

---

# 웨이브렛을 이용한 잡음 제거 알고리즘

배상범\* · 김남호\*

Denoising Algorithm using Wavelet

Sang-Bum Bae\* · Nam-Ho Kim\*

## 요 약

웨이브렛 변환 데이터는 신호의 상세 정보를 포함하고 있으므로 주파수 대역별로 필터링할 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 중요한 두 가지 잡음을 웨이브렛을 사용하여 제거하였다. AWGN 환경에 대해서 hard-threshold를 적용한 UDWT(undecimated discrete wavelet transform)를 사용하였으며, 임펄스 잡음 환경에 대해서는 임계치에 의한 잡음 제거와 웨이브렛에 의한 신호의 slope를 이용하여, 잡음 제거 효과를 최대로 함과 동시에 원신호의 edge를 인식하도록 하였다. 이러한 잡음 제거 효과의 판단 기준으로 SNR을 사용하였으며, 테스트 신호로서 Blocks와 DTMF(dual tone multi frequency)를 사용하였다.

## ABSTRACT

Wavelet transformed data can filter signal with each frequency band, because it includes detail information about original signal. Therefore, in this paper, important two noises were removed by wavelet. About AWGN environment UDWT(undecimated discrete wavelet transform), applying hard-threshold, was used and about impulse noise environment, it can be possible to recognize edge of original signal as well as superior denoising effect by using two methods, denoising by threshold and slope of signal by wavelet. SNR was used as a judgemental criterion of a denoising effect and Blocks and DTMF(dual tone multi frequency) were used as a test signal.

## 키워드

undecimated discrete wavelet transform, hard-threshold, denoising

## 1. 서론

최근 사회는 디지털 멀티 미디어 통신 서비스가 국내외적으로 상용화되고 있다. 그러나 데이터를 디지털화하고 전송하는 과정에서 여러 가지 원인에 의해 다양한 잡음들이 발생하고 있으며, 이러한 잡음 제거는 신호처리 분야에 필수적이다. 기존의 잡음 제거 방법으로는 선형과 비선형 필터 등을 적용한 방법이 있다.

그러나 이러한 접근은 복합적으로 발생하는 잡음

에 대한 정보를 검출할 수 없으며, 잡음을 국부적으로 필터링하기가 곤란하다[1].

웨이브렛 변환에 의한 데이터는 신호의 상세 정보를 포함하고 있으므로 상대적으로 저주파수 대역을 갖는 신호성분과 고주파수 대역을 갖는 잡음을 국부적으로 필터링할 수 있다.

따라서 본 논문에서는 noisy 데이터로부터 임펄스와 가우시안 잡음을 제거하기 위해 새로운 파라메타를 도입한 B-wavelet과 UDWT를 사용하였다[2]-[4].

---

\*부경대학교 공과대학 제어계측공학과

## II. 웨이브렛

연속 웨이브렛 변환은 Morlet에 의해 정형화되었으며, 시간 및 주파수 국부성을 가지므로 시간적으로 예측할 수 없는 신호를 해석하는데 용이하고, 다중해상도 해석에 적합하다.

신호  $f(t) \in L^2(R)$ 이면, 연속 웨이브렛 변환(CWT)은 식 (1)과 같이 정의된다.

$$(W_\psi f)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1)$$

$$a, b \in L^2(R) \quad a \neq 0$$

그리고 dyadic 웨이브렛 변환은 식 (2)와 같이 정의되며, 일반적으로 이산 웨이브렛 변환(DWT)이라 한다.

$$(W_\psi f)_d = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*(2^{-j}t - k) dt \quad (2)$$

$$j, k \in Z$$

MRA에서 부공간들은 제곱적분 가능한 함수 공간 상에서 나타내어지며, 데이터는 이러한 부공간상에 함수를 사용해서 표현된다. 모든 scale 레벨에 대해서 다음의 식 (3)으로 정의되는 scaling 함수는 이것의 선형결합으로 이루어지는 식 (4)와 같은 부공간들을 발생시킨다.

