

## 일반적인 플랜트에 대한 시간지연을 이용한 제어기법의 안정성 해석

권오석<sup>\*</sup> · 장평훈<sup>†</sup> · 정제형<sup>\*\*</sup>

(2001년 7월 9일 접수, 2002년 3월 29일 심사완료)

### Stability Analysis of Time Delay Controller for General Plants

Oh-Seok Kwon, Pyung-Hun Chang and Je Hyung Jung

**Key Words :** Time Delay Control(TDC:시간지연을 이용한 제어기법<sup>1)</sup>), Time Delay Estimation(TDE: 시간지연추정), Zero Dynamics(영점 동역학), Input Output Linearization(IOL:입출력 선형화), Input Output Stability(입출력 안정성)

#### Abstract

Time Delay Control(TDC) is a robust nonlinear control scheme using Time Delay Estimation(TDE) and also has a simple structure. To apply TDC to a real system, we must design Time Delay Controller to guarantee stability. The earlier research stated sufficient stability condition of TDC for general plants. In that research, it was assumed that time delay is infinitely small. But, it is impossible to implement infinitely small time delay in a real system. So, in this research we propose a new sufficient stability condition of TDC for general plants with finite time delay. And the simulation results indicate that the previous sufficient stability condition does not work even for small time delay, while our proposed condition works well.

#### 1. 서론

시간지연을 이용한 제어기법(Time Delay Control : TDC)은 플랜트의 예측 못한 외란이나 잘 모르는 비선형 동역학의 전체적인 양을 시간지연 추정방법으로 보상하는 제어 기법이다.<sup>(1)</sup> 이 제어기법은 지금까지 개발된 고등 제어 알고리즘에 비하여 단순한 구조를 지니면서도, 외란과 매개변수의 변동에 대하여 탁월한 강인성을 보인다.

어떤 제어기법을 적용할 때에 가장 기본적으로 고려하여야 할 부분 중 하나는 제어시스템의 안정성에 대한 해석이다. 시간지연을 이용한 제어시스템의 안정성 해석은 내부적으로 시간지연을 지니고 있기 때문에 쉽지 않다. 참고문헌 (2)의 논문에서는 LTI(Linear Time Invariant) SISO(Single Input Single Output) 시스템에 대하여 시간지연을 이용한

제어시스템이 안정하기 위한 필요충분조건을 구했다. 해석방법은 Nyquist 판별법을 사용하였는데, LTI SISO 시스템으로 한정된다는 점과 실제 적용시 복잡한 과정을 거친다는 단점을 지니고 있다. 참고문헌 (3)에서는 불확실한 선형 SISO 시스템에 대한 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하기 위한 충분조건을 제시하였다. 이 논문에서는 Nyquist 판별법과 Kharitonov 방법으로 해석하였는데, 마찬가지로 선형 SISO 시스템으로 한정되며 적용시 복잡한 과정을 거친다.

한편, 일반적인 플랜트에 대한 시간지연을 이용한 제어시스템의 안정성 해석은 시간지연  $L \rightarrow 0$ 의 가정 하에서, Youcef-Toumi 에 의하여 해석되었다.<sup>(4)</sup> 그 결과 플랜트의 영점 동역학(zero dynamics)<sup>(5)</sup>이 지수적으로 안정(exponentially stable)하고 원하는 궤적(desired trajectory)과 그 미분값들이 제한되어 있다는 조건 하에서 시간지연을 이

<sup>\*</sup> 한국과학기술원 기계공학과, 現 LG 생산 기술 연구소

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : phchang@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3226 FAX : (042)869-5226

<sup>\*\*</sup> 한국과학기술원 대학원 기계공학과

<sup>1</sup> 영문을 직역하면 시간지연 제어기법이 되는데 시간지연 제어기법 이라 하면 시간지연이 포함된 시스템의 제어를 위한 제어기법으로 오해의 소지가 있어 명확한 구분을 위해 시간지연을 이용한 제어기법으로 표기함.

용한 제어시스템이 안정하기 위한 충분조건으로서  $\|I-B(x)\bar{B}^{-1}\| < 1$  와 같이 제시되었다. 즉, 시간지연을 이용한 제어기법을 설계하는데 필요한  $\bar{B}$  를 플랜트의 작동범위 내의  $B(x)$  에 대하여 위의 조건을 만족하도록 설계하면 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하다라는 것이다. 하지만 실제로 시간지연  $L \rightarrow 0$  의 가정은 하드웨어적으로 구현하는데에는 한계가 있다. 따라서 본 연구에서는 시간지연  $L \rightarrow 0$  이 아닌 한정된 값을 갖는 실제의 경우에 대하여 안정성 해석을 한다. 이를 통해서 일반적인 플랜트에 대한 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하기 위한 충분조건을 유도하고 이로부터 안정하기 위한  $\bar{B}$  의 범위를  $\|I-B\bar{B}^{-1}\| < a (a < 1)$  의 형태로 제시한다. 이 결과는 기존의 Youcef-Toumi 가 시간지연  $L \rightarrow 0$  의 가정 하에서 제시한 안정하기 위한 충분조건에 관한 문제점을 해결한 것이다. 즉, 충분히 작은 시간지연  $L$  에 대해서도  $\|I-B\bar{B}^{-1}\| < 1$  의 조건을 만족하도록 시간지연을 이용한 제어기법의  $\bar{B}$  를 설계하더라도 시스템이 불안정한 응답을 보이는 경우가 있는데, 이 연구에서 제시하는 안정성 기준을 만족하도록 시간지연을 이용한 제어기법의  $\bar{B}$  를 설계하는 경우에는 시스템이 항상 안정한 응답을 보임을 알 수 있다. 즉, 이 연구를 통해 시간지연  $L$  이 한정된 값을 갖는 실제의 경우 시간지연을 이용한 제어기법을 안정하게 설계할 수 있는 기준을 제시하려 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 장에서는 입출력 선형화(Input Output Linearization : IOL)와 시간지연을 이용한 제어기법을 간략히 소개하고, 기존의 안정성 기준에서의 문제점을 다루며, 3 장에서는 일반적인 플랜트에 대한 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하기 위한 충분조건을 이끌어내고 이로부터 안정성 기준 즉, 안정하기 위한  $\bar{B}$  의 범위를 구한다. 4 장에서는 모의실험을 통하여 안정성 기준을 검증하고, 마지막으로 5 장에서는 결과를 요약정리하고 결론을 이끌어낸다.

## 2. 시간지연을 이용한 제어기법과 기존의 안정성 기준에서의 문제점

### 2.1 입출력 선형화

이 절에서는 입출력 선형화 기법에 대해서 요약 기술한다.<sup>(4,5)</sup> 다음과 같은 입력과 출력의 개수가 같은 일반적인 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= c(x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x \in \mathbb{R}^n$  은 상태벡터(state vector),  $u \in \mathbb{R}^m$  은 입력벡터(input vector), 그리고  $y \in \mathbb{R}^m$  은 출력벡터(output vector)를 나타낸다. 그리고,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  은 상태벡터  $x$  에 대한 함수로서  $x$  에 대해서 부드러운 함수(smooth function)로 가정한다. 다음에서  $g_j$  는 행렬  $G$  의  $j$  번째 열벡터를 의미한다.

입출력 선형화 과정은 출력성분  $y_i$  를 적어도 하나의 입력성분  $u_j$  가 나타날 때까지  $y_i$  를 시간에 대해서 미분한다. 만약에  $r_i$  가 적어도 하나의  $g_j$  에 대해서 다음의 관계가 만족되는 최소의 정수라고 한다면,

$$\begin{aligned} L_{g_j}(L_f^{r_i}(c_i(x))) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, k=0, \dots, r_i-2 \\ L_{g_j}(L_f^{r_i-1}(c_i(x))) &\neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2)$$

$y_i$  의  $r_i$  번 시간미분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^{r_i} y_i}{dt^{r_i}} = L_f^{r_i}(c_i(x)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j}(L_f^{r_i-1}(c_i(x)))u_j \quad (3)$$

여기서,  $L_f(\varphi(x)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L_{g_j}(\varphi(x)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  은 각각  $f(x)$  와  $g_j(x)$  에 대한  $\varphi(x)$  의 Lie derivative 를 나타낸다. 그리고 식 (3)은 다음과 같은 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$Dy = a(x) + B(x)u \quad (4)$$

여기서,  $D \equiv \text{diag}(d^i / dt^{r_i})$  를 나타내고  $a(x)$  와  $B(x)$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a(x) &= [L_f^{r_1}(c_1(x)) \cdots L_f^{r_m}(c_m(x))]^T \\ B(x) &= \begin{bmatrix} L_{g_1}(L_f^{r_1-1}(c_1(x))) \cdots L_{g_m}(L_f^{r_1-1}(c_1(x))) \\ \vdots \\ L_{g_1}(L_f^{r_m-1}(c_m(x))) \cdots L_{g_m}(L_f^{r_m-1}(c_m(x))) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

만약  $B(x)$  의 역행렬이 존재한다면, 다음과 같은 제어법칙을 이끌어 낼 수 있다.

$$u = B^{-1}(x)[-a(x) + v] \quad (6)$$

여기서,  $v \in \mathbb{R}^m$  은 새로운 입력벡터로서  $i$  번째 성분은 다음과 같다.

$$v_i = y_d^{(r_i)} + \gamma_{i1}e_i^{(r_i-1)} + \cdots + \gamma_{ir_i}e_i \quad (7)$$

그리고, 오차벡터(error vector)의  $i$  번째 성분은  $e_i \triangleq y_d - y_i$  와 같이 정의한다.

