

파형 분석을 위한 멕시코 모자 함수 응용

이희성* · 권순홍* · 이태일**

*부산대학교 기계기술연구소

**현대중공업(주) 선박해양연구소 운동조종연구실

Application of Mexican Hat Function to Wave Profile Detection

HEE-SUNG LEE*, SUN-HONG KWON* AND TAE-IL LEE**

*Pusan National University, Research Institute of Mechanical Technology, Busan, Korea

**Hyundai Heavy Industry Co. Ltd., Ulsan, Korea

KEY WORDS: Wave Profile 파형, Mexican Hat Function 멕시코 모자 함수, Wavelet Transform 웨이블릿 변환, Small Wave Flume 소형 파수조

ABSTRACT: This paper presents the results of wave profile detection from video image using the Mexican hat function. The Mexican hat function has been extensively used in the field of signal processing to detect discontinuity in the images. The analysis was done on the numerical image and video images of waves that were taken in the small wave flume. The results show that the Mexican hat function is an excellent tool for wave profile detection.

1. 서 론

파형 분석을 위해서 주로 사용되는 전통적인 방법은 파고계를 이용하는 것이다. 그러나 이 방법은 파형 자체에 교란을 유발하며 한 지점에서의 시계열 데이터만 획득이 가능하다. 본 연구에서는 비디오 카메라로 촬영한 파의 이미지를 멕시코 모자 함수(Mexican Hat function)를 사용하여 해석함으로써 파형을 구하는 연구를 시도하였다. 신호 해석 분야에서 멕시코 모자 함수는 불연속면을 찾아내는 데 많이 사용되어 왔다 (Antoine et al. 1993; Grossmann, 1985).

본 연구에서는 이 함수를 파형 해석 분야에 사용해 보았다. 멕시코 모자 함수는 급격한 경사와 부호를 달리하는 함수의 특징을 가지고 있어서 본 연구에서 원하는 파형 분석에 적절한 함수이다.

본 논문에서 먼저 일반적인 연속 웨이블릿의 성질을 기술하고 (Daubechies, 198; Daubechies, 1988; Daubechies, 1992) 웨이블릿 함수로 사용된 멕시코 모자 함수의 수학적 특징을 기술하였다. 이어서 수치적으로 생성시킨 신호에 대해서 본 방법을 적용하여 그 효율성을 입증하였다. 그리고 소형 파수조에서 촬영된 이미지에 대해서 해석을 수행한 결과를 제시하였다. 해석 결과 멕시코 모자 함수는 파형 분석에 우수한 도구임을 알 수 있었다.

2. 멕시코 모자함수에 의한 웨이블릿 변환

파는 공간이나 시간의 함수로 진동하는 형태를 가진다. 정현파가 그 좋은 예로서, 푸리에 분석의 기본 함수이다. 이는 임의의 구간에서 무한히 진동하므로, 에너지 역시 무한대가 되어, 스펙트럼 분석에 있어 가장 유명하고 유용한 방법이라 해도, 주파수 영역으로의 변환이 이루어지면 시간에 대한 정보를 볼 수 없다는 결점을 가지게 된다. 웨이블릿은 작은 파이다. 여기서 쓰인 '작은'이란 말은 파가 시간 또는 공간 영역상의 유한한 부분을 차지한다는 말로서, 그 에너지 또한 유한하게 된다. 이러한 특성이 주어진 신호의 시간영역 분석을 할 수 있게 해 준다. 수학적 형태로 표현해 보면 식(1)과 같다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \tag{1}$$

위 식에서 $f(t)$ 는 분석되어질 신호를 말한다. 식(1)을 만족하는 함수를 $L^2(R)$ 공간 함수라 한다. 여기서 R 는 실수를 의미한다.