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad k \in Z \quad (3)$$

$$V_j = \text{Span}_k \{ \phi_{j,k}(t) \} \quad (4)$$

그리고 다음의 식 (5)를 만족하는 웨이브렛 부공간  $W_j$ 가 존재하며, 식 (6)의 선형결합으로 이루어진다.

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1} \quad (5)$$

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad k \in Z \quad (6)$$

만약  $\phi(t)$ 가 MRA를 발생시킨다면, 그때  $\phi(t)$ 는 scaling function으로 불려지고, 전형적인 scaling function의 예가  $m$ 차 B-spline  $N_m$ 이다[2]. 그리고 다음의 식 (7)과 식 (8)은 1차 B-spline과 상호간의 관계를 나타내고 있다.

$$N_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$N_m(t) = \frac{t}{m-1} N_{m-1}(t) + \frac{m-t}{m-1} N_{m-1}(t-1) \quad (8)$$

## III. 가우시안 잡음 제거

### 1. Scale에 따른 AWGN의 분산 $\sigma_m^2$

그림 1과 같이 표현되는 dyadic 웨이브렛 변환을 위한 tree형태의 필터뱅크 구조로부터  $S$ 가  $N$ 개의 데이터이며, 평균 0, 표준편차가  $\sigma$ 인 화이트 가우시안 잡음  $S_w(N, 0, \sigma^2)$ 이라고 가정할 때, 첫번째 웨이브렛 변환 데이터의 분산은 식 (9)와 같다. 그리고

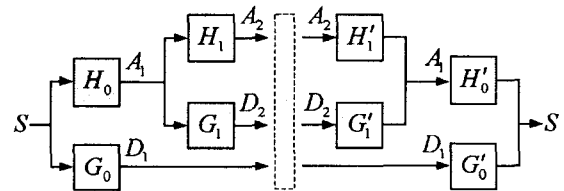


그림 1. Dyadic 웨이브렛 변환

Fig. 1. Dyadic wavelet transform

그림 1의 피라미드 분해 구조로부터  $m$ 번째 웨이브렛 변환 데이터의 분산은 식 (10)과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \text{Var}[D_1] = \text{Var}[S * G_0] \\ &= \|g_n^0\|^2 \cdot \text{Var}[S] = \sigma^2 \|g_n^0\|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 \|h_n^0 * h_n^1 * \dots * h_n^{m-2} * g_n^{m-1}\|^2 \quad (10)$$

2. 잡음 제거 알고리즘

가우시안 잡음을 제거하기 위한 여러 가지 방법에서 공간적 상관도를 이용한 방법(SSNF)은 인접한 두 scale에서, 웨이브렛 계수들 간의 상관관계를 계산하여 신호의 edge와 잡음을 판단하도록 한다. 그러나 fine scale에서 잡음은 경계선에 의한 edge를 제외하고는 상대적으로 큰 계수 값을 나타내므로, 이러한 문제를 해결하기 위해 NSSNF(new SSNF)에서는 새로운 파라메터를 도입하였다[5]. 그러나 공간적 상관도를 이용한 잡음 제거 방법은 여전히 많은 잡음을 포함하고 있으므로, 본 논문에서는 임계치에 기초한 잡음 제거 방법을 사용하였다. 임계치를 이용한 접근에서 Donoho는 식 (11)의 soft-threshold를 적용한 OWT를 사용하였다.

$$\eta_t(w) = \text{sgn}(w) (|w| - t)_+ \quad (11)$$

여기서  $t = \sigma\sqrt{2 \log N}$ 이다.

그러나 본 논문에서는 가우시안 잡음을 제거하기 위해 식 (12)의 hard-threshold를 적용한 UDWT 방법을 채택하였다.

$$\hat{w}(m, n) = \begin{cases} w(m, n), & |w(m, n)| > t(m) \\ 0, & |w(m, n)| \leq t(m) \end{cases} \quad (12)$$

여기서  $t(m) = c \cdot \sigma_m$ 이며, i.i.d.(independent and identically distributed) 가우시안 잡음  $S_w(N, 0, \sigma^2)$ 에 대해서,  $t = \sigma, 2\sigma, 3\sigma$ , 차 잡음의 68.26%, 95.44%, 99.74% ...를 제거하므로, 3~4 사이의  $c$  값을 사용하였다.