이 때 식 (6)을 식 (4)에 대입함으로써 다음과 같은  $m$  개의 독립된 선형 SISO 관계식을 얻을 수 있다.

$$Dy=v \tag{8}$$

식 (8)의  $i$  번째 성분은 다음과 같은 오차 동역학으로 나타낼 수 있다.

$$e_i^{(r)} + \gamma_{1i}e_i^{(r-1)} + \dots + \gamma_{ri}e_i = 0 \tag{9}$$

여기서,  $\gamma_{1i}, \dots, \gamma_{ri}$  를 다음과 같은 특성방정식의 근이 좌반 복소 평면상에 놓이도록 선정하면,

$$s^r + \gamma_{1i}s^{r-1} + \dots + \gamma_{ri}s = 0 \tag{10}$$

$e_i$  는 점근적으로 0 에 접근하게 된다. 더욱이 만약 식 (1)의 영점 동역학(zero dynamics)이 지수적으로 안정하고 원하는 궤적과 그 미분값들이 제한되어 있다면 페루프 시스템은 안정하다.

식 (6)의 제어법칙은 오직  $a(x)$  와  $B(x)$  를 정확히 알고 있을 때에만 적용 가능하다. 만약 모델에 부정확성(inaccuracy)이 있다면 식 (8)과 같이 선형화된 식으로 표현될 수 없고 뿐만 아니라 이로 인해 페루프 시스템의 안정성을 보장할 수 없게 된다. 따라서 다음 절에서는 시스템에 불확실한 동역학(uncertain dynamics)이 존재하는 그리고/또는 예측하지 못한 외란 및 매개변수의 변동이 존재하는 경우에 대해 탁월한 강인성을 지니는 시간지연을 이용한 제어기법<sup>(1-4,11)</sup>에 대해서 기술하려 한다.

2.2 시간지연을 이용한 제어기법

이 절에서는 2.1 절의 입출력 선형화 기법에 대응해서 시간지연을 이용한 제어기법을 간략히 기술한다.<sup>(4)</sup>

식 (4)를 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$Dy=H(x)+\bar{B}u \tag{11}$$

여기서,  $H(x)$  는 다음과 같다.

$$H(x)=a(x)+(B(x)-\bar{B})u \tag{12}$$

그리고,  $\bar{B}$  는  $B(x)$  에 기준하여 선정되는 상수행렬이다.

이 때 제어입력  $u$  를 다음과 같이 둔다.

$$u=\bar{B}^{-1}(-\hat{H}+v) \tag{13}$$

여기서,  $v$  의  $i$  번째 성분은 식 (7)과 같고  $\hat{H}$  은  $H$  의 추정값이다. 만약  $\hat{H}=H$  의 관계가 성립한다면 식 (8)과 같은 관계가 성립한다.

시간지연을 이용한 제어기법은  $H$  의 추정값  $\hat{H}$  을 구하기 위하여 다음과 같은 추정방법을 이용한다. 만약 시간지연  $L$  이 충분히 작다면 다음과 같은 근사식이 성립하고

$$H(t) \cong \hat{H}(t)=H(t-L)=Dy(t-L)-\bar{B}u(t-L) \tag{14}$$

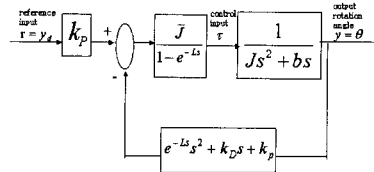


Fig. 1 DC motor with TDC

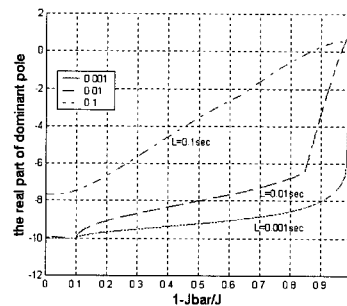


Fig. 2 The real part of dominant pole of Fig.1

식 (14)를 식 (13)에 대입함으로써 다음과 같은 시간지연을 이용한 제어기법을 유도할 수 있다.

$$u(t) = u(t-L) + \bar{B}^{-1}(-Dy(t-L) + v(t)) \tag{15}$$

식 (15)에서와 같이 시간지연을 이용한 제어기법은 플랜트의 비선형 동역학을 사용하지 않고 매우 효율적인 시간지연 추정방법을 사용하기 때문에 계산량의 부담이 매우 적은 장점을 가지고 있다.<sup>(1-4,11)</sup>

2.3 기존의 안정성 기준과 그 문제점

기존의 일반적인 플랜트에 대한 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하기 위한 충분 조건으로서 플랜트의 영점 동역학이 지수적으로 안정하고 원하는 궤적과 그 미분값들이 제한되어있다는 조건 하에 다음과 같이 제시되었다.<sup>(4)</sup>

$$\|I - B\bar{B}^{-1}\| < 1 \tag{16}$$

여기서  $I$  는  $m \times m$  단위 행렬이고  $B$  는 식 (5)의  $m \times m$  행렬  $B(x)$  를 나타낸다. 그리고  $\bar{B}$  는  $B$  에 기준하여 선정되는  $m \times m$  상수행렬이다.

그러나 시간지연을 이용한 제어기법을 적용한 몇 가지 모의실험과 실험을 통하여 식 (16)의 조건을 만족하더라도 불안정한 응답을 보이는 경우를 관찰할 수 있었다. 이에 대한 가장 간단한 예로서 DC 모터에 시간지연을 이용한 제어기법을 적용한 경우를 들 수 있다. Fig. 2 는 Fig. 1 과 같은 DC 모터 페루프 시스템의 대표 극점(dominant pole)의 실수부를 도시한 것이다. Fig. 2 를 살펴보면

면,  $\|I-B\bar{B}^{-1}\| < 1$  (여기서  $B=1/J$ ,  $\bar{B}^{-1}=\bar{J}$ )를 만족하더라도 1에 가까운 부근에서는 불안정해지고, 또한 시간지연  $L$ 이 클수록 불안정한 영역이 더욱 커지는 것을 볼 수 있다. 이는 식 (16)의 조건의 전제로서, 시간지연  $L$ 에 대하여  $L \rightarrow 0$ 와 같은 가정이 사용되어졌기 때문이다. 그러나, 시간지연을 이용한 제어기법을 실제 시스템에 적용할 때에는 일반적으로 표본시간(sampling time interval)을 시간지연  $L$ 로 사용하는데, 하드웨어적인 제약으로 인하여  $L$  값을 0에 무한히 가깝게 하는 데에는 한계가 있다. 따라서, 다음 장에서는 시간지연  $L \rightarrow 0$ 이 아닌 한정된 값을 갖는 실제의 경우에 대하여 안정성 해석을 한다.

### 3. 시간지연을 이용한 제어기법의 안정성 해석 및 기준

이 장에서는 입출력 선형화가 가능하고(즉, 식 (2)가 만족되고 식 (5)의  $B(x)$ 의 역행렬이 존재)<sup>(6)</sup> 영점 동역학이 지수적으로 안정한 플랜트에 대해 시간지연을 이용한 제어기법의 안정성을 해석하고 이를 통하여 제어시스템이 안정하기 위한 충분조건을 유도하고 이로부터 안정성 기준 즉, 안정하기 위한  $\bar{B}$ 의 범위를 이끌어 낸다.

