

信賴性應用研究

제2권, 제2호, pp. 113-120, 2002

## 불균등 구간검사를 이용한 지수수명시간의 추정

이태섭\*, 윤상운\*\*

\* 안양대학교 정보통계학과, \*\* 연세대학교 응용통계학과

## Exponential Lifetime Estimation with Unequal Interval Censoring

TaiSup Lee\*, SangUn Yun\*\*

\* Department of Informational Statistics, Anyang University

\*\* Department of Applied Statistics, Yonsei University

### Abstract

The estimation of mean lifetimes in presence of interval censoring with replacement procedure are examined when the distributions of lifetimes are exponential. It is assumed that, due to physical restrictions and/or economic constraints, the number of failures is investigated only at several inspection times during the lifetime test. The maximum likelihood estimator is found in an implicit form. The Cramer-Rao lower bounds of the estimates are found in places of variances and by simulations the properties of the estimates are examined.

## 1. 서론

수명시간 추정을 위한 가장 이상적인 방법은 실험대상을 연속적으로 관찰하여 부품 또는 제품의 정확한 수명시간을 파악하는 방법일 것이다. 그러나 이를 위해서는 너무 과도한 실험비용과 시간이 요구되므로 요즘과 같이 제품의 신뢰성이 높은 경우에는 현실적이지 못한 방법이라 할 수 있다. 따라서 보드만(Boardman, 1973) 등의 구간검사(interval censoring)와 넬슨(Nelson, 1990) 등의 가속검사(accelerated testing)에서 알 수 있듯이 수명검사에 있어 시험비용을 절감하고 또한 시험의 편의성을 제고하기 위한 여러 가지 방법들이 도입된 바 있다.

한편 전체 시험기간 중 몇몇 특정한 시점에서만 고장품을 관찰하는 구간검사는 각 검사시점에서 관찰된 고장품을 단순히 제거할 것인지, 아니면 새 것으로 교체할 것인지에 따라 각각 비복원(without replacement) 및 복원(with replacement) 검사로 구분된다. 또한 검사구간의 크기가 모두 동일한가의 여부에 따라 균등 및 불균등 구간검사로도 구분될 수 있다. 비복원검사의 예는 웨이와 바우(Wei and Bau, 1987) 등에서 볼 수 있으며, 최근 이태섭과 싱(Singh, 1999) 및 이태섭과 윤상운(2001)에서는 복원검사와 비복원검사를 결합한 혼합복원(mixed replacement)검사를 다루기도 하였다.

이 논문에서는 수명시간이 지수분포를 따른다는 가정하에 복원모형을 적용하며 검사구간의 크기가 모두 동일하지는 않은 불균등 구간검사를 다룬다. 먼저 불균등 구간검사를 적용하여 평균수명시간에 대한 최우추정량을 도출한 후, 모의실험을 통하여 시험시간, 시험대상물의 수, 검사구간의 크기 및 불균등 정도를 달리하며 추정량의 특성이 어떻게 변화하는지를 알아 보기로 한다.

## 2. 최우추정량

먼저 이 논문에서 적용하는 불균등 구간검사과정을 간략하게 서술하기로 한다. 수명시간의 추정을 위하여 임의의 검사시점  $\tau_j (j = 1, \dots, I)$ 에서  $n$ 개의 시험대상물을 관찰하여 각 검사구간에서의 고장품의 수  $r_j$ 를 파악한다. 그리고 각 검사시점에서는 고장이 발생한 시험대상물을 새 것으로 교체한 후 미리 정한 시험시간  $T$ 까지 이러한 과정을 반복하는 복원검사를 적용하는데, 각 검사시점과 시험시간의 관계는 다음과 같다.

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_I = T.$$

따라서 이 검사에서는 모두  $I$ 개의 검사구간이 존재하게 되며, 각 검사구간의 크기  $\Delta_j$ 는 다음과 같다.

$$\Delta_j = \tau_j - \tau_{j-1}, \quad j=1, \dots, I.$$

여기서는 시험대상물의 수명시간이 다음과 같이 모수  $\theta$ 를 갖는 지수분포를 따른다고 가정한다.