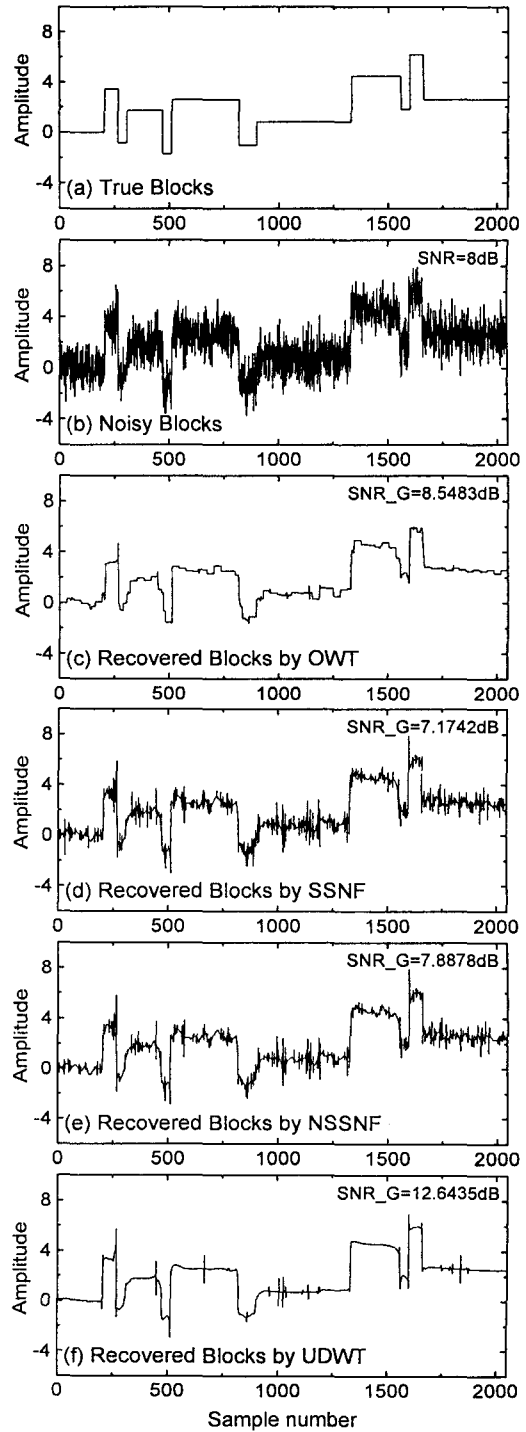


그림 2. 복원된 Blocks 신호  
Fig. 2. Recovered Blocks signal

그림 2는 제시한 네 가지 알고리즘에 대한 성능 평가 결과로서, 테스트 신호는 Blocks 신호를 사용하였으며, 8[db]의 SNR을 적용하였다.

3. 표준편차  $\sigma$ 의 추정

$\sigma$ 는 첫번째 두 개의 scale로부터 추정될 수 있으며, 잡음으로 추정되는 웨이브렛 계수를 0으로 reset 하고,  $D(1)$ 의 잔여 데이터를  $\tilde{D}(1)$ 으로 대체한다. 이때  $K$ 지점이 완전히 제거됐다면,  $\tilde{D}(1)$ 은 잡음에 의해 생성된 것으로 추정된다.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{P\tilde{D}(1)/(N-K)} / \|g_n^0\| \quad (13)$$

그러므로,  $\sigma = \sigma_1 / \|g_n^0\|$ 와  $\sigma_1^2$ 의 점근적 추정치  $P\tilde{D}(1)/(N-K)$ 로부터 식 (13)의 추정된 표준편차를 얻는다. 여기서  $P\tilde{D}$ 는 웨이브렛 변환 데이터의 파워를 나타낸다.

