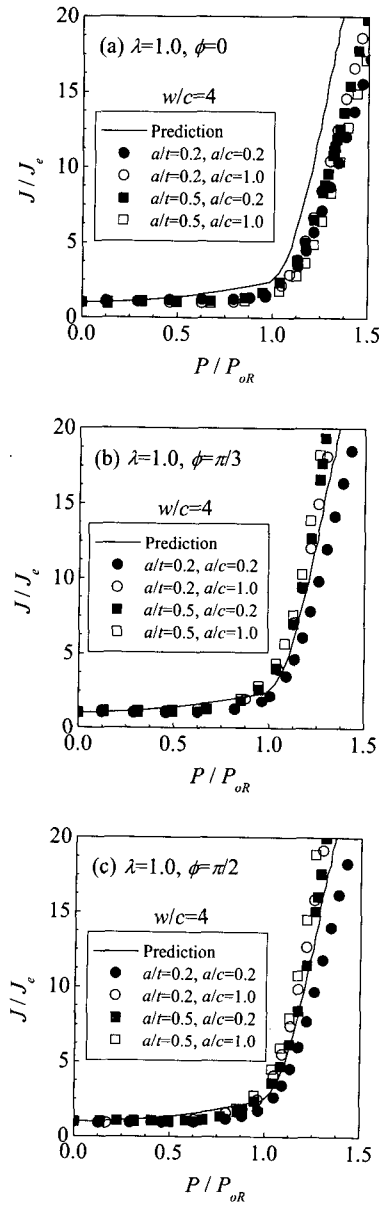


Fig. 8 Comparison of the proposed J estimation equation with the FE results for combined bending and tension with $\lambda=1$, at three different locations along the crack front for various values of a/t and a/c , but with fixed $w/c=4$

균열선단 임의의 위치에 대해서도 적용 가능하다는 것이 큰 장점이다. 제한된 공학적 J -적분 계산식은 굽힘하중과 인장하중이 동시에 작용하는 평판에 존재하는 표면균열에 대한 탄소성파괴역학 해석에 널리 적용될 수 있을 것으로 판단되며, 이와 같은 계산방법은 기계하중과 열하중이 동시에

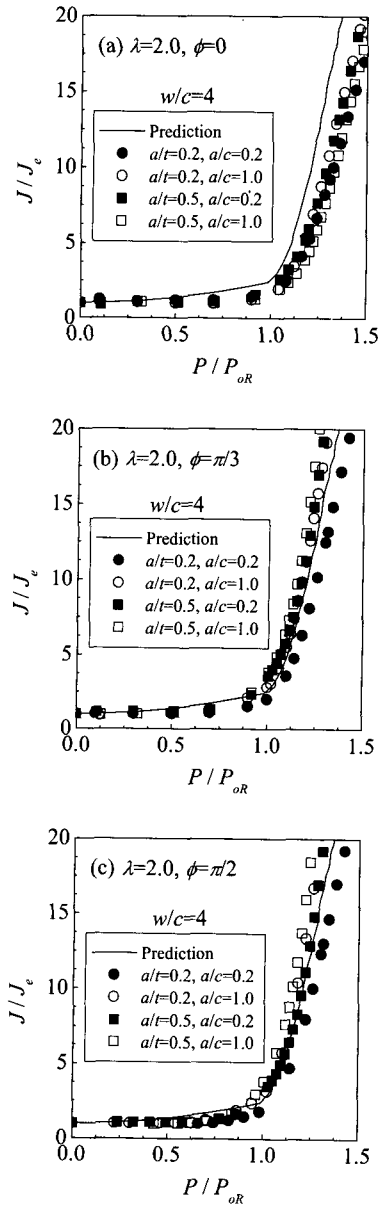


Fig. 9 Comparison of the proposed J estimation equation with the FE results for combined bending and tension with $\lambda=2$, at three different locations along the crack front for various values of a/t and a/c , but with fixed $w/c=4$

작용하는 경우와 같은 복잡한 문제에도 적용 가능할 것으로 판단된다.

후기

본 논문은 한국과학재단 산하 성균관대학교 산

업설비 안전성평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분들께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Kumar, V. and German, M.D., 1988, "Elastic-Plastic Fracture Analysis of Through-Wall and Surface Flaws in Cylinders," EPRI Report NP-5596.
- (2) Zahoor, A., 1991, "Ductile Fracture Handbook," Novotech Corp.
- (3) Yagawa, G., Kitajima, Y. and Ueda, H., 1993, "Three-Dimensional Fully Plastic Solutions for Semi-Elliptical Surface Cracks," *International Journal of Pressure Vessels & Piping*, Vol. 53, pp. 457~510.
- (4) McClung, R.C., Chell, G.G., Lee, Y.D., Russel, D.A. and Orient, G.E., 1999, "Development of a Practical Methodology for Elastic-Plastic and Fully Plastic Fatigue Crack Growth," NASA Report NASA/CR-1999-209428.
- (5) Ainsworth, R.A., 1984, "The Assessment of Defects in Structures of Strain Hardening Materials," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 19, pp. 633~642.
- (6) 1999, "R6: Assessment of the Integrity of Structures Containing Defects," Revision 3, British Energy Generation Ltd.
- (7) Miller, A.G., 1988, "Review of Limit Loads of Structures Containing Defects," *International Journal of Pressure Vessels & Piping*, Vol. 32, pp. 191~327.
- (8) 심도준, 김윤재, 최재봉, 김영진, 2001, "인장하중이 작용하는 평판에 존재하는 반타원 표면균열의 J -적분 계산식," 대한기계학회논문집(A) 제 25권 제11호, pp. 1777~1784.
- (9) Raju, I.S. and Newman Jr., J.C., 1979, "Stress Intensity Factors for a Wide Range of Semi-Elliptical Surface Cracks in Finite-Thickness Plates," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 11, pp. 817~829.
- (10) Goodall, I.W., 1999, "C* for Partially-Penetrating Semi-Elliptical Flaws in Plates: Propagation Through the Thickness," ICON Report ME 196/01 Issue 2.
- (11) Sattari-Far, I., 1994, "Finite Element Analysis of Limit Loads for Surface Cracks in Plates," *International Journal of Pressure Vessels & Piping*, Vol. 57, pp. 237~243.
- (12) Miller, A.G., 1988, "J Estimation for Surface Defects; Further Results," CEGB Memorandum TPRD/B/SM/SF95/M88.
- (13) Kim, Y.J., Huh, N.S. and Kim, Y.J., "Reference Stress Based Elastic-Plastic Fracture Analysis for Circumferential Through Wall Cracked Pipes Under Combined Bending and Tension," *Engineering Fracture Mechanics*, (in print)
- (14) 2000, "ABAQUS User's manual," Hibbitt, Karlson & Sorensen, Inc.
- (15) 김영진, 석창성, 전현규, 최영환, 이정배, 1996 "원자력배관 건전성평가 전문가시스템 개발 (1) - 평가법 제시 및 재료물성치 추론," 대한기계학회논문집(A) 제20권 제2호, pp. 575~584.