

# 초기공정에서 공정변화에 대한 개별 관측치를 이용한 수정된 합성 관리도 연구 (A Study on the Adjustment Synthetic Control Chart Pattern for Detecting Shifts using Individual Observations in Start-Up Process)

지 선 수\*  
(Seon-Su Ji)

**요약** 이 논문에서 개별 관측치를 이용한 Shewhart 관리도와 CRL 관리도로 이루어지는 수정된 합성 관리도를 구성한다. Shewhart X 관리도를 적용하여 관리한계선을 벗어나지 않으면 CRL 관리도를 적용하여 한 번 더 공정의 이상유무를 판단하는 2중 감지 공정관리기법을 고려했다. 합성 관리도에서 공정변화를 지적하는 감지력으로 평균 런의 길이( $\bar{r}$ )를 이용한다. 논문에서 제안된 수정된 합성 관리도는 We와 Spedding(2000a)이 제안한 합성 관리도와 Shewhart X 관리도보다 우수하며, EWM 관리도와는 성능면에서 매우 유사하다. 또한 공정변화가  $0.75\sigma$ 보다 클 때는 수정된 합성 관리도가 우수하다는 것을 확인할 수 있다. 제시된 X-CRL 관리도를 평가하기 위해 조건부 확률을 계산하여 기존의 관리도와 비교한다.

**Abstract** This paper presents a adjustment synthetic control chart that is an integration of the Shewhart X chart and the conforming run length(CRL) chart. The application of the adjustment synthetic control chart may therefore substantially enhance the effectiveness process control for manufacturing. In the synthetic control chart, denotes the average number of the X sample required to detect a process shift. The synthetic control chart outperforms the EWM chart and the X chart when  $\delta$  is greater than  $0.75\sigma$ . And the X-CRL charts suggested above evaluate using the conditional probability.

## 1. 서론

생산공정라인에서의 공정관리는 공정의 초기 시점에서 개별관측 자료를 수집하여 표준 관리도를 작성한 다음 공정의 이상유무를 판단한다. 가능한 공정의 초기부터 공정관리를 할 필요가 있으며 제 1종 오류를 작게 해주는 관리도 기법의 필요성이 부각되었다. 즉, 공정에 이상이 없는데도 불구하고 공정을 중지시키는 제 1종 오류( $\alpha$ )를 가능한 줄일 필요가 있으며 관측된 자료가 유효 적절하게 공정관리 기법

에 반영되는 합리적이고 간단하면서도 효율적인 관리도 기법의 개발이 필요하다. 따라서 관측값의 특성이 통계량에 정확하게 반영될 수 있도록 하는 새로운 기법의 연구가 대두되었다. 일반적인 통계적 공정관리(SPC) 기법은 관리한계선 밖에 점들이 위치하면 공정을 중지하고 조사하는 진단 정보를 제공한다. 일반적인 Shewhart 관리도는 공정을 관리하기 위해 널리 이용된다. 공정에서의 큰 규모의 변화를 감지하는데는 효율적이지만 작은 공정변화에 대해서는 효율적이지 못하다. 이를 개선하기 위해 여러 학자들이 효율적인 기법을 제안하고 개선하여 왔다. Page(1954)는 누적합(cumulative sum:CUSUM)

\* 원주대학 사무자동화과

관리도를 연구하였다. 또한 Roberts(1959)에 의해 개발된 지수가중 이동 평균(exponentially weighted moving average : EWMA) 관리도는 Crowder(1987)와 Lucas와 Saccucci(1990) 등에 의해 연구, 발전되어 왔다. 특히 Lucas와 Saccucci(1990)는 EWMA와 CUSUM 관리도를 비교하였으며, 두 기법 사이의 실질적인 차이는 매우 작다는 결론을 지었다. 또한 EWMA와 CUSUM이 매우 작은 변화에 대해서는 Shewhart 관리도보다 우수하지만, 공정의 큰 변화에서는 오히려 Shewhart 관리도가 유리함을 보여주었다. Albin et al(1997)에 의해 제안된 -EWMA 관리도는 공정평균에서 큰 변화를 지적하는데 EWMA 관리도를 개선하였으나, 공정의 작은 변화에 대해 감지력은 뛰어나지만 비용면에서 효과적이지 못하다는 결론을 내었다.[8][9][14]

