

케이블지지교량의 초기형상 해석법에 대한 고찰



김 문 영*



김 호 경**

1. 서 론

최근들어 교량의 미적인 측면과 기능적인 측면이 강조됨에 따라 사장교 및 현수교로 대표되는 케이블지지교량에 대한 인식이 높아지고 있고 이에 대한 해석, 설계 및 시공 기술 또한 급속히 발전하고 있다. 케이블 지지교량은 구조형식에 따라 주탑 및 주형에 큰 압축력이 걸릴 수 있고 또한 변형성이 큰 케이블이 주부재 역할을 하므로 기하학적 비선형성이 크다. 또한 일반 교량에 비해 구조적 거동이 복잡할 뿐만 아니라 케이블 자체는 긴장력 없이 하중을 지지할 수 없는 구조부재이므로 케이블지지교량의 구조에 대한 정확한 이해 없이는 신뢰도 높은 해석을 수행하기가 곤란하다.

케이블지지교량의 구조강성을 좌우하는 초기장력은 결국 고정하중과의 평형에 의해 결정되는 것이므로 해석모델이 이를 적절히 반영할 수 있어야 한다. 따라서 일반 교량과는 달리 활하중 해석 전에 고정하중에 대한 초기평형상태를 구현해야 하는데 이 때 중요한 인자는 케이블을 포함한 교량의 목표 형상과 그 형상을 이루기 위해 케이블에

걸려야 하는 장력을 파악하는 것이라고 할 수 있다. 케이블지지교량에 대해 특별히 고려해야 하는 이러한 본 해석 전 과정을 초기형상 해석이라고 한다. 케이블지지교량은 크게 현수교와 사장교로 대별할 수 있으며 현수교는 다시 주케이블의 지지방법에 따라 타정식과 자정식으로 나뉘게 되는데 각 형식별로 초기형상 해석법의 적용 방안은 차이가 있을 수 있다.

본고에서는 현재까지 국내외에서 발표된 초기형상 해석법을 개략적으로 비교 소개하여 향후 유사한 구조계 해석 시 도움이 될 수 있도록 하였다. 특히 실무에서 많이 사용되고 있는 선형화유한변위이론보다는 엄밀한 대변위 비선형해석을 수행하기 위해 필요한 사항에 초점을 맞추어 정리하였다. 후자에 대한 문제를 해결할 수 있다면 전자의 해석에 필요한 모든 사항은 이미 다 얻었다고 보기 때문이다.

2. 초기형상 해석이란?

케이블지지교량을 해석하는 경우, 설계도면에

* 성균관대학교 토목환경공학과 교수

** 북포대학교 토목공학과 교수

제시되어 있는 절점좌표와 케이블 초기장력을 사용해 본 경험이 있을 것이다. 그렇다면 케이블지지 교량의 계획단계에서 경간길이나 종단경사, 주탑의 높이 등이 결정된 후 어떻게 절점좌표(특히 케이블 절점에 대해)와 케이블의 초기장력(또는 무응력 길이)을 산정하게 되었을까? 바로 이 값을 얻는 과정이 초기형상 해석이다.

전형적인 3경간 현수교의 경우에는 주경간 새그와 교량 전체의 고정하중 분포가 결정되면 주케이블의 형상과 무응력 길이는 힘의 평형으로부터 결정된다. 즉 주케이블의 형상을 설계자가 임의로 만들어 낼 수 없다. 따라서 이에 따른 형상 결정법이 필요한 것이다. 반면 사장교의 경우에는 케이블의 장력을 조절함으로써 주탑이나 주형에 걸리게 될 휨모멘트나 변위를 제어할 수 있으며 이 또한 형상 결정법과 관련되는 사항이다.

일단 적절한 접근법에 따라 케이블의 형상과 무응력 길이, 그리고 사장교의 경우 케이블의 초기 긴장력을 결정하게 되었다 하더라도 해석적인 관점에서 볼 때, 해석모델이 목표형상을 유지한 채 고정하중과 부재내력 사이에 자체 평형(self-equilibrium) 상태에 놓일 수 있도록 배려해 주어야 할 것이다. 이는 특히 사장교나 자정식 현수교와 같이 주탑 외에도 주형에 큰 압축력이 걸리는 경우에 고정하중이 재하된 상태에서 비선형해석을 수행할 경우 수립된 구조계가 설계도면 상의 목표형상과 다르게 될 뿐 더러 케이블의 장력도 변화하게 되기 때문이다. 이는 결과적으로 추가 활하중이나 해체단계 해석의 신뢰도를 저하시키는 요인이 될 수 있다.

초기형상해석은 일반 기하학적 비선형해석과 유사하지만 통상적인 경계조건에 의한 절점변위 이외에 목표 초기형상에 따라 추가적으로 절점변위 값이 결정되어 있다는 점에서 큰 차이가 있다. 설계 시에는 대부분 선형화유한변위이론에 따라 선형해석을 수행하고 있기 때문에 초기형상 해석에 대한 중요도가 상대적으로 덜 강조되고 있지만 보다 다양한 구조형식으로 변화하고 있는 현재의 추세를 감안한다면 관련 연구가 지속될 필요가 있다고 판단된다.