먼저 푸리에 변환과 웨이블릿 변환의 특성을 살펴보자. 푸리에 변환의 경우, 시간 영역의 신호를 주파수 영역으로 변환시키면 시간에 대한 정보를 잃는 반면, 웨이블릿 변환은 이동과 지연의 두 가지 함수를 가지는 시간과 스케일(또는 레벨)의 정보를 포함한 시간-스케일 영역으로 변환된다. 만약 주기적 신호가 임의의 시간에 작은 불연속성을 가지게 된다면, 푸리에 변환으로 이 작은 차이를 알아내기는 힘들 것이다. 하지만, 웨이블릿 변환은 스케일 영역 뿐만 아니라 시간 영역에서도 이 작은 변화를 두드러지게 보여준다. 추가로, 웨이블릿 변환은

제1저자 이희성 연락처: 부산광역시 금정구 장전동 산30

051-510-2753 chaos730@hanmail.net

다양한 문제에 유연성 있게 적용할 교환 가능한 여러 기본 함수가 있다는 잇점이 있다.

웨이블렛 변환을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2)$$

웨이블렛함수 $\psi_{a,b}(t)$ 는 $\psi(t)$ 라는 모 웨이블렛(mother wavelet)에 축적하고 이동하는 것을 적용하여 식(2)과 같이 표현할 수 있다. 여기서 a 는 확장 인자이고, b 는 이송 인자이며, $1/\sqrt{a}$ 는 각 norm을 정규화 하기 위한 정규화 값이다.

2차원 연속 웨이블렛 변환은 1차원 연속 웨이블렛 변환이 확장되어진 형태이고, 다음과 같이 표현되어질 수 있다.

$$W_s(a, \vec{b}) = \frac{1}{a} \int \psi^*\left(\frac{1}{a}(\vec{x}-\vec{b})\right) s(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3)$$

여기서 $s(\vec{x})$ 는 다음과 같은 식을 만족한다고 가정한다.

$$\|s\|^2 = \int |s(\vec{x})|^2 d\vec{x} < \infty \quad (4)$$

여기서 $\|\cdot\|$ 는 norm을 의미한다. $s(\vec{x})$ 는 일반적으로 이미지 프로세싱에 있어 각 화소의 화소값(gray level)을 나타낸다. 2차원에 대한 계산을 하게 되면, 웨이블렛 변환의 결과는 세 가지 인자의 함수가 된다. 즉 2차원의 $s(\vec{x})$ 가 입력으로 들어오면, 출력인 $W_s(a, \vec{b})$ 는 3차원이 되어 여러 다양한 분석이 가능토록 하여 준다. 즉, 웨이블렛 함수는 세 가지 인자에 의해 이송되고 확장되어진다.

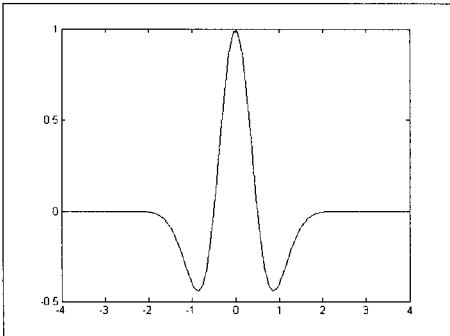


Fig 1. 1-D Mexican Hat wavelet

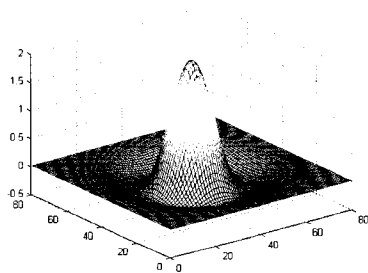


Fig 2. 2-D Mexican Hat wavelet

1차원 멕시코 모자 웨이블렛의 수식 표현은 다음과 같다.

$$\psi_H(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) \quad (5)$$

Fig. 1에서 보는 바와 같이, 급격한 증가와 감소로 인한 양과 음 값의 변화가 불연속점의 도출을 가능하게 한다.