Shewhart 관리도는 추가적인 런의 규칙에 의해 개선되는 시도가 몇몇 학자에 의해 진행되었다. Albin et al(1997)는  $\bar{X}$ -EWMA 관리도, Shewhart  $\bar{X}$  관리도, 런의 규칙을 포함한 Shewhart  $\bar{X}$  관리도 등 3개의 공정수행능력을 비교하였다. 그리고 공정에서 작은 변화를 감지할 필요가 있을 때  $\bar{X}$ -EWMA 관리도의 사용이 바람직하다고 제안하였다.[8][9] 다만 공정에서 사용방법이 복잡하고 비용이 많이 들어간다는 것은 감수해야 한다.

현재의 생산공정에서는 공정의 초기부터 관리가 되어야하며 표본 관측치를 선택할 때 개별관측만이 고려되어야 하는 공정을 관리할 필요가 있다. 이 논문에서 연속적으로 생산된 공정으로부터 다음과 같은 측정자료가 있다고 가정한다.

$$x_t = \mu + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

여기에서  $\varepsilon_t$ 는 평균이 0이고 분산이  $\sigma^2$ 인 확률 표본오차이다. 관측값  $x_t$ 는 t 번째 시점에서 얻은

것으로 공정평균이  $\mu$  이고 공정분산이  $\sigma^2$  인 공정 분포로부터 선택되어진다고 가정한다.

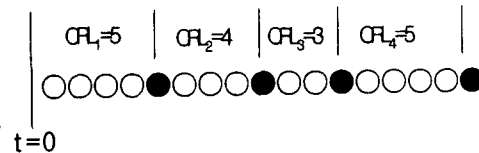
$$X_1, X_2, \dots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots$$

이 논문에서는 초기공정에서 개별 관측치를 이용한 수정된 합성 관리도(adjustment synthetic control chart:ASCC) 기법을 제안한다. 기존의 전통적인 X, EWM 관리도와위의 이상신호를 감지할 확률을 비

교하여 각각의 관리도 효율성을 평가한다.

## 2. 런 길이를 이용한 관리도 기법

Bourke(1991)에 의해 제안된 적합 런 길이 (conforming run length:CRL) 관리도는 Davis(1992), Nelson(1994), Glushkovsky(1994) 등에 의해 연구·발전되어 왔다.[9][14] 기본적인 CRL 관리도는 계수형 품질관리를 목적으로 개발되어 졌다. 공정은 t 시점에서부터 시작된다고 가정한다. <그림 1>에서 CRL의 4개 표본이 있는데 이는 각각  $CRL_1=5, CRL_2=4, CRL_3=3, CRL_4=5$  등으로 나타낼 수 있다. 검은 점을 부적합 단위로 하고, 흰 점을 적합 단위로 각각 나타내며, 적합 런의 길이는 두 연속된 부적합 단위 사이의 적합 단위의 수를 나타낸다.