3. 초기형상 해석법

3.1 관련 연구

현재까지의 발표된 초기형상 해석법은 대략 3~4 모델로 구분할 수 있다. 초기에 사용되었던 모델은 현수교의 단위길이 당 고정하중 분포가 일정하다는 가정 아래 포물선 형상으로 좌표를 산정하고 주케이블 장력을 결정하는 정도였다. 고정하중에 대한 비선형 구조해석 결과 변형이 어느 이상 발생할 경우 시산법(Trial-and-Error Method)으로 보정하는 것이 일반적이었다(Kim, 1993). Karoumi(1999)의 연구도 시산법을 적용한 점에서 이 연장선 위에 있다.

전형적인 타정식 현수교와는 달리 사장교는 주형에 큰 압축력이 작용하므로 고정하중에 대한 해석 후 축방향 변형이 발생하게 된다. 이를 제어하기 위해 제안된 방법이 뼈대 부재에 초기부재력을 도입하는 방법이었다. 초기부재력 도입방법은 해석 처음 단계에서는 초기부재력이 없는 상태에서 비선형 해석을 수행하고, 그 후 단계부터는 전 단계 비선형 해석을 통하여 얻어지는 부재력을 초기부재력으로 가정하여 해석 모델에 도입한 후 다시 비선형 해석을 반복하여, 가정한 초기부재력에 의하여 원하는 목표형상을 이룰 수 있을 때까지 비선형해석을 반복하는 해석방법을 의미한다. Wang 등(1993; 1996)은 초기부재력법을 이용하여 사장교의 초기형상을 결정하였다. 이때 변화되는 케이블의 장력은 Ernst의 등가트러스요소를 사용하여 보정하였다. 국내에서도 탄성현수선과 박벽보-기둥요소를 사용한 모델링 방안이 1980년대부터 연구되기 시작하였다. 영종대교는 전 세계적으로 드문 자정식 현수교였으며 초기부재력 도입방법은 보강형에 큰 압축력이 작용하는 이 교량의 연구에도 적용되었다(Kim and Chang, 1997). 마찬가지로 동일한 요소로 사장교를 모델링하고 실제에 가까운 초기 장력값을 구하여 사장교의 초기형상을 결정하는 초기부재력법도 발표되었다(Kim and Chang, 1999).

영종대교는 자정식 현수교라는 특징 외에도 주케이블이 주탑 위 새들에서 모였다가 교량 중앙부에서는 펼쳐지고 다시 새들에 모이는 3차원 형상

이며 단위 길이 당 고정하중 분포도 일정치 않아 형상해석에 더욱 관심을 갖게 되었다. 이 교량을 설계했던 Ohtsuki 박사는 구조해석이 아닌 힘의 평형조건으로부터 3차원 형상의 좌표와 케이블 장력 산정법을 소개한 바 있고, 이를 보완하고 비선형 케이블망 해석을 추가하여 더 엄밀한 형상을 찾는 방안이 국내에서 발표되었으며(Lee, 1998; Kim 등, 2002) 이 방법은 영종대교 가설시 형상관리에 성공적으로 적용되었다. 케이블 형상결정에 시산법을 활용하였고 축방향 변위는 초기부재력 도입으로 억제한 방법이었다.

유사하게 탄성현수선요소와 보-기둥요소를 사용하되 다른 접근방법으로 형상결정을 수행한 논문도 발표되었다. Kim과 Lee(2001)는 영종대교에 적용되었던 방법과는 달리, 케이블의 무응력길이를 변수로 추가하고 그 갯수에 해당하는 절점변위를 구속하여 초기형상해석을 수행하였다. 이 논문에서는 목표형상을 TCUD(Target Configuration Under Dead load)로 정의하였으며 이하 본고에서는 이 방법을 TCUD법으로 명명하였다. TCUD해석법은 수렴속도가 빠르고 초기 장력크기에 좌우되지 않지만 사장교와 자정식 현수교의 경우 주형과 주탑의 압축력으로 인한 변위를 제어할 수 없다.

가장 최근에 수행된 연구로는 앞서 언급한 TCUD 방법에 초기부재력법을 효과적으로 결합한 방법을 들 수 있다(Kim et al., 2003). 이 방법도 역시 탄성현수선요소와 박벽보-기둥요소를 기본으로 제안되었다. 케이블의 형상결정은 TCUD 방법을 사용하여 정확성과 효율성을 개선하였으며 초기부재력 도입으로 사장교나 자정식 현수교에도 적용될 수 있는 방법이다.

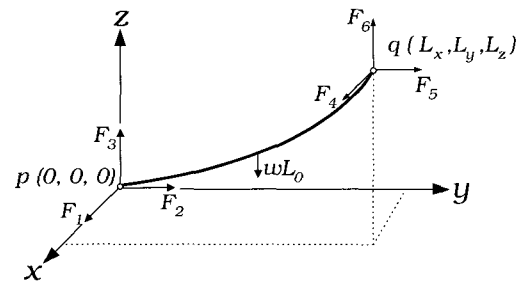
이하 현재까지 발표된 방법들에 대한 간략한 이론적 배경을 정리하였다.