#### 3.1 시간지연을 이용한 제어기법의 안정성 해석

2.2 절에서  $\dot{H}=H$ 를 가정할 때, 오차동역학(error dynamics)의  $i$  번째 관계식은 식 (9)와 같다. 그러나, 실제로는 시간지연  $L \neq 0$ 이므로  $\dot{H} \neq H$ 이다. 따라서, 실제 오차동역학은 식 (13), (14)를 식 (11)에 대입함으로써 다음과 같이 구해진다.

$$v(t) - Dy(t) = H(t-L) - H(t) \tag{17}$$

다음과 같이 오차벡터  $\varepsilon(t)$ 를 정의하면,

$$\varepsilon(t) = v(t) - Dy(t) \tag{18}$$

이 때  $\varepsilon_i(t)$ 와  $e_i(t)$  사이에는 다음과 같은 동역학을 갖는다.

$$\varepsilon_i = e_i^{(r_i)} + \gamma_{i1}e_i^{(r_i-1)} + \dots + \gamma_{ir}e_i \tag{19}$$

이를 다음과 같은 벡터형식으로 나타내도록 한다.

$$\varepsilon = De + K_1 D_1 e + \dots + K_p D_p e + \dots + K_r D_r e \tag{20}$$

여기서,  $p=1, \dots, r$ 에 대해  $D_p \equiv \text{diag}(d^{r-p} / dt^{r-p})$ 이고  $i=1, \dots, m$ 에 대해  $r \equiv \max(r_i)$ 이다. 또한  $K_1, \dots, K_p, \dots, K_r$ 는

$$K_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_{1m} \end{bmatrix}, \dots, K_p = \begin{bmatrix} \gamma_{p1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_{pm} \end{bmatrix}, \dots, K_r = \begin{bmatrix} \gamma_{r1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_{rm} \end{bmatrix}$$

인 대각 행렬들이다.  $p=1, \dots, r$ 과  $i=1, \dots, m$ 에 대해 만약  $r_i - p < 0$ 이면 식 (20)이 식 (19)를 나타내기 위하여  $e_i^{(r_i-p)} = 0$ 로 둔다.

식 (12)를 이용하여 식 (17)을 정리하면 다음과 같다.

$$\varepsilon(t) = a(t-L) + B(t-L)u(t-L) - \bar{B}u(t-L) - a(t) - B(t)u(t) + \bar{B}u(t) \tag{21}$$

식 (21)에서  $u(t)$ 에 식 (15)를 대입하고  $u(t-L)$ 에 식 (4)로부터

$$u(t-L) = B^{-1}(t-L)(Dy(t-L) - a(t-L)) \tag{22}$$

를 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & (I-B(t)\bar{B}^{-1})\varepsilon(t-L) \\ & + (I-B(t)\bar{B}^{-1})(v(t) - v(t-L)) \\ & + B(t)[(B^{-1}(t) - B^{-1}(t-L))Dy(t-L) \\ & - (B^{-1}(t)a(t) - B^{-1}(t-L)a(t-L))] \end{aligned} \tag{23}$$

여기서,  $a, B$ 를 상태벡터  $x$ 의 함수로 표현하는 대신 시간  $t$ 의 함수로 나타내었다.

따라서, 일반적인 플랜트에 시간지연을 이용한 제어기법을 적용한 경우의 오차동역학은 식 (19) 또는 (20)과 식 (23)으로 나타낼 수 있다. 이 오차동역학에 대해  $L_2$  공간에서 입출력 안정성(Input-Output Stability)방법을 이용하여 안정성 해석을 수행한다.<sup>(6-8)</sup>

#### Lemma 1

일반적인 플랜트에 시간지연을 이용한 제어기법을 적용하는 경우 오차동역학은 식 (20)과 같다. 이 때 영 초기 오차(zero initial conditions) ( $\|D_p e\|_2 = 0$  at  $t=t_0$  for  $p=1, \dots, r$ )를 가정하면 다음과 같은 식이 성립한다.<sup>(6,7)</sup>

$$\begin{aligned} \|D_1 e\|_{T_2} & \leq \beta_1 \|\varepsilon\|_{T_2} \\ & \vdots \\ \|D_p e\|_{T_2} & \leq \beta_p \|\varepsilon\|_{T_2} \\ & \vdots \\ \|D_r e\|_{T_2} & \leq \beta_r \|\varepsilon\|_{T_2} \end{aligned}$$

여기서,  $p=1, \dots, r$ 에 대해  $\beta_p = \|G_p\|_2$ 이고  $G_p$ 는 operator  $G_p : \varepsilon \mapsto D_p e$ 를 의미한다. 그리고,  $\|\bullet\|_{T_2}$ 은 시간  $T$ 에서 truncated 된  $\bullet(t)$ 의  $L_2^m$  공간에서의 노름(norm)을 나타낸다.

**Proof :**

식 (20)은 각각의 성분에 대하여 입력  $\varepsilon(t)$  에 대한 독립된 선형 미분방정식(linear decoupled differential equation)으로 생각할 수 있다. 이와 같은 관점으로부터 operator  $G_p : \varepsilon \mapsto D_p e$  에 대한  $L_2$  이득(gain)을 구해보도록 한다.

식 (20)으로부터  $r_i - p \geq 0$  인 경우 각각의 성분 에 대하여 operator  $G_{p,i} : \varepsilon_i \mapsto e_i^{(r_i-p)}$  를 고려하면, 입력  $\varepsilon_i$  와 출력  $e_i^{(r_i-p)}$  에 대한 전달함수(transfer function)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{e_i^{(r_i-p)}(s)}{\varepsilon_i(s)} = g_{p,i}(s) = \frac{s^{r_i-p}}{s^{r_i} + \gamma_{i1}s^{r_i-1} + \dots + \gamma_{ir_i}} \quad (24)$$

전달함수의  $L_2$  이득은 다음과 같이 정의된다.<sup>(6,7)</sup>

$$\|G_{p,i}\|_2 = \max_{\omega} |g_{p,i}(j\omega)| \quad (25)$$

그리고,  $\|G_p\|_2 = \|M_{G_p}\|_2$  이다.<sup>(6)</sup> 여기서 하첨자(subscript)  $i2$  는 induced matrix 2 norm 을 나타내고, 대각 행렬(diagonal matrix)  $M_{G_p}$  의  $i$  번째 대각항(diagonal term)은  $(M_{G_p})_{ii} = \max_{\omega} |g_{p,i}(j\omega)|$  이다.

따라서, MIMO(Multiple Input Multiple Output) 시스템에 대한  $L_2$  이득  $\beta_1, \dots, \beta_p, \dots, \beta_r$  는 다음과 같이 구해진다.<sup>(6,7)</sup>

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \|G_1\|_2 \\ &\vdots \\ \beta_p &= \|G_p\|_2 \\ &\vdots \\ \beta_r &= \|G_r\|_2 \end{aligned} \quad (26)$$

그러므로 영 초기 오차일 때, 다음과 같이 정리된다.<sup>(6,7)</sup>

$$\begin{aligned} \|D_1 e\|_{T_2} &\leq \beta_1 \|\varepsilon\|_{T_2} \\ &\vdots \\ \|D_p e\|_{T_2} &\leq \beta_p \|\varepsilon\|_{T_2} \\ &\vdots \\ \|D_r e\|_{T_2} &\leq \beta_r \|\varepsilon\|_{T_2} \end{aligned} \quad (27)$$

□

**Lemma 2**

일반적인 플랜트에 시간지연을 이용한 제어기법을 적용하는 경우, 원하는 궤적(desired trajectory) 과 그 미분값들에 대하여  $Dy_d \in L_2^m$  그리고,  $p=1, \dots, r$  에 대해  $D_p y_d \in L_2^m$  과 같이 가정하고 외

란  $w \in L_2^m$  과 같이 가정한다면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$(1-\mu)\|\varepsilon\|_{T_2} \leq \delta_1 \|D_1 e\|_{T_2} + \dots + \delta_r \|D_r e\|_{T_2} + \phi$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mu &\triangleq \|\Delta + L\Delta K_1 - B\tilde{B}^{-1} - LBq_1\|_{T_2} \\ \delta_1 &\triangleq \|L\Delta(K_2 - K_1 K_1) + B\tilde{B}^{-1}K_1 + LBq_1 K_1 - LBq_2 - B\tilde{q}_1\|_{T_2} \\ &\vdots \\ \delta_{r-1} &\triangleq \|L\Delta(K_r - K_1 K_{r-1}) + B\tilde{B}^{-1}K_{r-1} + LBq_1 K_{r-1} \\ &\quad - LBq_r - B\tilde{q}_{r-1}\|_{T_2} \\ \delta_r &\triangleq \|-L\Delta K_r K_r + B\tilde{B}^{-1}K_r + LBq_1 K_r - B\tilde{q}_r\|_{T_2} \\ \phi &\triangleq \|\Delta\|_{T_2} \|D\tilde{y}_d\|_{T_2} + \|B\tilde{B}^{-1}\|_{T_2} \|Dy_d(t-L)\|_{T_2} \\ &\quad + \|B\|_{T_2} (\|\tilde{Q}_d\|_{T_2} + \|\tilde{w}\|_{T_2}) \end{aligned}$$

**Proof :**

식 (23)에서 각 항을 간략히 표현하기 위해서 다음과 같이 둔다.

$$\begin{aligned} I-B(t)\tilde{B}^{-1} &\triangleq \Delta \\ B^{-1}(t) - B^{-1}(t-L) &\triangleq \tilde{B}^{-1} \\ B^{-1}(t)a(t) - B^{-1}(t-L)a(t-L) &\triangleq \tilde{Q} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서,  $\Delta$  와  $B^{-1}(t)$  는 플랜트가 일출력 선형화 가능하다라는 전제조건으로부터 제한되어 있다. 이로부터  $\tilde{B}^{-1}$  는 시간  $t$  와  $t-L$  에서의  $B^{-1}$  값의 차로 나타내므로 제한되어 있다.