본 연구에서 사용되어진 2차원 멕시코 모자 웨이블렛은 다음과 같은 형태의 식을 가지고, Fig 2와 같은 형상을 가진다.

$$\psi_H(t) = (2 - |\vec{t}|^2) \exp\left(-\frac{1}{2} |\vec{t}|^2\right) \quad (6)$$

3. 실험 결과 및 해석

먼저 본 연구에서 도입되어진 멕시코 모자 함수의 특성을 파악해 보고자, Fig. 3와 같은 1차원의 사각 신호에 대해 멕시코 모자 함수를 적용해 보았다. Fig. 4에서 보여주는 바와 같이 멕시코 모자 함수에 의한 변환은 신호의 변화 부분을 아주 잘 찾아준다는 것을 확인할 수 있었다. 이제 파형 사진과 비슷한 Fig. 5의 2차원 정현파형 신호에 대해 분석을 해 보았다. 그 결과 Fig. 6와 같이 신호 값의 변화를 1차원과 마찬가지로 역시 잘 찾아준다는 것을 확인할 수가 있었다.

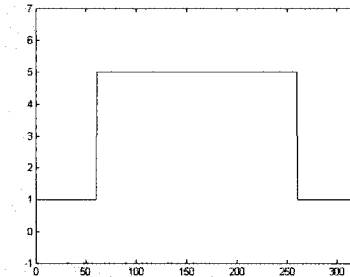


Fig 3. 1-D rectangular signal

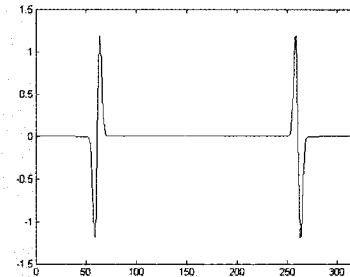


Fig 4. Detecting discontinuity with the mexican hat

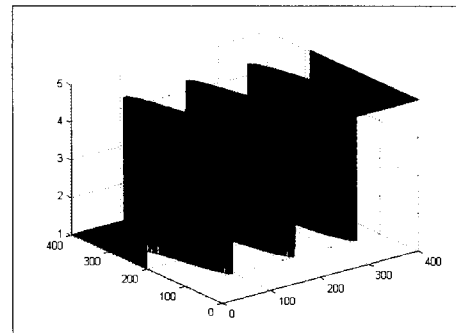


Fig 5. 2-D sine signal

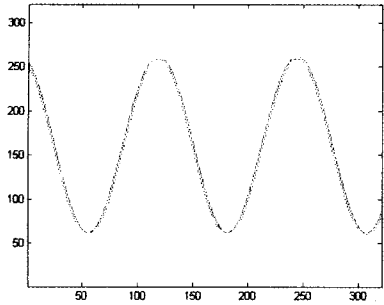


Fig 6. Detecting sine signal with the mexican hat

이제 이러한 특성을 이용하여 촬영된 이미지만으로 실제 파의 형상을 정확히 찾아보고자 하였다. 본 연구에서 분석되어진 파형 이미지는 Fig. 7에서 보여 지는 바와 같이 길이 4m, 폭 30cm, 높이 60cm의 소형 파수조에서 촬영되어졌다. 조파기는 플랫폼 타입을 썼고, 조명은 아랫 방향에서 아크릴 수조 바닥을 통해 조명되도록 하였다. 조명 타입은 먼저 할로겐 램프를 사용하였고, 더욱 정도 높은 2차원 파형을 얻고자 레이저 시트도 사용하였다. 파형은 캠코더를 통해 획득하여 그림파일로 저장하였다.