3.2 케이블의 모델링

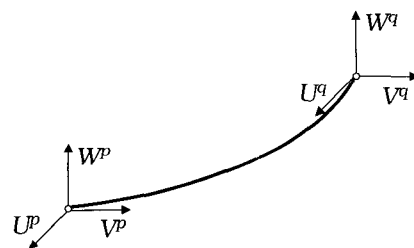
케이블지지교량의 주요부재인 케이블의 모델링을 위해 몇 가지 모델을 고려할 수 있다. 트러스-케이블요소는 계산하기에 다소 간단하며, 케이블해석을 보다 쉽게 할 수 있다. 탄성현수선 케이블요소는 Irvine(1981)의 자중을 받는 2차원 탄성현수

선이론이 제시된 이후, 사장교 케이블 및 현수교의 주케이블을 모델링하기 위해 사용되었다. 탄성현수선 요소는 자중을 받는 정적 케이블거동을 엄밀하게 파악할 수 있다(Ahn, 1990). 탄성현수선 케이블요소는 케이블의 거동을 가장 실제적으로 모사할 수 있는 반면 케이블에 대한 인식이 부족한 경우에는 사용이 어렵게 느껴질 수 있고, 또한 일부 계산시 수렴성에 문제가 발생할 수 있다.

그림 1과 같이 케이블은 두 개의 고정된 점 p와 q의 사이에 걸려있다고 가정한다. 케이블요소는 기본적으로 무응력길이 L_0 와 케이블 각각의 장력성분을 미지수로 사용하여 해석한다. 이때 케이블요소의 적합방정식을 유도한후, 이를 이용하여 탄성현수선요소의 증분방정식을 얻는다.



(a) 자중을 받는 탄성현수선 케이블요소



(b) 탄성현수선 케이블요소의 부재변위 벡터

그림 1

3.3 뼈대부재의 모델링

주탑과 보강형을 모델링하기 위해 일반적으로 3차원 보-기둥요소를 사용한다. 그림 2는 보-기둥요소의 절점변위와 부재력벡터를 나타낸다. 보-기둥요소의 전체 포텐셜에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

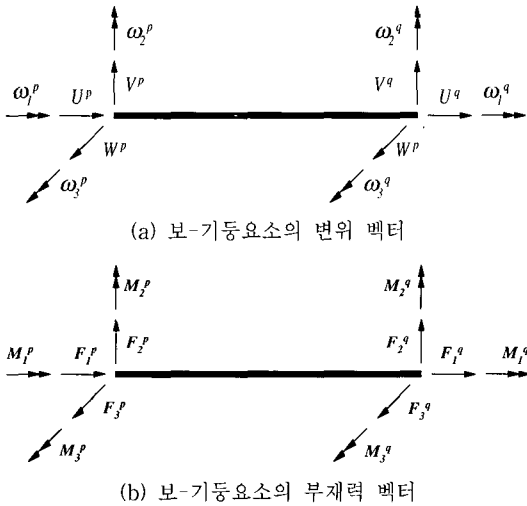


그림 2

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G - \Pi_{ext} \quad (1)$$

여기서 Π_E , Π_G 와 Π_{ext} 는 각각 선형탄성에너지와 증분부재력에 의한 비선형 탄성에너지, 그리고 외력에 의한 포텐셜에너지를 나타낸다.

보-기둥요소를 유한요소로 나누어 요소의 변위장은 요소변위벡터에 관한 Hermitian 다항식으로 나타낸다. 이때 축방향변위 및 비틀회전각에 대해서는 1차, 두 직각방향의 횡변위에 대해서는 3차 Hermitian 다항식을 각각 사용하여 탄성 및 기하학적 강도행렬을 유도한다. 여기서 유도된 다항식들을 이용하여 증분평형방정식을 얻는다. 보-기둥요소의 부재력 산정시 Updated Lagrangian corotational formulation에 근거한 반복계산에서 총 부재력은 이전 단계에서 부재력에 증분부재력을 더하여 구한다(Kim and Ahn, 1997).

3.4 기하학적 비선형 해석법

일반적으로 기하학적 비선형 유한요소해석은 총 해석의 범위를 몇몇의 증분단계로 나누어 해석한다. 이때 각각의 증분단계별 반복계산은 아래 식과 같이 Newton-Raphson 방법을 사용하여 불평형하중을 구하고, 평형조건을 만족할 때까지 반복해석을 수행한다. 아래의 식은 일반적인 기하학적 비선형 해석 과정을 보여주고 있다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \\ & \quad i = 1, 2, \dots \\ {}^{t+\Delta t}U^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \end{aligned} \quad (2)$$

초기조건 :

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}U^{(0)} &= {}^tU ; \\ {}^{t+\Delta t}K^{(0)} &= {}^tK ; \quad {}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^tF \end{aligned}$$

여기서, 첨자 $(i) = (i)$ 번째 반복계산 과정; tK =구조물의 접선강성행렬; tU 와 ΔU =구조물의 총 절점 변위와 증분 절점변위벡터; ${}^{t+\Delta t}R$ =외력벡터; tF =부재력으로 인한 절점력벡터를 나타낸다.