그리고 식 (28)에서  $\tilde{Q} = Q(t) - Q(t-L)$  로서  $Q(t) = B^{-1}(t)a(t)$  이다.

$Q(t)$  를 다음과 같이 나타낸다.

$$Q(t) = Q_d(t) + O_q(D_1 e(t), \dots, D_r e(t)) + w(t) \quad (29)$$

여기서,

$$Q_d(t) = Q_d(D_1 y_d(t), \dots, D_r y_d(t)) \quad (30)$$

로서  $Q_d$  는 원하는 궤적과 그 미분값들의 함수 즉,  $D_p y_d$  ( $p=1, \dots, r$ )의 함수이다.

그리고, 다음과 같이 가정한다.<sup>(8)</sup>

$$\begin{aligned} O_q(D_1 e(t), \dots, D_r e(t)) \\ \approx q_1(t)D_1 e(t) + \dots + q_r(t)D_r e(t) \end{aligned} \quad (31)$$

여기서,  $q_1(t), \dots, q_r(t)$  는 시간에 대한 스칼라 함수로서 제한되어 있다. 이와 같이 가정하는 것은  $p=1, \dots, r$  에 대해  $\|D_p e(t=t_0)\|_2$  의 값이 충분히 작다면 의미 있는 가정이 된다. Lemma 1 에서 영 초기 오차로 가정하였으므로 위의 가정은 의미 있는 가정이다.

그리고, 식 (23)에서  $v(t)$  와  $Dy(t-L)$  을 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} v(t) &= Dy_d(t) + K_1 D_1 e(t) + \dots + K_r D_r e(t) \\ Dy(t-L) &= v(t-L) - \varepsilon(t-L) \\ &= Dy_d(t-L) + K_1 D_1 e(t-L) \\ &\quad + \dots + K_r D_r e(t-L) - \varepsilon(t-L) \end{aligned} \quad (32)$$

식 (28),(29),(32)를 식 (23)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \Delta \varepsilon(t-L) + \Delta D \tilde{y}_d + \Delta K_1 (D_1 e(t) - D_1 e(t-L)) \\ &\quad + \dots + \Delta K_r (D_r e(t) - D_r e(t-L)) \\ &\quad + B(t) \tilde{B}^{-1} [Dy_d(t-L) \\ &\quad + K_1 D_1 e(t-L) + \dots + K_r D_r e(t-L) - \varepsilon(t-L)] \\ &\quad - B(t) [\tilde{Q}_d + \tilde{O}_q + \tilde{w}] \end{aligned} \quad (33)$$

여기서,  $\bullet$  는  $\bullet = \bullet(t) - \bullet(t-L)$  을 의미한다. 식 (31)을 이용하여 식 (33)의  $\tilde{O}_q$  를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{O}_q &= O_q(t) - O_q(t-L) \\ &= q_1(t)(D_1 e(t) - D_1 e(t-L)) \\ &\quad + (q_1(t) - q_1(t-L))D_1 e(t-L) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + q_r(t)(D_r e(t) - D_r e(t-L)) \\ &\quad + (q_r(t) - q_r(t-L))D_r e(t-L) \end{aligned} \quad (34)$$

식 (34)를 식 (33)에 대입하고 다음과 같은 Euler 근사법을 식 (33)에 적용하면,

$$\begin{aligned} D_1 e(t) - D_1 e(t-L) &\approx L D_{r,1} e(t-L) \\ &\vdots \\ D_r e(t) - D_r e(t-L) &\approx L D e(t-L) \\ &= L [\varepsilon(t-L) - K_1 D_1 e(t-L) - \dots - K_r D_r e(t-L)] \end{aligned} \quad (35)$$

식 (33)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= (\Delta + L \Delta K_1 - B \tilde{B}^{-1} - L B q_1) \varepsilon(t-L) \\ &\quad + \{L \Delta (K_2 - K_1 K_{r,1}) + B \tilde{B}^{-1} K_1 \\ &\quad + L B q_1 K_1 - L B q_2 - B \tilde{q}_1\} D_1 e(t-L) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \{L \Delta (K_r - K_1 K_{r,1}) + B \tilde{B}^{-1} K_{r,1} \\ &\quad + L B q_1 K_{r,1} - L B q_r - B \tilde{q}_{r-1}\} D_{r,1} e(t-L) \\ &\quad + (-L \Delta K_r K_r + B \tilde{B}^{-1} K_r + L B q_1 K_r - B \tilde{q}_r) D_r e(t-L) \\ &\quad + (\Delta D \tilde{y}_d + B \tilde{B}^{-1} D y_d(t-L) - B \tilde{Q}_d - B \tilde{w}) \end{aligned} \quad (36)$$

식 (36)에서 각 항의 노름(norm)을 고려하여 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \mu &\triangleq \|\Delta + L \Delta K_1 - B \tilde{B}^{-1} - L B q_1\|_{l_2} \\ \delta_1 &\triangleq \|L \Delta (K_2 - K_1 K_{r,1}) + B \tilde{B}^{-1} K_1 + L B q_1 K_1 - L B q_2 - B \tilde{q}_1\|_{l_2} \\ &\quad \vdots \\ \delta_{r-1} &\triangleq \|L \Delta (K_r - K_1 K_{r,1}) + B \tilde{B}^{-1} K_{r,1} + L B q_1 K_{r,1} \\ &\quad - L B q_r - B \tilde{q}_{r-1}\|_{l_2} \\ \delta_r &\triangleq \|-L \Delta K_r K_r + B \tilde{B}^{-1} K_r + L B q_1 K_r - B \tilde{q}_r\|_{l_2} \\ \psi &\triangleq \|\Delta D \tilde{y}_d + B \tilde{B}^{-1} D y_d(t-L) - B \tilde{Q}_d - B \tilde{w}\|_{l_2} \end{aligned} \quad (37)$$

그러면 식 (36)과 (37)로부터 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\|_{l_2} &\leq \mu \|\varepsilon(t-L)\|_{l_2} + \delta_1 \|D_1 e(t-L)\|_{l_2} \\ &\quad + \dots + \delta_r \|D_r e(t-L)\|_{l_2} + \psi \end{aligned} \quad (38)$$

여기서,  $\psi$  는 다음과 같이 제한시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi &\leq \|\Delta\|_{l_2} \|D \tilde{y}_d\|_{l_2} + \|B \tilde{B}^{-1}\|_{l_2} \|D y_d(t-L)\|_{l_2} \\ &\quad + \|B\|_{l_2} (\|\tilde{Q}_d\|_{l_2} + \|\tilde{w}\|_{l_2}) \\ &\triangleq \phi \end{aligned} \quad (39)$$

여기서,  $Dy_d \in L_2^m$  그리고,  $p=1, \dots, r$  에 대해  $D_p y_d \in L_2^m$  과 같이 가정하고  $w \in L_2^m$  과 같이 가정하면  $D \tilde{y}_d \in L_2^m$ ,  $D y_d(t-L) \in L_2^m$ ,  $\tilde{Q}_d \in L_2^m$  그리고  $\tilde{w} \in L_2^m$  이 된다. 따라서  $\phi$  는 한정된 값을 가지게 된다.

식 (38)에서  $\|\bullet\|_{l_2}$  은  $L_2$  공간에서 다음과 같이 정의<sup>(6)</sup> 되므로

$$\|\bullet\|_{l_2} = \left( \int_0^T \|\bullet(t)\|_{l_2}^2 dt \right)^{1/2} \quad (40)$$

$\|\bullet(t-L)\|_{l_2} \leq \|\bullet(t)\|_{l_2}$  이 성립한다.

따라서,  $\|\varepsilon\|_{l_2}$  은 다음과 같이 제한된다.

$$(1-\mu) \|\varepsilon\|_{l_2} \leq \delta_1 \|D_1 e\|_{l_2} + \dots + \delta_r \|D_r e\|_{l_2} + \phi \quad (41)$$

□

**Lemma 3**

일반적인 플랜트에 시간지연을 이용한 제어기법을 적용하는 경우 플랜트의 영점 동역학(zero dynamics)이 지수적으로 안정하다면 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하기 위한 충분조건은

$$\mu + \beta_1 \delta_1 + \dots + \beta_r \delta_r < 1$$

이다.