IV. 임펄스 잡음 제거

1. 분해

잡음이 존재하는 수열  $\{r(t_k)\}$ 는 spline 공간상에서 처리되기 위해서, 식 (14)의 콘볼루션에 의해 spline 공간상에 mapping된다[2],[3].

$$\{c_k^N\} = \{s_n\} * \{r(t_k)\} \quad (14)$$

그리고 spline과 웨이브렛 계수는 식 (15)와 식 (16)의 콘볼루션에 의해 각 scale 레벨에 대해서 계산된다.

$$\{c_k^j\} = [\{a_n\} * \{c_k^{j+1}\}] \quad (15)$$

$$\{d_k^j\} = [\{b_n\} * \{c_k^{j+1}\}] \quad (16)$$

2. 잡음 제거 알고리즘

각 scale 레벨에서 임펄스 잡음은 원신호에 비해

상대적으로 큰 웨이브렛 계수 값을 갖는다. 그러나 잡음에 상응하는 spline 계수 수열은 전체적으로 일정하게 존재하지 않는다. 그러므로 잡음의 임계를 정하기 위해, 더 작은 부분으로 분할된 국부 임계를 적용하여, 각 부분에서의 임계치를 다르게 하였다.

임계치는  $3\sigma \sim 4\sigma$ 사이의 값을 사용하여, 각 부분에서의 임계치를 계산하였다. 그리고 임계치를 초과한 계수들의 index를 제외한 편차를 다시 계산하여, 원신호와 임펄스 잡음을 최대한 분리할 수 있도록 하였다. 일반적으로 임펄스 잡음과 신호의 edge 성분은 웨이브렛 계수에서 그 특징들이 잘 나타나며, 동일한 index  $k$ 와 scale 레벨  $j$ 에서 spline과 웨이브렛 계수는 일치한다.

그러므로 잡음이 존재하는 웨이브렛 계수의 index는 spline 계수에서 잡음을 제거하기 위해 사용된다. 최종적으로 구해진 임계치와 웨이브렛 계수를 비교

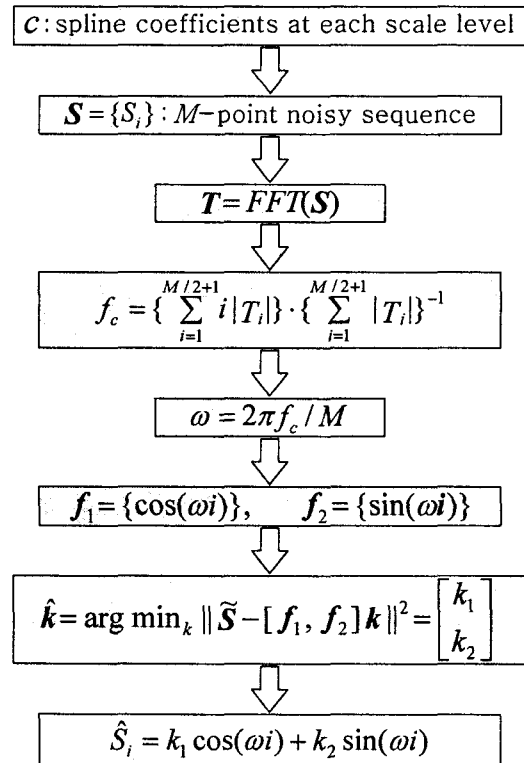


그림 3. FFT에 기초한 계수교체 알고리즘  
Fig. 3. FFT-based coefficient replacement algorithm

하여, 잡음에 상응하는 웨이브렛 계수를 0으로 reset 하며, 동일한 index의 spline 계수는 그림 3의 FFT 에 기초한 보간법을 사용하여 대체하였다. 그리고 웨이브렛에 의한 신호의 slope를 이용하여 원신호의 edge 성분을 분리하였다.

### 3. 복원

임펄스 잡음이 섞인 계수는 잡음 제거 과정을 거친 후 추정된  $\{\tilde{d}_k^j\}$  와  $\{\tilde{c}_k^j\}$  로 교체된다.