<그림 1> 적합 런의 길이

CRL 관리도는 공정에서 부적합비(fraction nonconforming) 즉, 부적합 판정이 될 확률  $\rho$ 가 변할 때 적합 런의 길이가 변한다는 것을 이용한다.  $\rho$ 가 증가할 때 CRL은 짧아지고,  $\rho$ 가 감소할 때 CRL은 길어진다. 부적합 단위가 발생하기까지 반복하여 적합 단위가 나타나는 일종의 베르누이 시행의 수를 갖는 분포이므로 확률변수 CRL은 기하분포를 따르며 CRL의 평균은 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$\mu_{CRL} = \frac{1}{\rho} \quad (1)$$

CRL의 확률분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_{\rho}(CRL) = (1 - \rho)^{CRL-1} \cdot \rho, \quad CRL = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

CRL 관리도의 제 1종 오류  $\alpha_{CRL}$ 은 다음과 같이 계산될 수 있다. 여기에서  $\rho_0$ 는 정상상태의 부적합비이다.[8]

$$\alpha_{CRL} = F_{\rho_o}(L) = 1 - (1 - \rho_o)^L \quad (3)$$

여기에서 F()는 누적확률 분포함수를 나타낸다.

부적합비  $\rho$ 가 증가할 때만 감지하는 것이 타당하므로 CRL 관리도의 관리하한선 L은 (3)식으로부터 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$L = \frac{\ln(1 - \alpha_{CRL})}{\ln(1 - \rho_o)} \quad (4)$$

CRL ≤ L이면 부적합비  $\rho$ 가 증가되고, 이상상태로 판정한다. CRL > L이면 공정은 정상상태로 판정한다.

CRL 관리도에서 공정변화를 지적하기 위해 요구되는 CRL 표본의 평균수는 다음과 같이 계산되어진다.[8]

$$ARL_{CRL} = \frac{1}{F_{\rho}(L)} = \frac{1}{1 - (1 - \rho)^L} \quad (5)$$

### 3. 수정된 합성 관리도 설계

합성 관리도에서 공정변화를 지적하는 감지력으로 평균 런의 길이(  $ARL_S(\delta)$  )를 이용할 수 있다.[8]

$$ARL_S(\delta) = (\text{Shewhart X 관리도의 ARL}) \cdot (\text{CRL 관리도의 ARL}) = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{1 - (1 - P)^L} \quad (6)$$

여기에서  $P = 1 - [\Phi(k - \delta) - \Phi(-k - \delta)]$ 는 X 관리도의 감지력을 나타낸다. k는 임의의 상수이며,  $\Phi()$ 는 표준정규 누적분포함수를 나타낸다.  $\delta$ 는 공정변화를 의미하며, 공정에서 가능한 빨리 감지하여 후속조치를 취해야 한다. 합성 관리도에서는  $ARL_S(\delta)$ 를 최소로 하는 공정설계를 해야한다. 그러므로 공정이 정상상태일 때 즉,  $ARL_S(\delta = 0)$  값을 최소로 하는 공정 설계 모수 k와 L 값을 찾아낼 수 있다. (6) 식을 참고로 다음 식을 계산할 수 있다.[7][8][9]

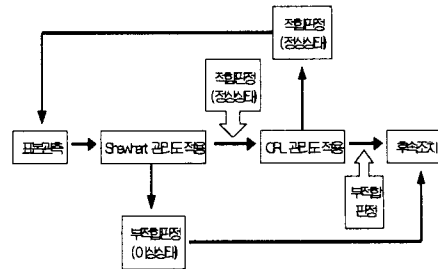
$$ARL_S(\delta = 0) = \frac{1}{2\Phi(-k)} \cdot \frac{1}{1 - [1 - 2\Phi(-k)]^L} \quad (7)$$

일반적인 관리도에서 공정변화에 있어서 변화를 보고자 하는 품질특성이 정규  $\pm 3\sigma$  분포를 가정하면 그 측정치는 공정에 이상요인이 작용하지 않는 한 평균치를 중심으로 한계선 안에 99.73%가 포함된다. 이 이론적 기초를 바탕으로 출발한다. 따라서  $ARL_S(\delta = 0) = 370$ 과 적절한 변화를 준 상태에

서 표본설계를 위한 k, L 값을 구할 수 있다. 여기에서는 (7)식을 이용하여 Wu와 Spedding(2000a)이 계산한 모수값 k, L를 구하는 방법과 동일한 방법으로 계산할 수 있다.