케이블 장력의 초기값을 얻거나 시산법 및 초기 부재력법을 적용하는 경우 케이블 부재의 무응력 길이가 일정하다는 가정 하에 고정하중을 받는 케이블지지교량의 기하학적 비선형 해석을 수행할 필요가 있다. 아래 식과 그림 3은 Newton-Raphson 방법에 근거하여 고정하중 R 을 일시에 받는 케이블지지교량의 기하학적 비선형 해석과정을 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned} K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} &= R - F^{(i-1)} \\ & \quad i = 1, 2, \dots \\ U^{(i)} &= U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \end{aligned} \quad (3)$$

초기조건 :

$$U^{(0)} = 0 ; K^{(0)} = K({}^0F) ; F^{(0)} = 0$$

여기서, 0F =케이블의 초기장력 만으로 구성된 절점력벡터; $K^{(0)} = {}^0F$ 에 의존하는 강성행렬이다.

3.5 초기부재력법

일반적으로 앞 절의 고정하중을 받는 케이블지지교량의 기하학적 비선형해석 방법을 적용하는 경우에 타정식 현수교의 경우 보강형, 자정식 현수교 및 사장교의 경우에는 주형과 주탑이 수평 및 수직방향의 변위를 수반하기 때문에 설계목적에 부합하는 초기형상을 찾기 어렵다. 따라서 케이블지지교량에 적용하는 초기부재력법은 이러한 변위

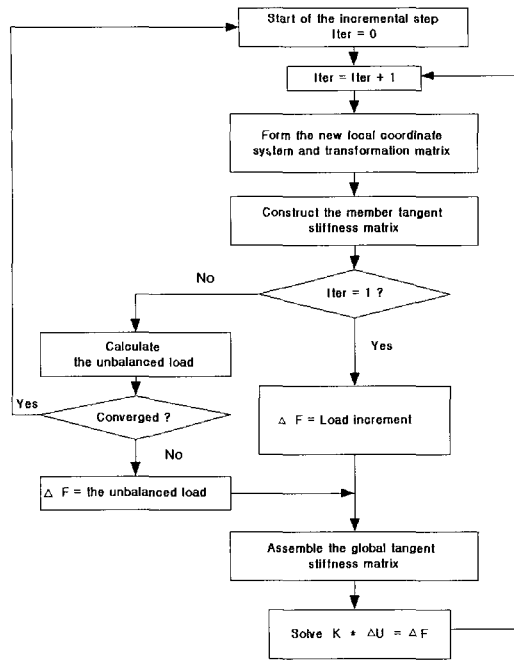


그림 3 기하학적 비선형 해석 알고리즘

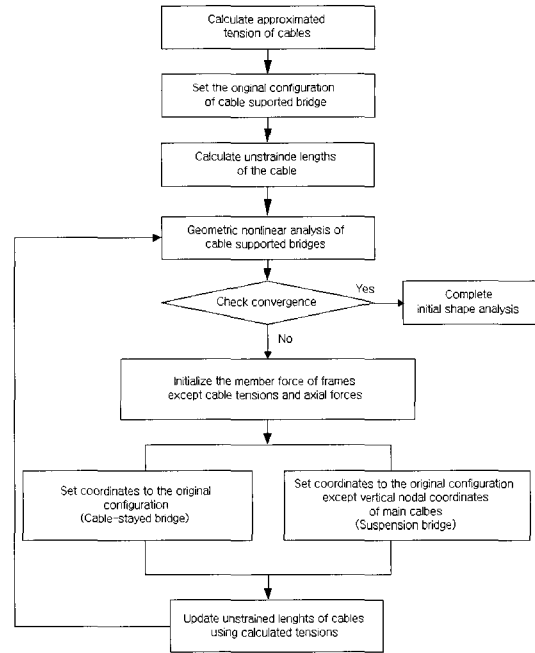


그림 4 초기부재력법 알고리즘

를 최소화하기 위하여 기하학적 비선형해석에 의하여 수렴한 부재력 즉, 케이블 장력, 축력 및 휨모멘트 등을 다시 초기 부재력으로 사용하고, 모든 절점변위는 영으로 취한 상태에서 고정하중 작용하의 새로운 평형형상을 결정하는 비선형 해석을 재차 수행한다. 이렇게 하여 가정된 초기부재력에 의하여 원하는 초기형상이 찾아질 때까지 비선형 해석을 반복하게 되며, 이와 같은 과정을 몇 번 반복하면 주형의 처짐과 주형 및 주탑의 휨모멘트가 감소하여 완성계의 초기형상 가정에 근접하는 해를 얻을 수 있다. 이 방법은 초기형상에 근접하는 초기 케이블 장력 값을 얻을 수 있어야 정확도를 향상시킬 수 있다. 그리고 축방향 변위를 감소시키는 용이하지만 휨모멘트로 인한 변형을 감소시키는 것이 어려운 단점이 있다.

초기부재력법은 다음 식과 그림 4로 나타낼 수 있다.

$${}^k\mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{R} + {}^{k-1}\mathbf{F}^* - \mathbf{F}^{(i-1)}$$

$$i=1, 2, \dots ; k=1, 2, \dots$$

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (4)$$

초기조건 :

$${}^k\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{0} ; {}^k\mathbf{K}^{(0)} = \mathbf{K}({}^k\mathbf{F}^*) ; {}^k\mathbf{F}^{(0)} = \mathbf{0}$$

여기서, 윗첨자 k =고정하중을 다시 재하하는 횟수 ; ${}^k\mathbf{F}^*$ 는 $k-1$ 번째 단계에서 수렴된 주형과 주탑의 축방향력으로 구성되는 절점력벡터이다.