**Proof :**

식 (41)로부터  $\mu < 1$  라고 가정하면 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\|e\|_{T_2} \leq \frac{1}{1-\mu} [\delta_1 \|D_1 e\|_{T_2} + \dots + \delta_r \|D_r e\|_{T_2} + \phi] \quad (42)$$

그리고,

$$\begin{aligned} \beta_1 \delta_1 &< 1-\mu \\ &\vdots \\ \beta_r \delta_r &< 1-\mu \end{aligned} \quad (43)$$

와 같이 가정하고, 식 (27)과 (42)를 결합하면 다음과 같은 r개의 부등식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \|D_1 e\|_{T_2} &\leq \frac{\beta_1}{1-\mu-\beta_1 \delta_1} [\delta_2 \|D_2 e\|_{T_2} + \dots + \delta_r \|D_r e\|_{T_2} + \phi] \\ &\vdots \\ \|D_r e\|_{T_2} &\leq \frac{\beta_r}{1-\mu-\beta_r \delta_r} [\delta_1 \|D_1 e\|_{T_2} + \dots + \delta_{r-1} \|D_{r-1} e\|_{T_2} + \phi] \end{aligned} \quad (44)$$

위 식을 다음과 같은 행렬형태로 나타낸다.

$$E_T \leq R E_T + V \quad (45)$$

여기서,  $E_T, R, V$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_T &= (\|D_1 e\|_{T_2} \dots \|D_r e\|_{T_2})^T \\ R &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_1 \delta_2}{1-\mu-\beta_1 \delta_1} & \dots & \frac{\beta_1 \delta_r}{1-\mu-\beta_1 \delta_1} \\ \frac{\beta_2 \delta_1}{1-\mu-\beta_2 \delta_2} & 0 & \dots & \frac{\beta_2 \delta_r}{1-\mu-\beta_2 \delta_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_r \delta_1}{1-\mu-\beta_r \delta_r} & \dots & \frac{\beta_r \delta_{r-1}}{1-\mu-\beta_r \delta_r} & 0 \end{pmatrix} \quad (46) \\ V &= \left( \frac{\beta_1 \phi}{1-\mu-\beta_1 \delta_1} \dots \frac{\beta_r \phi}{1-\mu-\beta_r \delta_r} \right)^T \end{aligned}$$

행렬 R의 모든 성분은 음수가 아니므로 다음은 동등하다.<sup>(8)</sup>

- 1) R의 spectral radius는 1보다 작다.
- 2)  $(I-R)^{-1}$ 는 nonnegative matrix이다.
- 3)  $I-R$ 의 leading principal minors는 모두 양이다.

따라서,  $\det(I-R) > 0$ 로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mu + \beta_1 \delta_1 + \dots + \beta_r \delta_r < 1 \quad (47)$$

여기서 주목할 만한 점은 식 (47)을 만족하는 경우에는 가정인  $\mu < 1$ 와 식 (43)이 자동적으로 만족된다는 것이다.

그러면, 식 (47)을 만족하는 경우  $(I-R)^{-1} \geq 0$ 이 되고  $T \rightarrow \infty$ 이면 다음과 같이 된다.

$$E \leq (I-R)^{-1} V \quad (48)$$

여기서,  $E = \lim_{T \rightarrow \infty} E_T$ 이다.

따라서, 식 (47)을 만족하는 경우 플랜트의 영점

동역학이 지수적으로 안정하다라는 조건 하에 원하는 궤적과 그 미분값들에 대하여  $Dy_d \in L_2^m$  그리고,  $p=1, \dots, r$ 에 대해  $D_p y_d \in L_2^m$ 이고 외란  $w \in L_2^m$ 이면  $p=1, \dots, r$ 에 대해  $D_p e \in L_2^m$ 이 된다.

따라서, 식 (47)은 플랜트의 영점 동역학이 지수적으로 안정하다라는 조건 하에 일반적인 플랜트에 대한 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하기 위한 충분조건이 된다.  $\square$

이제 다음과 같은 시간지연을 이용한 제어기법의 충분 안정 이론을 이끌어 낼 수 있다.

**Theorem.**

영점 동역학(zero dynamics)이 지수적으로 안정한 플랜트에 시간지연을 이용한 제어기법을 적용하는 경우 다음의 1,2,3의 가정 하에

1. 원하는 궤적  $y_d$  과 그 미분값들에 대하여  $Dy_d \in L_2^m$  그리고  $D_p y_d \in L_2^m$  ( $p=1, \dots, r$ ).
2. 외란  $w \in L_2^m$ .
3.  $p=1, \dots, r$ 에 대해  $\|D_p e(t=t_0)\|_2 = 0$ .

식 (47)을 만족하면 전체 페루프 제어시스템은  $L_2$  안정(stable)하다.

**Proof:**

식 (47)이 만족된다면 lemma 3을 통하여 영점 동역학이 지수적으로 안정한 플랜트와 시간지연을 이용한 제어기법으로 구성된 전체 페루프 제어시스템은  $L_2$  안정(stable)하게 된다.  $\square$

**3.2 안정성 기준**

위의 절에서 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하기 위한 충분조건을 구하였다. 이 조건으로부터  $\|I-B\bar{B}^{-1}\| < a$ 와 같은 형태의 안정성 기준을 유도하면 다음과 같다.

$$\|I-B\bar{B}^{-1}\|_{12} < \frac{1-c}{1+L(\lambda_1 + \beta_1 \lambda_{11} + \dots + \beta_{r-1} \lambda_{r-1} + \beta_r \lambda_1 \lambda_r)} \quad (49)$$

여기서,  $p=1, \dots, r$ 에 대해  $\|K_p\|_{12} \triangleq \lambda_p$ 로 정의하고  $\|K_2 - K_1 K_1\|_{12} \triangleq \lambda_{11}, \dots, \|K_r - K_1 K_{r-1}\|_{12} \triangleq \lambda_{r-1}$ 과 같이 정의한다. 그리고  $c$ 는 식 (50)과 같다.

$$c = c_0 + \beta_1 c_1 + \dots + \beta_r c_r \quad (50)$$

또한  $c_0, \dots, c_r$ 은 식 (52)와 같다.

유도과정:

식 (37)에서 정의한  $\mu$ 와  $\delta_i$ 는 다음과 같이 제한시킬 수 있다. 식 (51)의  $\Delta$ 은 식 (28)에서 정의하였듯이  $\Delta = I - B\bar{B}^{-1}$ 이다.

$$\begin{aligned} \mu &\leq \|\Delta\|_{l_2} (1 + L\|K_1\|_{l_2}) + c_0 \\ \delta_1 &\leq L\|\Delta\|_{l_2} \|K_2 - K_1 K_1\|_{l_2} + c_1 \\ &\vdots \\ \delta_{r-1} &\leq L\|\Delta\|_{l_2} \|K_r - K_1 K_{r-1}\|_{l_2} + c_{r-1} \\ \delta_r &\leq L\|\Delta\|_{l_2} \|K_1\|_{l_2} \|K_r\|_{l_2} + c_r \end{aligned} \tag{51}$$

여기서,  $c_0, \dots, c_r$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_0 &= \|\bar{B}\bar{B}^{-1} - LBq_1\|_{l_2} \\ c_1 &= \|\bar{B}\bar{B}^{-1}K_1 + LBq_1K_1 - LBq_2 - B\tilde{q}_1\|_{l_2} \\ &\vdots \\ c_{r-1} &= \|\bar{B}\bar{B}^{-1}K_{r-1} + LBq_1K_{r-1} - LBq_r - B\tilde{q}_{r-1}\|_{l_2} \\ c_r &= \|\bar{B}\bar{B}^{-1}K_r + LBq_1K_r - B\tilde{q}_r\|_{l_2} \end{aligned} \tag{52}$$

식 (51)를 식 (47)의 좌측 항에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\mu + \beta_1\delta_1 + \dots + \beta_r\delta_r \\ &\leq \|\Delta\|_{l_2} (1 + L\lambda_1 + L\beta_1\lambda_1 \\ &\quad + \dots + L\beta_{r-1}\lambda_{r-1} + L\beta_r\lambda_1\lambda_r) \\ &\quad + c_0 + \beta_1c_1 + \dots + \beta_rc_r \end{aligned} \tag{53}$$

따라서, 식 (53)의 우측 항이 1보다 작다면 식 (47)을 만족하여 안정성을 보장할 수 있게 된다. 식 (53)의 우측 항이 1보다 작다는 조건식을 정리하면, 식 (49)와 같은 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하기 위한  $\bar{B}$ 의 범위를 구할 수 있다. □

3.3 예를 통한 안정성 기준의 적용 방법

3.2 절에서 시간지연을 이용한 제어시스템의 안정성 기준으로서  $\bar{B}$ 의 범위를 제시하였다. 이 절에서는 예를 통하여 실제적으로  $\bar{B}$ 의 범위를 구하는 과정을 설명하려 한다.