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad \theta > 0, \quad x > 0.$$

그러면  $j$ 번째 검사구간에서  $n$ 개의 시험대상물 중에서  $r_j$ 개의 고장품이 발생할 확률은 다음과 같이 이항분포의 확률로서 나타나는데

$$\frac{n!}{r_j!(n-r_j)!} \left(1 - e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}\right)^{r_j} \left(e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}\right)^{n-r_j},$$

이의 우도함수를 구하면 다음과 같다.

$$L = \prod_{j=1}^I \frac{n!}{r_j!(n-r_j)!} \left(1 - e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}\right)^{r_j} \left(e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}\right)^{n-r_j}.$$

위의 우도함수에 대수를 취한 후  $\theta$ 에 대한 1차 도함수를 구하면

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta^2} \sum_{j=1}^I \frac{r_j \Delta_j e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}}{1 - e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{j=1}^I (n-r_j) \Delta_j$$

가 되며, 이를 정리하면 다음의 최우추정량을 얻게 된다.

$$\sum_{j=1}^I \frac{r_j \Delta_j}{1 - e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}} - nT = 0.$$

여기서의 최우추정량은 음함수 형태로 구해졌으나, 최우추정량의  $\theta$ 에 대한 1차 및 2차 도함수가 항상 양수임을 증명할 수 있다. 따라서 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson)에 의한 반복적인 방법 또는 뎀프스터 등(Dempster et al.)이 제안한 EM 알고리즘 등에 의하여 유일한 해를 구할 수 있게 된다.

### 3. 최우추정량의 분산

이제 앞에서 구한 최우추정량의 특성을 살펴 보기로 한다. 추정량의 특성으로는 분산을 고려하는 것이 일반적이겠으나, 여기서는 추정량의 형태가 음함수인 관계로 크레이머-라오 하한(Cramer-Rao Lower Bound : CRLB)을 구하기로 한다. 먼저 대수우도함수의 2차 도함수를 구한 결과는 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{2}{\theta^3} \sum_{j=1}^I \frac{r_j \Delta_j}{1 - e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}} - \frac{1}{\theta^4} \sum_{j=1}^I \frac{r_j \Delta_j^2 e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}}{\left(1 - e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}\right)^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{j=1}^I (n - r_j) \Delta_j.$$

크레이머-라오 하한을 얻기 위해서는 위의 2차 도함수에 대한 기대값을 구해야 하는데, 이를 위하여 먼저 이항분포를 따르게 되는  $j$ 번째 검사구간에서의 고장품 수  $r_j$ 에 대한 기대값을 계산하면 다음과 같다.

$$E(r_j) = n \left(1 - e^{-\frac{\Delta_j}{\theta}}\right), \quad j = 1, \dots, I.$$

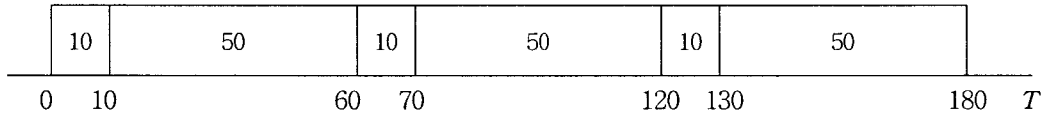
이를 이용하여 2차 도함수의 기대값을 계산한 후 최우추정량의 크레이머-라오 하한을 구한 결과는 다음과 같다.

$$CRLB(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta}^4}{n} \left[ \sum_{j=1}^I \frac{\Delta_j^2}{e^{\frac{\Delta_j}{\hat{\theta}}} - 1} \right]^{-1}.$$

### 4. 추정의 예

여기서는 앞에서 구한 최우추정량에 의하여 실제로 얼마나 모수에 근접한 추정값을 구할 수 있는지를 알아 보고, 추정량의 크레이머-라오 하한이 시험대상물의 수, 시험시간, 검사구간의 크기 및 불균등 정도에 따라 어떻게 변화하는지를 모의실험을 통하여 살펴 보기로 한다. 이를 위하여 먼저 수명모수  $\theta$ 를 120으로 가정한 후, 각 검사구간에서의 고장품 수  $r_j$ 를 임의로 발생시킨다. 시험대상물의 수  $n$ 은 100과 200의 두 가지로 하고, 전체 시험시간  $T$ 는 60간격으로 60부터 360까지를 고려한다. 한편 검사구간의 수와 불균등 정도에 따른 차이를 비교하기 위하여 검사구간을 동일한 수로 구성되는 두 가지 형태의 불균등 검사구간인 (1:5), (10:50), (2:4) 그리고 (20:40) 등의 네 가지로 구분하였다.