Fig. 8과 Fig. 9는 할로겐 램프를 조명으로 하여 획득된 이미지로서, 잔잔한 수면과 파가 발생한 수면을 보여주고 있다. 이러한 이미지가 시각적으로 보기에는 공기와 물이 상당히 잘 구별되어 누가 보아도 수면을 찾을 수는 있으나, 이미지의 정확한 측정(파고, 파장, 파형 등)을 하기 위해 그레이 레벨로 수면을 구별해 주고자 하면 여러 가지 문제에 부딪히게 된다. 그 중에서도 가장 큰 문제는 수면이라 인식하여야 하는 그레이 레벨의 범위인데, 그 범위가 상당히 넓은 뿐만 아니라 정확하지도 않아서 이를 위한 로직은 상당히 어렵고 복잡해지게 된다.

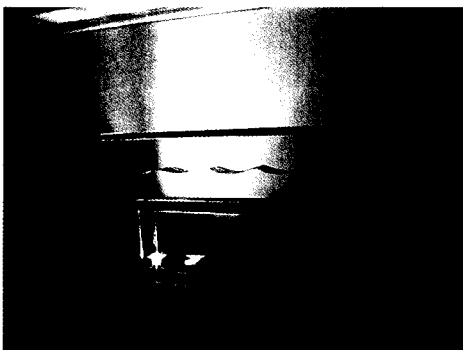


Fig 7. Experimental set-up

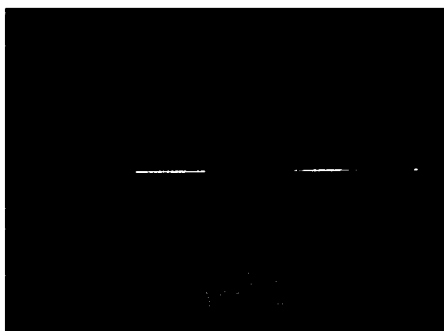


Fig 8. Calm water surface (halogen)

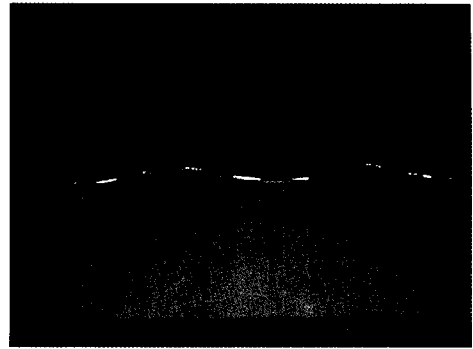


Fig 9. Wave profile (halogen)

Fig. 10에서 Fig. 12까지는 특정 레벨의 범위만을 취득하여 Fig. 9의 파형을 찾아보고자 한 것이다. Fig. 10은 이러한 방법을 통해 가장 정확하게 파형을 나타낸 것이나, 매끄럽고 끊어짐이 없는 파형을 주지는 못했다. Fig. 11의 경우는 취득하는 특정 범위를 더욱 좁혀본 것으로, 끊어짐이 더욱 심해진 좋지 않은 결과를 얻게 되었다. Fig. 12의 경우는 이러한 특정 범위를 넓힌 것으로, 파형은 나아진 모습을 보이긴 하나 불필요한 다른 부분들이 나타나기 시작하였다. 하지만 본 연구에서 제시한 멕시코 모자 함수는 신호의 불연속점을 탁월하게 잘 찾아주는 도구로서, 분석하고자 하는 이미지의 그레이 레벨에 대한 특별한 조사 없이도 확장 인자만 절적히 선택하면 정확한 결과치를 얻어 낼 수 있다.