그리고 추정된 새로운 두 계수들은 식 (17)의 두 scale 사이의 관계를 사용하여, fine scale의 spline 계수를 복원하기 위해 사용된다.

$$\hat{r}(t_k) = \{v_n\} * \{\tilde{c}_k^N\} \quad (18)$$

최종적으로 얻어진 추정된  $\tilde{c}_k^N$  는 식 (18)에 의해 복원된 신호를 만든다. 여기서, 수열  $\{v_n\}$  은  $m$  차 B-spline이다.

그림 4는 B-wavelet을 이용한 임펄스 잡음 제거 알고리즘의 성능 평가 결과를 나타내고 있으며, Blocks 신호에 대하여 잡음의 진폭은 최소 36[dB] 이상 감소하였다.

## V. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서 사용된 알고리즘의 유효성을 증명하기 위하여, 테스트 신호로서 Blocks과 DTMF 신호를 사용하였다. 신호의 길이는 2048 sample, sample rate는 200[kHz]이며, 잡음은 그림 5와 같은 4 sample의 지속시간과 각기 다른 크기와 부호를 갖는 임펄스 잡음과 SNR 8[dB]의 가우시안 잡음을 원신호에 중첩하여 시뮬레이션하였다. 그림 6과 그림 7은 각각의 테스트 신호에 대한 시뮬레이션 결과를 나타내고 있다.

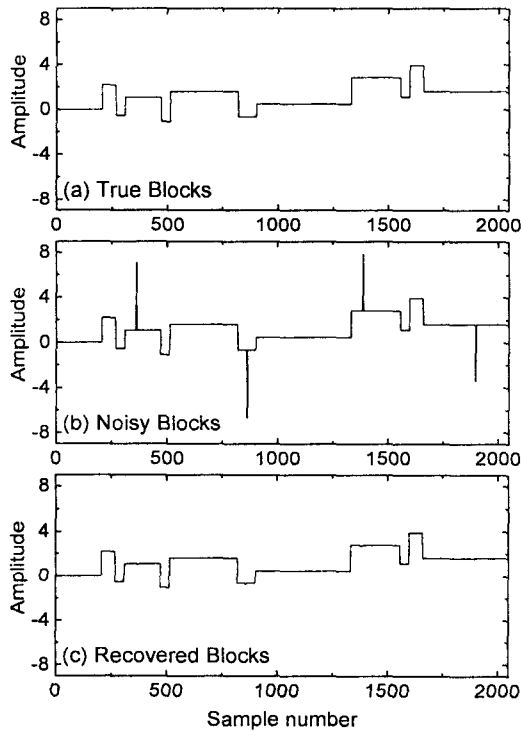


그림 4. Blocks 신호  
Fig. 4. Blocks signal

$$\begin{aligned} \{\tilde{c}_k^j\} = & \{p_n\} * \{\tilde{c}_k^{j-1}\} \quad (12) \\ & + \{q_n\} * \{\tilde{d}_k^{j-1}\} \quad (12) \end{aligned} \quad (17)$$