이 때, 시험시간이 180인 경우에 있어 불균등 검사구간 (10:50)이란 다음의 <그림 1>에서 보는 바와 같이 구간의 크기가 각각 10과 50인 검사구간이 차례로 세 번씩 반복되어 구성됨을 의미한다.



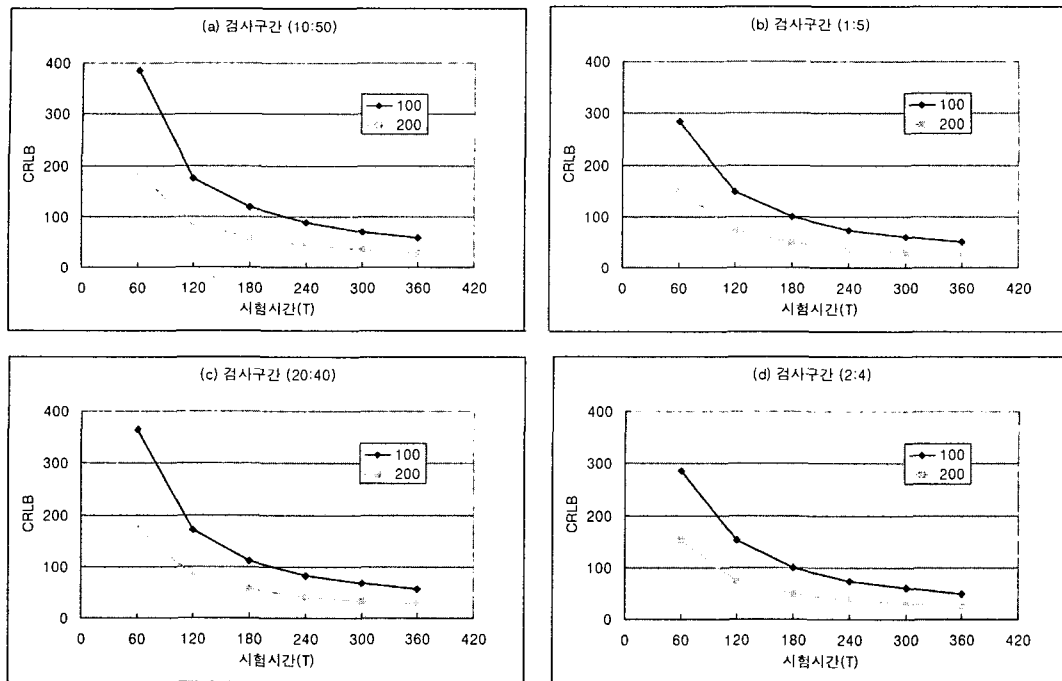
<그림 1> 불균등 검사구간 (10:50)의 구성

그러면 추정값의 유연성을 줄이기 위하여 각각의 경우에 있어 100번씩의 반복 추정값을 구한 후, 추정값의 평균과 크레이머-라오 하한(CRLB)을 계산한 결과는 다음의 <표 1>과 같다.

<표 1> 불균등 검사구간에 따른 추정값과 CRLB

구분	T	(10:50)		(1:5)		(20:40)		(2:4)	
		n=100	n=200	n=100	n=200	n=100	n=200	n=100	n=200
$\hat{\theta}$	60	124.6	122.9	118.7	121.4	124.0	122.0	119.2	121.6
	120	120.2	120.1	120.5	119.6	121.5	120.1	121.5	119.9
	180	121.0	120.0	120.7	120.5	119.9	120.6	120.8	120.6
	240	120.8	119.5	120.1	121.1	120.1	119.8	120.5	120.9
	300	120.5	120.6	121.2	121.0	121.1	120.7	120.8	120.8
	360	121.0	120.1	120.9	119.9	121.1	120.0	120.7	119.9
CRLB	60	384.8	185.3	283.6	151.8	364.6	173.8	285.9	151.7
	120	173.9	86.8	148.3	72.6	171.8	83.2	151.4	72.9
	180	118.0	57.8	99.5	49.4	110.2	56.1	99.3	49.4
	240	88.2	42.8	73.5	37.7	83.2	41.3	73.9	37.3
	300	70.1	35.2	60.4	30.1	68.2	33.7	59.6	29.8
	360	59.1	28.9	50.0	24.4	56.7	27.6	49.5	24.3