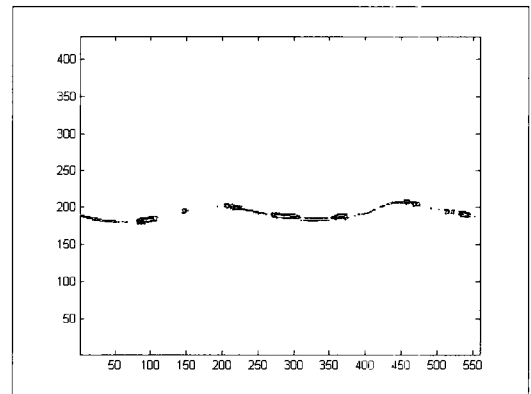


Fig. 10 Wave profile (Gray level<61, Gray level>171)

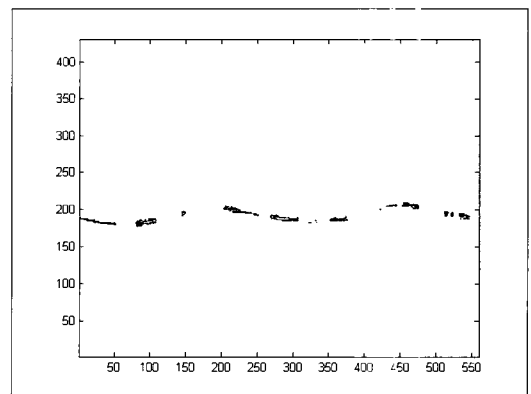


Fig. 11 Wave profile (Gray level<41, Gray level>191)

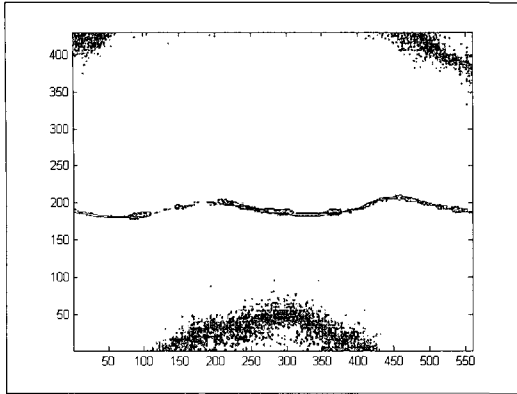


Fig. 12 Wave profile (Gray level<81, Gray level>151)

멕시코 모자 함수를 통한 이미지의 분석은 Fig. 13와 Fig. 14에서 보여주고 있다. 그림에서 보여 지는 바와 같이 이미지 상에서 그레이 레벨 상에 급격한 변화가 있는 부분만을 부각시켜서 우리가 얻고자 하는 수면 형상만 남도록 새로운 이미지를 구성시켜 주었다.

Fig. 15과 Fig. 16는 할로겐 램프를 조명으로 하여 얻은 이미지보다 더욱 2차원적인 파형 형상을 얻고자 수직으로 쏘아 올린 레이저 시트를 이용하여 수면에 대한 이미지를 취득한 것이다. 하지만 레이저 시트도 작지만 어느 정도 두께가 있어서 약간 두꺼운 파형을 얻게 되었고, 파형의 굴곡과 균일하지 못한 수조의 바닥조건으로 인해 고르지 않은 밝기의 파형을 얻게 되었다.