설명의 편의상  $i=1, \dots, m$ 에 대하여  $r_i=r$ 인 즉, 각 출력성분의 상대차수가 최대상대차수와 같은 경우 그리고  $K_1, \dots, K_r$  대각상수행렬은 임계감쇠가 되도록 그리고 모든 대각성분이 같도록 둔 경우에 대해서 다룬다. 그러면 Lemma 1 으로부터  $p=1, \dots, r$ 에 대해  $\beta_p = 1/\eta_p k_p$ 이 된다. 여기서  $k_p$ 는  $K_p$ 의 대각성분을 나타내고  $\eta_p$ 는 최대상대차수  $r$ 에 의해 결정되는 계수값이다. 그리고 식 (50)의  $c$ 는  $c = c_0 + c_1/\eta_1 k_1 + \dots + c_r/\eta_r k_r$ 와 같이 된다.

식 (52)에서  $\ddot{\bullet}$ 는  $\ddot{\bullet} = \bullet(t) - \bullet(t-L)$ 을 의미하므로

$\dot{\bullet} \left( = \frac{d\bullet}{dt} \right)$ 가 제한되어 있다면  $\ddot{\bullet} \approx L\dot{\bullet}$ 으로 나타낼 수 있다. 이를 이용하여 식 (52)의  $c_0, \dots, c_r$ 을 다음과 같이 제한시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} c_0 &\leq L\|B\|_{l_2} (\|\bar{B}^{-1}\|_{l_2} + \|q_1\|_{l_2}) \\ c_1 &\leq k_1 L\|B\|_{l_2} (\|\bar{B}^{-1}\|_{l_2} + \|q_1\|_{l_2}) + L\|B\|_{l_2} (\|q_2\|_{l_2} + \|\dot{q}_1\|_{l_2}) \\ &\vdots \\ c_{r-1} &\leq k_{r-1} L\|B\|_{l_2} (\|\bar{B}^{-1}\|_{l_2} + \|q_1\|_{l_2}) + L\|B\|_{l_2} (\|q_r\|_{l_2} + \|\dot{q}_{r-1}\|_{l_2}) \\ c_r &\leq k_r L\|B\|_{l_2} (\|\bar{B}^{-1}\|_{l_2} + \|q_1\|_{l_2}) + L\|B\|_{l_2} \|\dot{q}_r\|_{l_2} \end{aligned} \tag{54}$$

여기서,  $k_1, \dots, k_r$ 을 다음과 같이 선정하면

$$\begin{aligned} k_1 &\gg \frac{1}{\eta_1} L\|B\|_{l_2} (\|q_2\|_{l_2} + \|\dot{q}_1\|_{l_2}) \\ &\vdots \\ k_{r-1} &\gg \frac{1}{\eta_{r-1}} L\|B\|_{l_2} (\|q_r\|_{l_2} + \|\dot{q}_{r-1}\|_{l_2}) \\ k_r &\gg \frac{1}{\eta_r} L\|B\|_{l_2} \|\dot{q}_r\|_{l_2} \end{aligned} \tag{55}$$

$c$ 는 근사적으로 다음과 같이 제한된다.

$$c \leq \left(1 + \sum_{i=1}^r \frac{1}{\eta_i}\right) L\|B\|_{l_2} (\|\bar{B}^{-1}\|_{l_2} + \|q_1\|_{l_2}) \tag{56}$$

식 (49)로부터 다음과 같은 식이 만족되도록

$$\begin{aligned} &1 + L(\lambda_1 + \beta_1\lambda_{11} + \dots + \beta_{r-1}\lambda_{1r-1} + \beta_r\lambda_1\lambda_r) \\ &\gg \left(1 + \sum_{i=1}^r \frac{1}{\eta_i}\right) L\|B\|_{l_2} (\|\bar{B}^{-1}\|_{l_2} + \|q_1\|_{l_2}) \end{aligned} \tag{57}$$

$\lambda, \beta$ 를 선정한다면 즉,  $k_1, \dots, k_r$ 을 선정한다면 안정성 기준 즉, 안정하기 위한  $\bar{B}$ 의 범위를 다음과 같이 근사화시킬 수 있다.

$$\|I - B\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < \frac{1}{1 + L(\lambda_1 + \beta_1\lambda_{11} + \dots + \beta_{r-1}\lambda_{1r-1} + \beta_r\lambda_1\lambda_r)} \tag{58}$$

즉,  $k_1, \dots, k_r$ 을 식 (55)와 식 (57)을 만족하도록 선정하면 안정성 기준을 식 (58)과 같이 나타낼 수 있다.

$r=2$ 인 경우  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ 이 되고  $\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2, \lambda_{11} = 0.75k_1^2$ 이 된다.  $k_1, k_2$ 를 식 (55)와 식 (57)을 만족하도록 선정하면  $r=2$ 인 경우 안정성 기준은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|I - B\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < \frac{1}{1 + 2.75k_1L} \tag{59}$$

$r=4$ 인 경우는  $\eta_1 = 4/3\sqrt{3}, \eta_2 = 2/3$



$\eta_3 = 4/3\sqrt{3}$ ,  $\eta_4 = 1$  이 되고  $\lambda_1 = k_1$ ,  $\lambda_2 = k_2$ ,  
 $\lambda_3 = k_3$ ,  $\lambda_4 = k_4$  그리고  $\lambda_{11} = \frac{5}{8}k_1^2$ ,  $\lambda_{12} = \frac{5}{6}k_1k_2$ ,  
 $\lambda_{13} = \frac{15}{16}k_1k_3$  가 된다.  $k_1, \dots, k_4$  를 식 (55)와 식 (57)  
 을 만족하도록 선정하면  $r=4$  인 경우 안정성 기  
 준은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|I - B\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < \frac{1}{1 + 5.2797k_iL} \quad (60)$$

#### 4. 모의 실험

3 장에서 일반적인 플랜트에 대해 시간지연을  
 이용한 제어기법을 적용하는 경우 안정성 해석을  
 통하여 안정하기 위한 충분조건을 유도하고 이로  
 부터 안정성 기준을 제시하였다.

이 장에서는 다음의 두가지 모의 실험을 통하  
 여 3 장에서 제시한 안정성 기준을 만족하도록  $\bar{B}$   
 를 선정하여 시간지연을 이용한 제어기법을 설계  
 하고 이를 대상 플랜트에 적용하였을 때 안정한  
 응답을 보이는 지를 살펴보도록 하겠다.

다음의 두가지 모의 실험에서는 3.3 절에서 예로든  
 즉,  $i=1, \dots, m$  에 대하여 각 출력성분의 상대차수가  
 최대상대차수와 같고( $r_i = r$ )  $K_1, \dots, K_r$  대각상수행렬  
 은 임계값이하가 되고 모든 대각성분을 같도록 둔 경  
 우에 대해서 다룬다. 그리고  $k_1, \dots, k_r$  을 식 (55)와 식  
 (57)을 만족하도록 선정하여 안정성 기준 즉, 안정하  
 기 위한  $\bar{B}$ 의 범위로서 식 (58)을 이용한다.

##### 4.1.6 자유도 매니플레이터

이 절에서는 6 자유도 매니플레이터(PUMA560)<sup>(9)</sup>  
 를 대상 플랜트로 하여 3 장에서 제시한 안정성  
 기준을 검증하려 한다.

이 6 자유도 매니플레이터의 관절토크벡터  
 $r \in \mathbb{R}^6$  는 플랜트의 입력이 되고 플랜트의 출력으  
 로서 관절변위벡터  $\theta \in \mathbb{R}^6$  를 취하였을 때 입출력  
 선형화하면 플랜트의 영점 동역학은 존재하지 않  
 으며  $i=1, \dots, 6$  에 대해  $r_i = r=2$  가 되어 안정성  
 기준으로서 식 (59)를 이용한다.

$\bar{B}^{-1} = \alpha I_{6 \times 6}$  로 두었을 때  $\alpha$  에 대해서  $\|I - B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2}$   
 을 플랜트의 작동범위내의 모든 상태벡터  
 $x = (\theta \ \dot{\theta})^T$  에 대해서 도시하면 Fig. 3 의 실선과  
 같다.