모의실험의 결과 어떠한 경우에서든 추정값이 가정한 수명모수 120에 근접하게 구해짐을 알 수 있다. 또한 추정값의 크레이머-라오 하한 경우에는 다음의 <그림 2>에서 보는 바와 같이 구간의 크기가 작을수록, 시험대상물의 수가 많을수록, 그리고 시험시간이 길수록 작게 구해졌는데, 특히 검사구간의 크기와 불균등 정도보다는 시험대상물의 수와 시험시간에 더 민감한 것을 알 수 있다.



<그림 2> 시험대상물의 수와 시험시간에 따른 각 검사구간별 CRLB의 비교

하나의 예로 시험대상물의 수가 200인 경우를 들어 본다. 검사구간 (1:5)에서는 시험시간 60 동안에 20회의 검사를 통하여

$$CRLB = 151.8$$

을 얻었다. 그러나 이보다 구간의 크기가 10배나 되는 검사구간 (10:50)인 경우에는 시험시간을 120으로 하더라도 4회의 검사만으로

$$CRLB = 86.8$$

의 결과를 얻을 수 있었다.

이상의 결과를 감안할 때, 불균등 구간검사를 적용하여 수명시간을 추정하는 경우에는 검사구간의 크기를 작게 하여 많은 회수의 검사를 하는 것보다는 시험시간을 늘리는 대신에 검사구간의 크기를 크게 하여 적은 회수의 검사를 하는 것이 더 효과적이라고 판단된다.

## 5. 결론

수명시간이 지수분포를 따른다는 가정하에 복원모형을 적용하며 검사구간이 일정하지 않은 불균등 구간검사를 다루었는데, 평균수명시간에 대한 최우추정량을 음함수 형태로 도출

하였다. 또한 시험시간, 시험대상물의 수, 구간의 크기 및 불균등 정도를 달리하며 모의실험을 행한 결과, 어떠한 경우에서든 수명모수에 가까운 추정값을 구할 수 있었다.

한편 최우추정량의 특성값으로 크레이머-라오 하한을 도출하여 관찰한 결과 구간의 크기가 작을수록, 시험대상물의 수가 많을수록, 그리고 시험시간이 길수록 그 값이 작게 구해졌는데, 특히 구간의 크기와 불균등 정도보다는 시험대상물의 수와 시험시간에 더 민감한 것으로 나타났다. 따라서 불균등 구간검사를 적용하여 수명시간을 추정하는 경우에는 검사구간의 크기를 작게 하여 많은 회수의 검사를 하는 것보다는 시험시간을 늘리더라도 검사구간의 크기를 크게 하여 적은 회수의 검사를 하는 것이 더 효과적임을 알 수 있었다.

## 참고문헌

- [1] Boardman, T.J. (1973), Estimation in Compound Exponential Failure Models : When the Data are Grouped, *Technometrics*, 15, 271-277.
- [2] Calabria, R., and Pulcini, G. (1990), Bayes Estimation in Exponential Censored Samples with Incomplete Information, *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 19, 3037-3049.
- [3] Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. (1977), Maximum Likelihood from Incomplete Data via E-M Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 39, 1-38.
- [4] Lee, T.S. and Singh, K. (1999), Mixed Replacement Designs for Life Testing with Interval Censoring, *The Korean Communications in Statistics*, 6, 443-456.
- [5] Lee, T.S. and Yun, S.U. (2001), Lifetime Estimation for Mixed Replacement Grouped Data in Competing Failures Model, *International Journal of Reliability and Applications*, 2, 189-197.
- [6] Nelson, W. (1990), *Accelerated Testing - Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*, John Wiley & Sons, New York.
- [7] Sinha, S.K. (1983), Bayesian Estimators of the Parameters and Reliability Function from Mixed Exponentially Distributed Time-Censored Life Test Data, *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 12, 141-151.
- [8] Wei, D. and Bau, J.J. (1987), Some Optimal Designs for Grouped Data in Reliability Demonstration Tests, *IEEE Transactions on Reliability*, 36, 600-604.