L	3	4	5	6	7
k	2.164	2.218	2.263	2.295	2.322

개별 관측치를 이용한 Shewhart X 관리도와 CRL 관리도를 이용한 수정된 합성 관리도를 구성한다. Shewhart X 관리도를 적용하여 정상상태로 판정하면, CRL 관리도를 적용하여 한 번 더 공정의 이상유무를 판단하는 2중 감지 공정관리기법을 고려한다.



<그림 2> 합성 관리도의 구성

수정된 합성 관리도는 몇 가지 단계로 공정관리를 진행한다.

1 단계 : 정상상태의 표본으로부터  $\mu_x, \sigma_x$ 를 계산한다. 그리고  $ARL_S(\delta = 0)$ 를 설정한다.  $ARL_S(\delta = 0)$ 를 최소로 하는 k, L을 선택한다.

2 단계 : 모수를 이용하여 Shewhart X 관리도의 관리한계선을 결정한다.

$$UCL_x = \mu_x + k \cdot \sigma_x$$

$$LCL_x = \mu_x - k \cdot \sigma_x$$

여기에서  $\mu_x$ 는 공정이 정상상태일 때 공정평균을

$$P_{CRLIX} = P(CRL_t < L | LCL_x \leq x_t \leq UCL_x) \quad (9)$$

나타내며,  $\sigma_x$ 는 표본의 표준편차이다.

여기에서 CRL 관리통계량의 분포함수는 모수  $\rho$ 를 갖는 기하분포를 따르므로 (2)식을 참고로 (9)식을 계산할 수 있다.

3 단계 : 각 조사시점에서 관측치를 선택하여 Shewhart X 관리도에 표시한다. 공정으로부터 조사된 표본통계량이  $LCL_x \leq \text{표본통계량}(X) \leq UCL_x$ 이면 적합한 표본으로 판단하고 공정을 계속하여 유지하면서 4 단계의 CRL 관리도를 적용시킨다. 그렇지 않다면 부적합 표본으로 판단하여 5 단계의 후속조치를 취한다.

#### 4. 적용 예

적당한 제조공정으로부터 관측치를 얻기 위한 방법으로 몬테칼로 모의실험을 이용하며 여기에서 생성된 확률수를 이용한다.

4 단계 : CRL 관리도의 관리한계선을 결정한다. 공정에서 마지막 부적합 표본과 현재의 표본사이의 적합 표본의 수 즉, CRL 표본을 검사한다. CRL 표본수가 관리하한선(L)보다 크다면 공정은 정상상태로 판단하고, 3 단계의 Shewhart X 관리도를 적용시킨다. 그렇지 않다면 5 단계로 간다.

이 논문에서는 IMSL[5]의 GGNML을 이용하여 평균이 0이고 표준편차가 1인 정규분포로부터 만들어진 확률수를 제조공정에서 산출된 측정치로 대체하여 이용한다. 또한 공정평균은 여러 가지 표준편차에서 측정할 수 없는 우연요인에 따른 변화는 무시한다. 공정이 정상상태일 때 표본을 100개 선택하여 공정평균  $\mu_x$ 와 공정 표준편차  $\sigma_x$ 를 구하여 사용한다. 그리고  $3\sigma$  관리한계선을 고려한다. 신뢰성을 고려하여 10,000 번의 반복실험을 한다. 공정변화( $\delta$ )를 0.00부터 2.50까지 0.25씩 증가시켜보면서 (6) 식의  $ARL_s(\delta)$  변화를 조사한다. 이때 We와 Spedding(2000a)이 제안한 방법과 비교한다. 또한 유사한 방법으로 개별 관측치를 이용한  $ARL_x(\delta)$ , 지수 가중 이동 통계량을 이용한  $ARL_{EWM}(\delta)$ 을 각각 계산하여 비교한다.