3.6 TCUD 법

TCUD 해석법은 케이블지지 구조물에서 절점변위 이외에 케이블의 초기장력이나 무응력길이를 미지수로 추가하고, 케이블 부재 개수만큼 절점변위를 구속하여 Newton-Raphson 반복법을 적용함으로써 케이블의 무응력길이와 장력 등을 효과적으로 결정하는 방법이다.

케이블 및 보-기둥부재의 증분방정식을 이용하여 케이블지지교량의 전체의 증분평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_t \Delta \mathbf{U} + \mathbf{K}_l \Delta \mathbf{L}_0 \quad (5)$$

여기서, $\Delta \mathbf{F}$ = $n \times 1$ 증분외력 또는 불평형하중벡터;

$K_t, K_l =$ 각각 구조물의 $n \times n$ 접선강성행렬과 무응력길이에 대응하는 $n \times m$ 강성행렬; $\Delta U, \Delta L_0 = n \times 1$ 절점변위벡터, $m \times 1$ 무응력길이벡터; $n =$ 절점의 총수 $\times 6$; $m =$ 케이블부재의 개수이다. 윗 식은 조건식에 비하여 미지수가 케이블부재 개수인 m 만큼 많으므로 이 숫자만큼 절점변위를 구속할 수 있다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta F = K_{tu} \Delta U_u + K_{ts} \Delta U_s + K_l \Delta L_0 \quad (6)$$

여기서, $\Delta U_u, \Delta U_s =$ 각각 미지수인 $(n-m) \times 1$ 절점변위, 구속되는 $m \times 1$ 절점변위벡터를 나타낸다. 따라서 식(6)에서 세 번째 항은 사라지고, 나머지 두 개의 항은 아래 식과 같이 비대칭 강성행렬을 구성하게 된다.

$$\Delta F = [K_{tu} \quad K_l] \begin{pmatrix} \Delta U_u \\ \Delta L_0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

여기서, m 개의 미지수 L_0 에 대응하여, m 개의 구속조건을 도입한다. 구속조건을 대입하면, 그 부분의 변위는 영이 되며, 이때 각 케이블에 대응하는 미지수 L_0 를 구속조건에 일대일 대응시킨다. 일대일 대응시킨 식을 이용하여 연립방정식을 풀면, 각각의 p 와 q 의 위치와 현재의 길이 L_0 를 결정할 수 있다. 이때 결정된 좌표와 무응력길이를 가지고 Newton-Raphson 방법을 이용하여 각각의 절점력을 구한다.

TCUD해석법은 케이블의 구조물에서 케이블의 초기장력과 무응력길이를 모두 미지수라 가정하므로, 평형방정식의 수보다 미지수의 수가 더 많은 부정방정식이 된다. 따라서 케이블의 요소 개수만큼의 기하학적으로 제어시킨 조건식이 필요하다. 따라서 구조물의 기하학적인 특성을 이용하여 그 미지의 무응력길이와 장력을 Newton-Raphson 방법에 의해 결정할 수 있는 방법이다.

그림 5에 보인 바와 같이 사장교의 기하학적 구속조건은 다음과 같다. 케이블의 개수만큼 미지수가 생기므로 구속조건이 필요하다. 여기서, 주탑 꼭대기의 수평변위와 맨 좌측 케이블의 구속조건을 제

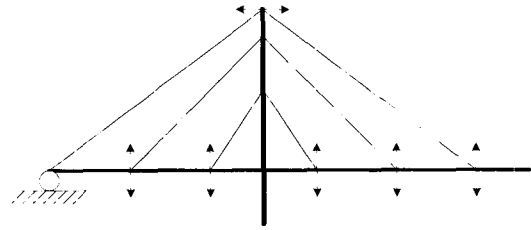
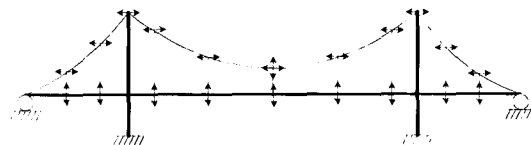


그림 5 사장교의 기하학적인 구속조건

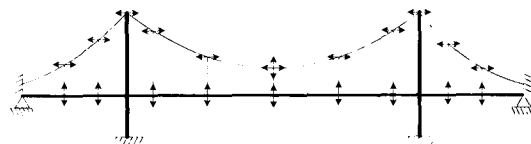
위한 각 케이블의 주형의 수직변위를 제어시킨다. 이렇게 함으로써 초기형상 결정조건에 맞는 주탑 및 주형의 변위를 최소화 시킬 수 있기 때문이다.

그림 6에 보인바와 같이 자정식과 타정식 현수교의 기하학적 구속조건은 다음과 같다. 케이블의 개수만큼 미지수가 생기므로 구속조건이 필요하다. 현수교의 경우는 사장교와는 달리 주케이블과 행어로 구성되어 있기 때문에 행어의 경우는 주형의 수직변위를 제어함으로써 미지조건을 활용할 수 있다. 그리고 주케이블의 경우는 절점의 수평변위와 현수교의 새그가 기하학적 구속조건으로 주어지므로 새그의 위치에서 수직변위를 제어함으로써 미지조건을 충족시킬 수 있으며, 결과적으로 주탑의 수평변위 및 주형의 수직변위를 최소화시킬 수 있다.