여기서  $B(x)$ 는 입출력 선형화 하였을 때 매니플

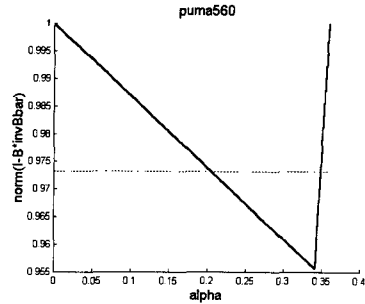


Fig. 3  $\|I - B\bar{B}^{-1}\|_{l_2}$  plot for PUMA560 manipulator

레이터의 관성행렬  $M(\theta)$  의 역행렬에 해당한다.  
 그리고  $M(\theta)$  는 Brian Armstrong et al. 의 논문<sup>(9)</sup>을  
 참조 하였다. Fig. 3 의 점선은 식 (59)에서 시간지  
 연  $L=0.001$  sec 이고  $k_1=10$  인 경우의 안정하기 위  
 한  $\bar{B}$  의 범위의 경계값을 나타낸다. 즉,  
 $\|I - B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 0.9732$  인 경계값을 나타낸다. 그리고,  
 Fig. 4 는 시간지연을 이용한 제어기법에서 원하는  
 궤적과 그 미분값들이  $L_2$  공간상에 있도록 즉,  
 $y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d \in L_2^6$  이 되도록  $y_{di} = e^{-(\pi t/2)} \sin(\pi t/2)$   
 ( $i=1, \dots, 6$ )와 그 미분값들로  $y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d$  을 정하고 시  
 간지연  $L=0.001$  sec 이고  $k_1=10, k_2=25$  인 경우에  
 대한 모의 실험결과이다. 여기서, Youcef-Toumi 는  
 안정하기 위한 충분조건으로서  $\|I - B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 1$  를  
 제시하였다. 그러나, Fig. 4(a)의 모의 실험결과에서  
 보듯이  $\|I - B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 1$  를 만족하는  $\bar{B}^{-1} = \alpha I_{6 \times 6}$   
 ( $\alpha=0.01$ ) 에 대해서 불안정한 응답(unstable  
 responses)을 보이는 것을 알 수 있다. 이는  
 Youcef-Toumi 가 제안한 안정하기 위한 충분조건  
 $\|I - B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 1$  는 시간지연  $L \rightarrow 0$  인 조건 하에서  
 만 안정하기 위한 충분조건으로서 사용될 수 있기  
 때문이다. 즉, Fig. 4(a)의 모의 실험에서 사용된 시  
 간지연  $L=0.001$  sec 은 충분히 작은 시간 지연이  
 며 뿐만 아니라 Youcef-Toumi 가 제안한 안정하기  
 위한 충분조건을 만족하도록  $\bar{B}$  를 선정하였음에도  
 불구하고 불안정한 응답을 보인다. 따라서 시간지  
 연  $L$  이 작기는 하나 한정된 값을 갖는 경우 즉  
 $L$  이 무한히 작은 경우가 아닐 경우에는 식 (59)  
 에서 제시한 안정성 기준을 만족시켜야만 한다는  
 것을 Fig. 4 의 모의 실험결과로부터 알 수 있다.

여기서, Fig. 4(b)와 (c)는 각각 안정하기 위한  $\bar{B}$   
 의 범위의 경계값 즉,  $\|I - B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 0.9732$  인 경계  
 값 근처에서  $\bar{B}^{-1} = \alpha I_{6 \times 6}$  ( $\alpha=0.2, \alpha=0.35$ ) 를 선정하

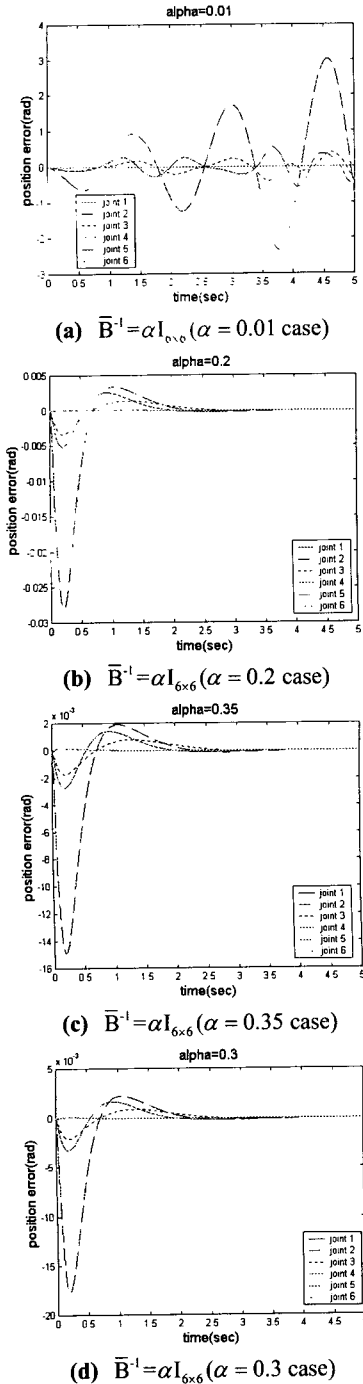


Fig. 4 Simulation for PUMA560 manipulator

경우의 모의 실험결과이다. 이 결과로부터  $\bar{B}^{-1} = \alpha I_{6 \times 6}$  ( $\alpha = 0.2, \alpha = 0.35$ ) 인 경우 시간지연을 이용한 제어시스템이  $L_2$  안정한 것을 알 수 있다.

또한 Fig. 4(d)는  $\|I-B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 0.9732$  을 만족하

는 임의의  $\bar{B}^{-1} = \alpha I_{6 \times 6}$  ( $\alpha = 0.3$ ) 에 대한 모의 실험결과이다. 이 경우도  $\|I-B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 0.9732$  를 만족하므로 예상과 같이 시간지연을 이용한 제어시스템이  $L_2$  안정하다.

4.2.2 링크 유연관절 로봇

이 절에서는 2 링크 유연관절 로봇(2 link flexible joint robot)을 대상플랜트로 하여 안정성 기준을 검정하려 한다.

유연관절 로봇의 동역학 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(10)</sup>

$$M(\theta)\ddot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta_m - \theta) \tag{61}$$

$$J\ddot{\theta}_m + C\dot{\theta}_m + K(\theta_m - \theta) = u$$

여기서,  $u$  는  $n \times 1$  입력벡터,  $\theta$  는  $n \times 1$  링크 변위 벡터,  $\theta_m$  은  $n \times 1$  구동기 변위 벡터를 나타내고  $M(\theta)$  는  $n \times n$  링크 관성행렬,  $N(\theta, \dot{\theta})$  은 코리올리력, 원심력, 중력, 감쇠력 그리고 마찰력을 나타내는  $n \times 1$  벡터이다. 그리고,  $K$  는  $n \times n$  대각상수행렬로서 양한정(positive-definite) 관절 유연성 행렬,  $J$  는  $n \times n$  대각상수행렬로서 양한정 구동기 관성행렬 그리고  $C$  는  $n \times n$  대각상수행렬로서 양한정 구동기 감쇠행렬을 나타낸다.

이 절의 대상플랜트는 2 링크 유연관절 로봇으로서 식 (61)에서 강체 링크의 동역학 식은 평면 2 자유도 매니플레이터<sup>(11)</sup>를 취하였고  $J = 0.5I_{2 \times 2} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $C = I_{2 \times 2} \text{ Nm} \cdot \text{s} / \text{rad}$  그리고  $K = 10I_{2 \times 2} \text{ Nm} / \text{rad}$  을 각각 취하였다.

이 플랜트의 입력은  $u \in \mathcal{R}^2$  이고 출력으로서 링크 변위 벡터  $\theta \in \mathcal{R}^2$  를 취하였을 때 입출력 선형화하면 플랜트의 영점 동역학은 존재하지 않으며  $i=1,2$  에 대해  $r_i = r = 4$  가 되어 안정성 기준으로서 식 (60)을 이용한다.

$\bar{B}^{-1} = \alpha I_{2 \times 2}$  로 두었을 때  $\alpha$  에 대해서  $\|I-B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2}$  을 플랜트의 작동범위내의 모든 상태벡터  $x = (\theta \ \dot{\theta} \ \theta_m \ \dot{\theta}_m)^T$  에 대해서 도시하면 Fig. 5 의 실선과 같다. 여기서  $B(x)$  는 입출력 선형화 하였을 때  $B(x) = M(\theta)^{-1} K J^{-1}$  이다. Fig. 5 의 점선은 식 (60)에서 시간지연  $L = 0.0005 \text{ sec}$  이고  $k_f = 20$  인 경우의 안정하기 위한  $\bar{B}$  의 범위의 경계값을 나타낸다. 즉,  $\|I-B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 0.95$  인 경계값을 나타낸다.

그리고, Fig. 6 은 시간지연을 이용한 제어기법에서 원하는 궤적과 그 미분값들이  $L_2$  공간상에 있도록 즉,  $y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d, y_d^{(3)}, y_d^{(4)} \in L_2^2$  이 되도록

$y_{di} = e^{-(\pi i/2)} \sin(\pi t/2)$  ( $i=1,2$ ) 와 그 미분값들로  $y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d, y_d^{(3)}, y_d^{(4)}$  을 정하고 시간지연  $L=0.0005$  sec 이고  $k_1=20, k_2=150, k_3=500, k_4=625$  인 경우에 대한 모의 실험결과이다.