5 단계 : 공정에 최종 이상신호를 주고, 원인의 분석과 제거 작업을 한 후 합리적인 방법에 의한 조치를 진행한다. 조치가 모두 이루어진 후 2 단계로 간다.

3 단계에서 공정에서의 변화가 발생했을 경우를 가정한다. Shewhart X 관리도에서 변화를 감지하지 못한 상태에서 4 단계의 CRL 관리도가 이상원인을 감지할 확률을 계산할 필요가 있다.

<표 1> L=4, k=2.218,  $\lambda=0.2$ 일 때 수정된 합성(ASCC), X, EWM 관리도의 평균 런의 길이

먼저, 3 단계에서 공정에서의 변화가 발생했을 경우 X 관리도만을 이용할 때 이상신호를 감지하여 신호를 줄 확률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_x = P(x_t < LCL_x \text{ 이거나 } x_t > UCL_x) \quad (8)$$

여기에서은 모두 평균이 0이고 분산이 1인 표준정규분포를 따른다고 가정한다.

다음으로 공정에서의 변화가 발생했을 경우 X 관리도에서는 이상원인을 감지하지 못하였는데, CRL 관리도에서 이상원인을 감지하여 신호를 줄 확률은 (9) 식을 이용하여 계산할 수 있다.

$\delta$	합성 관리도		X	EWM
	We, Spedding	ASCC		
0.00	264.38	260.60	264.94	263.95
0.25	89.04	79.14	112.14	82.28
0.50	20.85	16.57	20.97	19.98
0.75	9.31	4.94	9.50	8.50
1.00	5.90	1.62	6.09	5.11
1.25	4.25	1.04	4.34	3.37
1.50	2.97	1.01	3.40	2.46
2.00	2.17	1.00	2.25	1.44
2.50	1.53	1.00	1.95	1.05

제안된 수정된 합성 관리도는 We와 Spedding(2000a)이 제안한 합성 관리도와 Shewhart

X 관리도보다 우수하며, EWM 관리도와는 성능면에서 작은 공정변화에서는 매우 유사하나 큰 변화에서는 더 효율적임을 확인할 수 있다. 또한 공정변화가  $0.75\sigma$ 보다 클 때는 수정된 합성 관리도가 우수하다는 것을 확인할 수 있다. 공정변화가 크고 작은 것에 관계없이 EWM 관리도는 Shewhart X 관리도보다 공정변화를 감지하는 능력이 뛰어난 것을 확인할 수 있다.

공정변화에 따라 X와 EWM 관리도가 이상원인을 감지할 확률과 공정변화에 따라 X 관리도가 이상원인을 감지하지 못한 경우에 CRL 관리도에서 이상원인을 감지할 조건부 확률을 구한다.

<표 2> 공정변화에 따라 X와 EWM 관리도가 이상원인을 감지할 확률과 공정변화에 따라 X 관리도가 이상원인을 감지하지 못한 경우에 CRL 관리도에서 이상원인을 감지할 조건부 확

$\delta$	$P_X$	$P_{EWM}$	$P_{CRLX}$
0.00	0.0020	0.0020	0.0020
0.50	0.0050	0.0207	0.0083
1.00	0.0183	0.0900	0.0252
1.50	0.0559	0.2831	0.0656
2.00	0.1378	0.2777	0.1416
2.50	0.2775	0.3649	0.2412

률 공정변화가 작을 때 EWM 통계량을 이용한 EWM 관리도를 이용하는 것이 X, X-CRL 관리도를 이용할 때 보다 이상원인을 감지하는 능력이 우수함을 알 수 있다. 공정변화가 작을 때 X 관리도를 이용하여 이상원인을 감지하지 못한 상태에서, CRL 관리도에 의해 이상원인을 감지할 조건부 확률이 X 관리도를 이용할 때보다 조금 향상되었다.