우선 유한 요소 절차를 사용하기 위해 절점력의 증분항을 사용하여 케이블요소의 무응력 길이와 절점좌표의 증분 항으로 표현한 전체 증분평형방정식을 도출할 수 있다.



(a) 자정식 현수교의 기하학적인 구속조건



(b) 타정식 현수교의 기하학적인 구속조건

그림 6

$$\begin{aligned}
 K_u^{(i-1)} \Delta U_u^{(i)} + K_l^{(i-1)} \Delta L_0^{(i)} &= R - F^{(i-1)} \\
 i &= 1, 2, \dots \\
 U^{(i)} &= U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \\
 U_o^{(i)} &= U_o^{(i-1)} + \Delta U_o^{(i)}
 \end{aligned} \tag{8}$$

초기조건 :

$$U^{(0)} = 0 ; K^{(0)} = K^{(0F)} ; F^{(0)} = 0$$

여기서, ΔF =전단계에서의 불평형하중벡터; ΔU^u =미지절점 증분변위벡터; ΔU^s =케이블 부재의 개수와 동일한 기지의 절점증분변위벡터; ΔL_0 =케이블 길이 증분벡터이다. 이때, ΔL_0 는 그림 6에서 보듯이 케이블 개수만큼의 제한조건식을 나타낼 수 있는데, 그 구속조건을 도입하면 그 부분에서의 변위는 영(zero)이 되므로 위의 증분평형방정식에 케이블의 요소만큼의 미지수가 첨가된다. 일반적인 경계조건은 Penalty Method를 사용하여 구속하였다. 여기서, 케이블 개수만큼의 미지수를 L_0 에 대응하여, 구속조건을 대입하면, 그 부분의 변위는 영이 되며, 이때 각 케이블에 대응하는 미지수 L_0 를 구속조건에 일대일 대응시킨다. 일대일 대응시킨 식을 이용하여 연립방정식을 풀면, 각각의 절점단부에서의 위치와 현재의 길이 L_0 를 결정할 수 있다. 이때 결정된 좌표와 무용력길이로부터 Newton-Raphson 방법을 이용하여 각각의 절점력을 구한다.

3.7 초기부재력법과 TCUD법을 결합시킨 방법

3.5, 3.6절에서 살펴본 바와 같이 초기부재력법은 주형 및 주탑의 축방향변형을 제거할 수 있다. 또한, TCUD법은 주형 및 주탑의 휨변형을 최소화시킬 수 있다. 따라서 초기부재력법과 TCUD법을 결합시켜 현수교와 사장교의 형상해석에 효과적으로 활용할 수 있다.

3.7.1 현수교

1) 먼저 주케이블을 트러스 또는 탄성현수선요소, 행어는 트러스요소, 그리고 주형과 주탑은 3차원의 뼈대요소를 사용하여 모델링하고 고정하중하에서 기하학적 선형해석을 수행하

여 수렴된 장력값을 초기장력값으로 사용한다. 이때 계산되는 케이블 장력값이 최종적으로 수렴된 값에 가깝게 되도록 하기 위하여, 케이블 강성은 변동이 없지만 주형 및 주탑의 휨강성은 1/10로 감소시키고 축강성은 10^{10} 배 증가시킨다. 아울러, 중앙경간과 측경간의 주케이블의 수직좌표는 다음과 같이 포물선식으로부터 결정한다. 즉, 중앙경간의 새 그위치에서 좌표원점을 취할 때,

$$z = \frac{w_c}{2T} x^2 \tag{9}$$

이다. 여기서, $T = \frac{w_c L_c^2}{8h_c}$; w_c =중앙경간의 단위길이당 고정하중; L_c =중앙경간의 길이; h_c =새그의 길이이다. 그리고 측경간의 경우는 주케이블의 정착단을 원점으로 취하여 수직좌표는

$$z = \frac{w_s}{2T} x^2 + \left(\frac{h_s}{L_s} - \frac{w_s L_s}{2T} \right) x \tag{10}$$

이다. 여기서, T =중앙경간의 장력; w_s =측경간의 고정하중; L_s =측경간의 길이; h_s =정착단으로부터 주탑상부까지의 상대적인 높이이다.

2) TCUD법에 근거한 평형반복계산:

- i. 케이블의 무용력길이를 변수로 취급하여 케이블 교량 전체의 접선강성행렬을 산정한다. 여기서 접선강성행렬은 비대칭행렬이 된다.
- ii. 경계조건 이외에 케이블 개수만큼의 절점변위를 설계자의 초기형상에 가깝게 되도록 추가적으로 절점변위를 구속하여 절점변위 및 무용력길이의 증분을 산정한다.
- iii. i 과 ii를 토대로 케이블 부재력과 주형 및 주탑의 부재력을 산정한다.
- iv. 구조물 전체의 증분평형방정식으로부터 부재력과 불평형하중을 산정하고,
- v. 수렴이 될 때까지 다시 반복계산을 한다.