Fig. 4(a)의 모의 실험결과와 유사하게 시간지연  $L=0.0005$  sec 과 같이 충분히 작은 시간 지연임에도 불구하고 Fig. 6(a)에서 보듯이  $\|I-B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 1$  를 만족하는  $\bar{B}^{-1}=\alpha I_{2 \times 2}$  ( $\alpha=0.001$ ) 에 대해서 불안정한 응답(unstable responses)을 보이는 것을 알 수 있다. 이로부터 다시 한번 Youcef-Toumi 가 제안한 안정하기 위한 충분조건  $\|I-B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 1$  는 시간지연  $L \rightarrow 0$  의 경우에만 안정하기 위한 충분조건으로서 적용될 수 있음을 알 수 있다. 그리고, Fig. 6(b)와 (c)는 각각 안정하기 위한  $\bar{B}$  의 범위의 경계값 즉,  $\|I-B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 0.95$  인 경계값 근처에서  $\bar{B}^{-1}=\alpha I_{2 \times 2}$  ( $\alpha=0.0328, \alpha=0.0469$ ) 를 선정한 경우의 모의 실험결과이다. Fig. 4 의 경우와 유사하게  $\bar{B}^{-1}=\alpha I_{2 \times 2}$  ( $\alpha=0.0328, \alpha=0.0469$ ) 인 경우 시간지연을 이용한 제어시스템이  $L_2$  안정한 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 6(d)는  $\|I-B(x)\bar{B}^{-1}\|_{l_2} < 0.95$  을 만족하는 임의의  $\bar{B}^{-1}=\alpha I_{2 \times 2}$  ( $\alpha=0.04$ ) 인 경우의 모의 실험결과이다. 이 경우도 예상과 같이 시간지연을 이용한 제어시스템이  $L_2$  안정하다.

이 모의 실험에서도 시간지연  $L=0.0005$  sec 과 같이 충분히 작은 시간지연에서도 Youcef-Toumi 가 제안한 안정하기 위한 충분조건을 만족하도록  $\bar{B}$  를 선정하였음에도 불구하고 불안정한 응답을 보이는 경우를 볼 수 있었다. 따라서 이 절의 모의 실험결과로부터도 시간지연  $L$  이 작기는 하나 한정된 값을 갖는 즉, 시간지연  $L$  이 무한히 작은 경우가 아닐 경우에는 식 (60)에서 제시한 안정성 기준을 만족하여야만 한다는 것을 알 수 있다.

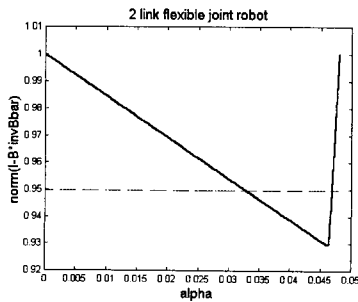
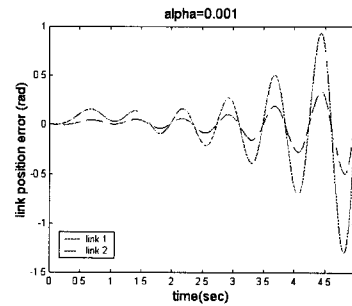
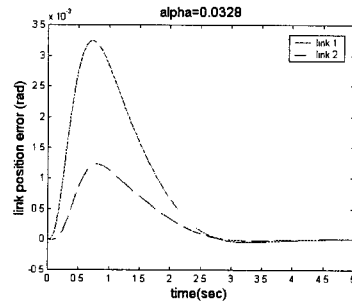


Fig. 5  $\|I-B\bar{B}^{-1}\|_{l_2}$  plot for 2 link flexible joint robot

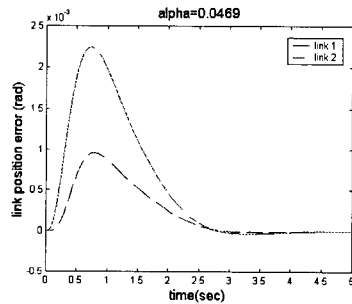
따라서, 두 경우에 대한 모의 실험결과로부터 이 연구에서 제시한 안정성 기준은 시간지연  $L$  이 한정된 값을 갖는 실제의 경우에 시간지연을 이용한 제어기법을 안정하게 설계 할 수 있는 기준이 됨을 알 수 있다.



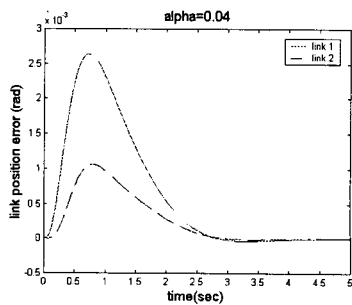
(a)  $\bar{B}^{-1}=\alpha I_{2 \times 2}$  ( $\alpha=0.001$  case)



(b)  $\bar{B}^{-1}=\alpha I_{2 \times 2}$  ( $\alpha=0.0328$  case)



(c)  $\bar{B}^{-1}=\alpha I_{2 \times 2}$  ( $\alpha=0.0469$  case)



(d)  $\bar{B}^{-1}=\alpha I_{2 \times 2}$  ( $\alpha=0.04$  case)

Fig. 6 Simulation for 2 link flexible joint robot

## 5. 결 론

본 연구에서는 일반적인 플랜트에 대한 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하기 위한 충분조건을 유도하고 이로부터 안정성 기준 즉, 안정하기 위한  $\bar{B}$ 의 범위를 제시하였다.

기존의 안정하기 위한 충분조건은 Youcef-Toumi가 제시한  $\|I-B\bar{B}'\| < 1$ 라는 것이었다. 그러나 이와 같은 안정조건은 시간지연  $L$ 이  $L \rightarrow 0$ 의 조건하에서만 안정하기 위한 충분조건으로서 적용 가능하다. 즉, 모의 실험결과로부터도 살펴 본 바와 같이 시간지연  $L$ 이 충분히 작음에도 불구하고  $\|I-B\bar{B}'\| < 1$ 의 조건을 만족시키더라도 불안정한 경우를 볼 수 있었다. 따라서 시간지연  $L$ 이 무한히 작은 경우가 아닌 실제의 경우에는 이 연구에서 제안한 안정성 기준을 만족하여야만 시간지연을 이용한 제어시스템이 안정하다라는 것을 알 수 있었다.

결론적으로 본 연구에서 제안한 안정성 기준이 시간지연  $L$ 이 한정된 값을 갖는 실제의 경우 시간지연을 이용한 제어기법을 안정하게 설계할 수 있는 기준 된다고 말할 수 있다. 이는 6 자유도 매니퓰레이터와 2 링크 유연관절 로봇의 모의실험 결과로부터도 검증할 수 있었다.

## 후 기

본 연구는 과학재단(KOSEF)에서 후원 받아 한국과학기술원(KAIST)에서 수행하는 인간친화 복지 로봇시스템 연구센터(Human-friendly Welfare Robot System Engineering Research Center)의 지원을 받아 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Youcef-Toumi, K. and Osamu Ito, 1990, "A Time Delay Controller for Systems with Unknown Dynamics," *Trans. Of ASME, J. Dyn. Sys., Meas., Contr*, Vol. 112, No. 1, pp. 133~142.
- (2) Youcef-Toumi, K. and Reddy, S., 1992, "Analysis of Linear Time Invariant System with Time Delay," *Trans. Of ASME, J. Dyn. Sys., Meas., Contr*, Vol. 114, pp. 544~555.
- (3) Youcef-Toumi, K. and Bobbett, J., 1991, "Stability of Uncertain Linear Systems With Time Delay," *Trans. Of ASME, J. Dyn. Sys., Meas., Contr*, Vol. 113, pp. 558~567.
- (4) Youcef-Toumi, K. and Wu, S.-T., 1992, "Input/Output Linearization using Time Delay Control," *Trans. Of ASME, J. Dyn. Sys., Meas., Contr*, Vol. 114, pp. 10~19.
- (5) Jean-Jacques, E. Slotine and Weiping Li, 1991, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall International, Inc.
- (6) Vidyasagar, M., 1993, *Nonlinear Systems analysis*, 2ed, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- (7) Craig, John J., 1988, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators*, Addison-Wesley Publishing Company.
- (8) Spong, Mark W. and Vidyasagar, M., 1987, "Robust Linear Compensator Design for Nonlinear Robotic Control," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, NO. 4, pp. 345~351.
- (9) Brian Armstrong, Oussama Khatib and Joel Burdick, 1986, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 arm," *IEEE Int. Conference on Robotics and Automations*, pp. 510~518.
- (10) Spong, Mark W., 1987, "Modeling and Control of Elastic Joint Robots," *Trans. Of ASME, J. Dyn. Sys., Meas., Contr*, Vol. 109, pp. 310~319.
- (11) Hsia, T. C. and Gao, L. S., 1990, "Robot Manipulator Control using Decentralized Linear Time-Invariant Time-Delayed Joint Controllers," *IEEE Int. Conference on Robotics and Automations*, pp. 2070~2075.