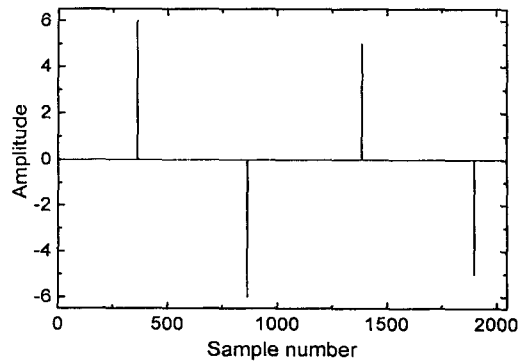


그림 5. 임펄스 잡음  
Fig. 5. Impulse noise

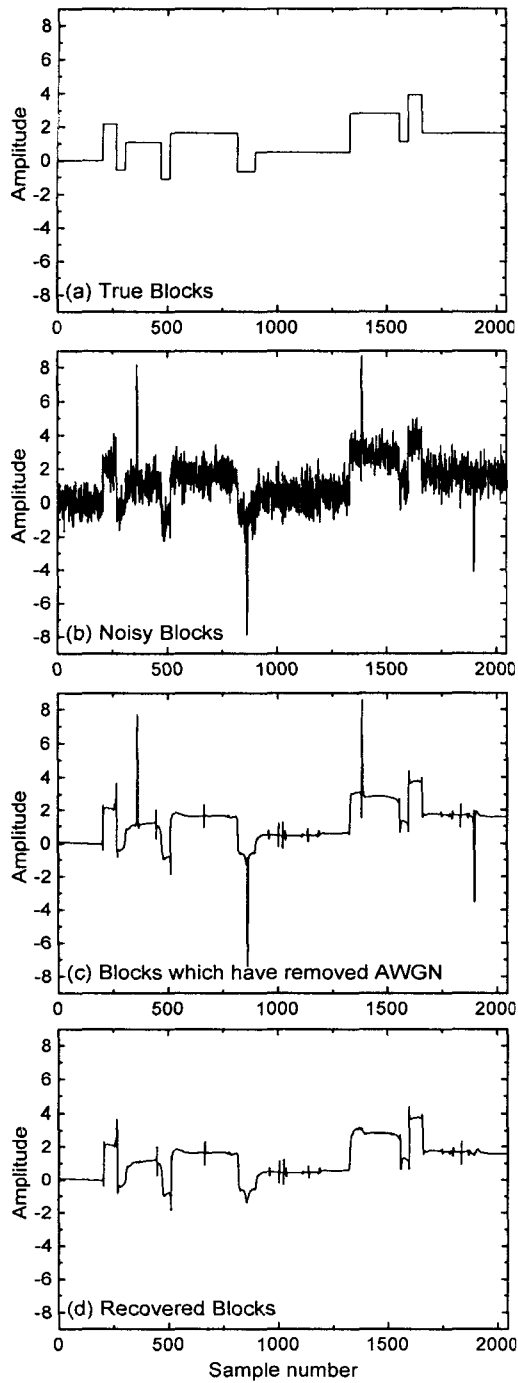


그림 6. Blocks 신호  
Fig. 6. Blocks signal

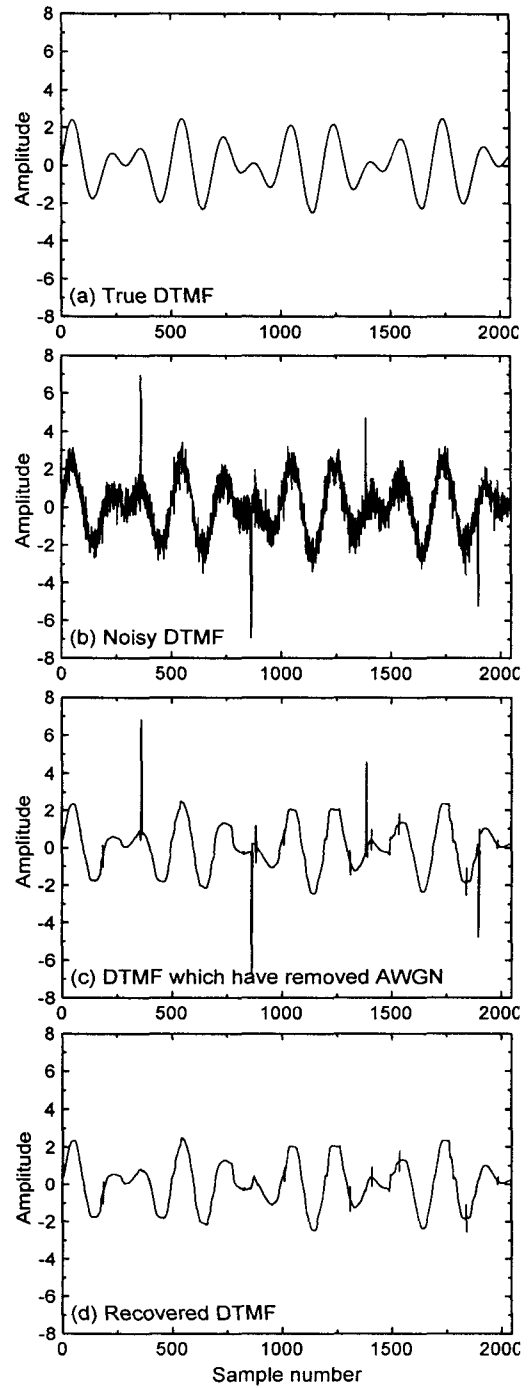


그림 7. DTMF 신호 (NO. 7)  
Fig. 7. DTMF signal (NO. 7)