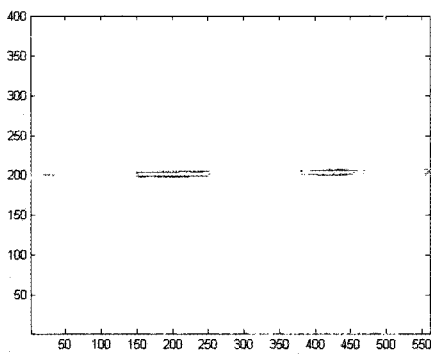


Fig 13. Detecting calm water surface with the mexican hat

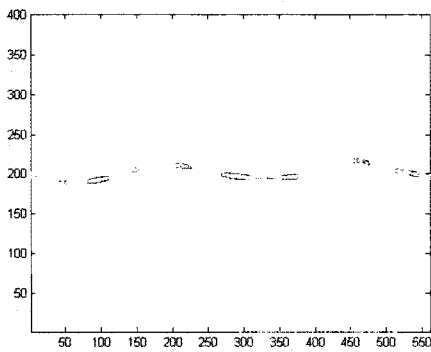


Fig 14. Detecting wave profile with the mexican hat

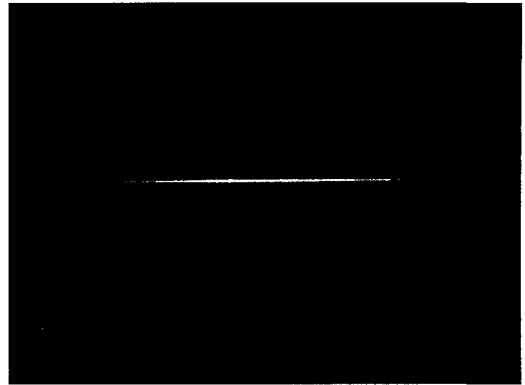


Fig 15. Calm water surface (laser)

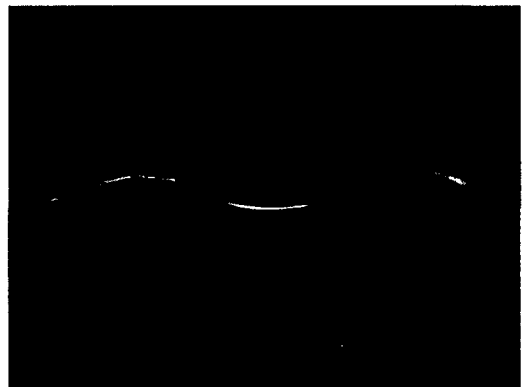


Fig 16. Wave profile (laser)

하지만, Fig. 17와 Fig. 18에서 보여 주는 바와 같이 수면을 잘 찾아주었으며, 눈으로는 인식이 약간 어려운 파형 부분까지 찾아내어 주었다.

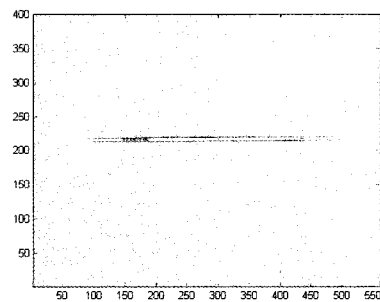


Fig 17. Detecting calm water surface with the mexican hat

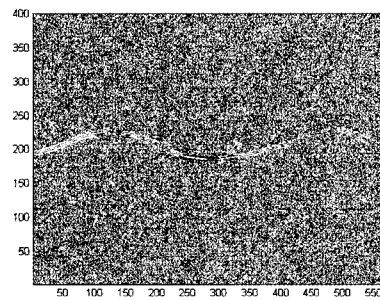


Fig 18. Detecting wave profile with the mexican hat

4. 결 론

파형에 대한 이미지를 분석하는데 있어 멕시코 모자 함수는 유용한 성질을 가지고 있다는 것을 확인할 수 있었다. 또한 이미지를 분석하는데 있어 복잡한 계수의 변화가 필요 없을 뿐만 아니라, 눈으로 인식이 가능하지 않은 부분까지 찾아 줄 수 있음을 알 수 있었다.

멕시코 모자 함수는 사진 촬영이 가능한 여러 가지 파형 분석에 있어 그 적용범위를 넓혀갈 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- Antoine, J.P., Carrette, P., Murenzi, R. and Piette, B. (1993). "Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform", *Signal Processing*, Vol 31, pp 241-272.
- Daubechies, I. (1986). "The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis", *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol 36, pp 961-1005.
- Daubechies, I. (1988). "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", *Commun. On Pure and Appl. Math.*, Vol 41, pp 909-996.
- Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*, SIAM.
- Grossmann, A. (1985). *Wavelet transform and edge detection*, in: Ph. Blanchard, L. Streit and M. Hazewinkel, eds., *Stochastic Processes in Physics and Engineering*, Reidel, Dordrecht.

2002년 9월 23일 원고 접수

2002년 10월 31일 최종 수정본 채택