3) 초기부재력법 적용: 수렴이 되었을 때 사장교 및 자정식 현수교는 주탑, 주형 그리고 타정식 현수교는 주탑이 압축력을 받아 변위를 일으킨다. 이때 축방향변위를 제거하기 위하여 초기부재력 즉, 주형, 주탑의 압축력과 케이블장력은 수렴된 값을 취하고, 주케이블의 수직좌표를 제외한 모든 절점좌표를 처음 위치로 환원시켜 다시 비선형 반복계산을 수행하면 설계자가 의도하는 초기형상에 가장 근접한 해석결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & {}^k K_u^{(i-1)} \Delta U_u^{(i)} + {}^k K_g^{(i-1)} \Delta L_0^{(i)} \\
 & = R + {}^k F^* - {}^k F^{(i-1)} \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots \\
 & U^{(i)} = U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \\
 & L_o^{(i)} = L_o^{(i-1)} + \Delta L_o^{(i)} \qquad (11)
 \end{aligned}$$

초기조건 :

$$U^{(0)} = 0 ; K^{(0)} = K(F) ; F^{(0)} = 0$$

3.4.2 사장교

1) 케이블 장력의 초기값 산정:

먼저 케이블을 트러스요소, 주형과 주탑은 3차원 보-기둥요소를 사용하여 모델링하고 고정하중하에서 기하학적 비선형해석을 수행하여 장력의 초기값을 결정한다.

2) TCUD법에 근거한 평형반복계산:

- i. 케이블의 무응력길이를 변수로 취급하여 사장교 전체의 접선강성행렬을 산정한다. 이때 강성행렬은 비대칭행렬이 된다.
- ii. 경계조건 이외에 케이블 개수만큼의 절점변위를 설계자의 초기형상에 가깝게 되도록 추가적으로 절점변위를 구속하여 절점변위 및 무응력길이의 증분을 산정한다. 이때 구속되는 절점의 자유도는 그림 5에 표시되어 있다. 특히, 지점부에 연결된 케이블에 대응하는 구속변위는 주탑상부의 수평변위가 된다.
- iii. i 과 ii를 토대로 케이블 부재력과 주형 및

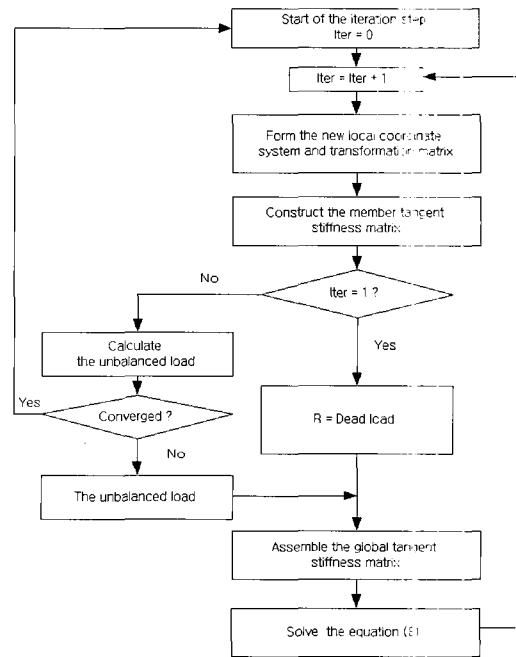


그림 7 TCUD법 알고리즘

주탑의 부재력을 산정한다. 특히 탄성현수선 케이블요소를 적용하는 경우에, 무응력길이와 케이블 양 절점의 상대적인 위치가 ii.로부터 결정되므로 케이블요소의 적합방정식을 사용하여 케이블 부재력을 결정한다.

- iv. 구조물 전체의 증분평형방정식으로부터 부재력과 불평형하중을 산정하고,
- v. 수렴이 될 때까지 다시 반복계산을 한다.

3) 초기부재력법 적용:

수렴이 되었을 때 주탑, 주형은 압축력을 받아 변위를 일으킨다. 이때 축방향변위를 제거하기 위하여 초기부재력 즉, 주형 및 주탑의 압축력과 케이블장력은 수렴된 값을 취하고 모든 절점좌표를 처음 위치로 환원시켜서 다시 TCUD법에 근거한 비선형 반복계산을 수행한다. 이때 초기부재력으로 취하는 주형 및 주탑의 압축력은 k 번째 단계의 (i) 번째 반복계산시 주형 및 주탑의 초기변형이 영인 상태에서 압축력으로 간주한다. 이를 아래식(12)과 그림 8로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & {}^k K_u^{(i-1)} \Delta U_u^{(i)} + {}^k K_g^{(i-1)} \Delta L_0^{(i)} \\
 & = R + {}^{k-1} F^* - {}^k F^{(i-1)} \\
 & \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots \\
 & U^{(i)} = U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \\
 & U_o^{(i)} = U_o^{(i-1)} + \Delta U_o^{(i)}
 \end{aligned} \tag{12}$$