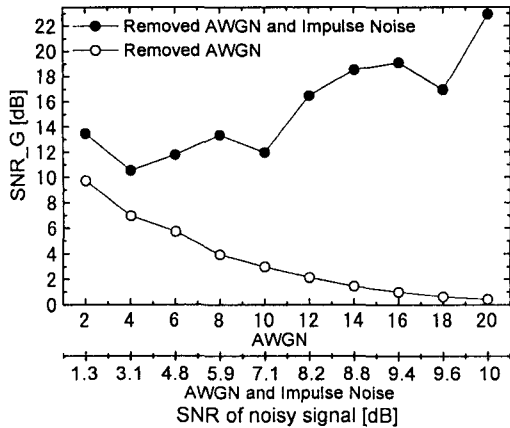


그림 8. Blocks 신호의 SNR\_G  
Fig. 8. SNR\_G of Blocks

각각의 그림에서 그림 (a)는 원신호이며, 그림 (b)는 임펄스 잡음과 가우시안 잡음이 복합적으로 중첩된 noisy 신호이다. 그리고 그림 (c)는 가우시안 잡음이 제거된 신호이며, 그림 (d)는 모든 잡음이 제거된 뒤 복원된 신호이다.

그리고, 그림 8은 Blocks 신호에 대하여 SNR에 따른 개선된 SNR(SNR\_G)을 도표로써 나타내고 있으며, 비교를 위해 AWGN에 대한 SNR과 임펄스 잡음이 포함되었을 때의 SNR을 2개의 축으로 나타내었다. 그림으로부터 SNR이 증가함에 따라 AWGN의 제거 효과는 점차 감소하고 있지만, 임펄스 잡음 제거에 의해 SNR의 증가와 함께 잡음의 진폭도 급격히 줄어들었다.

## VI. 결론

본 논문에서는 다중 잡음 환경에서 AWGN과 임펄스 잡음 제거 알고리즘의 cascade 적용에 의해 가우시안 잡음과 임펄스 잡음을 제거하였다.

이러한 제거 과정에서 원신호의 왜곡을 최소화하기 위해 신호의 edge 성분과 잡음을 분리·검출하였다. 잡음 제거에 사용된 알고리즘으로는 가우시안 잡음 제거를 위해 UDWT 방법을 사용하였으며, 임펄스 잡음 제거를 위해 B-wavelet을 사용하였다.

결과적으로 임펄스 잡음의 진폭은 모든 테스트 신

호에 대하여 전체적으로 33[dB]이상 감소되었으며, 우수한 SNR 개선 효과를 얻었다.

## 참고문헌

- [1] A. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [2] C. K. Chui, An Introduction to Wavelets. Boston, MA: Academic, 1992.
- [3] P. L. Ainsleigh and C. K. Chui, "A B-Wavelet-Based Noise-Reduction Algorithm", IEEE Trans., Signal Processing, vol. 44, no. 5, pp. 1279-1284, May 1996.
- [4] Q. Pan, L. Zhang, G. Dai, and H. Zhang., "Two Denoising Methods by Wavelet Transform", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47, Dec. 1999.
- [5] Y. Xu et al., "Wavelet transform domain filters: A spatially selective noise filtration technique", IEEE Trans. Image Processing, vol. 3, Nov. 1994.

## 저자소개



배상범(Sang-Bum Bae)  
2002년 6월 제6권 제4호 참조  
2002년 3월~현재 부경대학교 대학원 제어계측공학과 박사과정  
※관심분야: 통신 및 신호처리



김남호(Nam-Ho Kim)  
2002년 6월 제6권 제4호 참조  
1992년 3월~현재 부경대학교 공과대학 전기제어계측공학부 부교수  
※관심분야: 회로 및 시스템, 신호처리