## 5. 결론 및 향후 연구 과제

합성 관리도는 Shewhart X 관리도보다 복잡하게 사용되지만 현재의 공정관리 기법이 컴퓨터와 함께 적용되므로 실질적인 공정에서 감지력을 개선하는데 효과적일 수 있다. 개별 관측치를 이용하여 초기공정에서 작은 변화를 조사하는데 두 개의 관리도를 동시에 적용하는 즉, Shewhart X 관리도와 CRL 관리도를 함께 운영하는 것이 매우 엄격한 공정을 관리하고자 할 때 효과적일 수 있다. 제안된 수정 합

성 관리도는 Shewhart X 관리도보다 복잡하지만 공정관리를 컴퓨터에 도움 받는 현시점에서 작은 공정변화를 지적할 때 실질적인 관리기법으로 이용될 수 있다.

공정평균과 분산이 동시에 변하는 공정에서의 X-CRL 관리도의 타당성에 대해서는 좀 더 깊은 연구가 진행되어야 한다. 또한 지수가중 이동평균 관리도와 CRL 관리도를 함께 적용하는 관리도 기법은 향후 연구되어야 할 부분이다.

## 참고 문헌

- [1] Bourke P. D., "Detecting a shift in Fraction Nonconforming Using Run-Length Control Charts with 100% Inspection", *Journal of Quality Technology*, Vol.23, pp. 225 - 238, 1991.
- [2] Davis R. B. and Woodall W. H., "Evaluating and Improving the Synthetic Control Chart", *Journal of Quality Technology*, Vol. 34, pp. 200-208, 2002.
- [3] Glushkovsky E. A., "On-Line G-Control Chart for Attribute Data", *Quality and Reliability Engineering International* 10, pp. 217-227, 1994.
- [4] Klein M., "Two Alternatives to the Shewhart Control Chart", *Journal of Quality Technology*, Vol 32, pp. 427-431, 2000.
- [5] IMSL(international mathematical statistical library), inc, "IMSL user's math/stat manual", 1989.
- [6] Nelson L. S., "Control charts for individual measurements", *Journal of Quality Technology*, Vol 14, pp. 172-173, 1982.
- [7] Susan L, Alban, Lan K. and Gerald S., "An X and EWMA chart for individual observations", *Journal of Quality Technology*, Vol 29, pp 41-48, 1997.
- [8] Wu Z. and Spedding T. A., "A Synthetic Control Chart for Detecting Small Shifts in

the Process Mean", Journal of Quality Technology, Vol. 32, pp. 32-38, 2000a.

[9] Wu Z. and Spedding T. A., "Implementing Synthetic Control Charts", Journal of Quality Technology, Vol. 32, pp. 75-78, 2000b.

[10] Wu Z. and Yeo S. H., "Implementing Synthetic Control Charts for Attributes", Journal of Quality Technology, Vol. 33, pp. 112-114, 2001.

[11] Wu Z. and Spedding T. A., "JQT Archive/C program list", <http://lib.stat.cmu.edu/jqt/>

[12] Wu Z., Yeo S. H. and Spedding T. A., "A Synthetic Control Chart for Detecting Fraction Nonconforming Increase", Journal of Quality Technology, Vol 33, pp. 105-112, 2001.

[13] Xie M., Goh T. N. and Kuralmani, "On Optimal Setting of Control Limits for Geometric Chart", International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 7, pp. 17-25, 2000.

[14] 지선수, "초기공정에서 개별관측치를 이용한 EWM와 MCEWM 관리도 적용기법", 공업경영학회지, 제 21권, pp. 211-218, 1998.

[15] 지선수의 5인, "통계적 품질관리", 경문사, 1997.



지 선 수 (Ji, Seon-Soo)

1984 충남대학교

계산통계학과(이학사)

1986 중앙대학교 응용통계학과  
(석사)

1993 중앙대학교 응용통계학과  
(박사)

1993-현재 원주대학 컴퓨터정보관리과 교수

관심분야 : 품질관리(neural network), 네트워크보안