초기조건 :

$$U^{(0)} = 0 ; K^{(0)} = K(^o F) ; {}^k F^{(0)} = 0$$

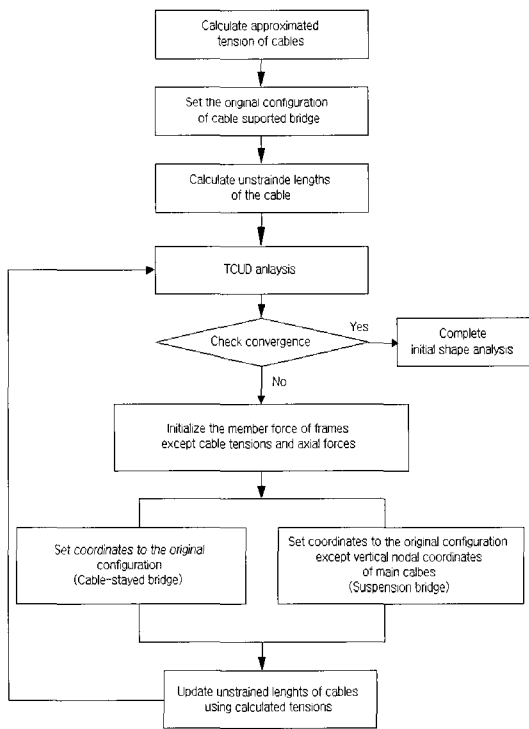


그림 8 초기부재력법과 TCUD법의 결합

4. 결 론

케이블지지교량은 일반 교량에 비해 설계·해석 하기에 상당한 어려움이 있다. 왜냐하면, 첫째로 케이블지지교량의 주요부재중 케이블을 해석하는데 상당한 어려움이 있으며, 둘째로, 초기 입력데이터의 정확한 파악없이 케이블지지교량의 정확한 완성계해석을 할 수 없기 때문이다.

케이블지지교량의 설계개념은 우선 초기형상 해석을 어떻게 수행을 하느냐에 있다. 즉 반드시 초

기형상해석을 수행한 이후 케이블지지교량의 분석을 할 수 있다는 의미이다. 앞에서 언급했듯이 케이블지지교량의 초기형상해석이라는 의미는 완성된 구조계에서 고정하중에 의해 발생하는 케이블 지지교량의 주형 및 주탑에 발생하는 휨모멘트와 변위가 최소화되면서 고정하중과 평형을 이룰 수 있는 케이블 장력과 무응력길이를 결정하는 것이므로, 설계전 반드시 정확한 교량 제반사항에 대한 정확한 데이터를 기초로 한다.

마지막으로 본고에서 설명한 여러 초기형상 해석법중 초기부재력법과 TCUD법을 결합한 해석법의 특징을 간단히 적는다.

- 1) 첫 번째 단계에서 TCUD법을 적용함으로써 주케이블의 새그크기와 수평좌표에 대한 구속조건을 만족시킬 수 있을 뿐만 아니라, 주형의 수직처짐, 주탑 상부의 수평변위를 완전히 제어할 수 있다. 따라서 주탑, 주형부의 휨모멘트를 최소화할 수 있으며, 비교적 균일한 사장재 및 현수교의 행어 장력값을 얻을 수 있다.
- 2) TCUD법을 적용한 이후에 반복적으로 주형 및 주탑의 축방향력만을 초기부재력을 취하여 초기부재력법을 적용하여 주형 및 주탑의 축방향 변위를 만족할 만한 정도로 제어할 수 있다.

참 고 문 헌

1. H. Max Irvine, Cable Structures, MIT Press, 1981
2. Karoumi R., Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges, Computer & Structures Vol. 34, 1999, pp.257~271
3. Kim, Ki-Seok, Lee, Hae-Sung, Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges, Computer & Structures, Vol. 79, 2001, pp.2681~2692
4. Kim, Ho-Kyung, Lee, Myeong-Jae, Chang, Sung-Pil, Nonlinear shape-finding analysis of

- a self-anchored suspension bridge, *Engineering Structures*, 24, 2002, pp.1547~1559
5. Wang. P. H., Tseng. T. C. Yang. C. G., Initial Shape of Cable-Stayed Bridges, *Computer & Structures*, Vol. 46, No. 6, 1993, pp.1095~1106
 6. Wang. P. H., Yang. C. G., Parametric Studies on Cable-Stayed Bridges, *Computer & Structures*, Vol. 60 No. 2, 1996, pp.243~260
 7. 김문영, 경용수, 이준석, 현수교의 개선된 초기형상 해석법, *한국강구조학회 논문집*, 2003, 심사중
 8. 김문영, 경용수, 이준석, 사장교의 개선된 초기형상 해석법, *한국강구조학회 논문집*, 2003, 심사중
 9. 김문영, 안성원, 공간뼈대구조의 기하학적 비선형유한요소해석, *한국전산구조공학회 논문집*, 제10권, 제1호, 1997, pp.201~211
 10. 김제춘, 장승필, 초기부재력을 이용한 사장교의 초기형상 및 캠버량 결정, *대한토목학회 논문집*, 제19권 제 I -3호, 1999, pp.377~386
 11. 김호경, 현수교의 정적 비선형 해석 및 초기평형상태의 결정, *한국강구조학회 논문집*, 제5권 제2호, 1993, pp.177~186
 12. 김호경, 장승필, 초기축력을 도입한 자정식 현수교의 초기형상 결정, *대한토목학회 논문집*, 제17권, 제I-2호, 1997, pp.197~205
 13. 안상섭, 탄성현수선 케이블요소를 이용한 3차원 케이블망의 정적 및 동적 비선형해석, *서울대학교 석사학위논문*, 1990
 14. 이명재, 초기평형상태를 이용한 현수교의 시공단계 해석 및 시공오차 관리, *서울대학교 박사학위논문*, 1998 