韓國電磁波學會論文誌 第13卷 第8號 2002年 9月 論文 2002-13-8-14

Duffy 방법을 이용한 임의 형상 도체의 전자파 산란 해석

Analysis of Electromagnetic Scattering from an Arbitrarily-Shaped Conductor using Duffy's Method

이 승 학 · 김 채 영 · 이 창 원

Seung-Hak Lee · Che-Young Kim · Chang-Won Lee

요 약

임의 모양의 완전도체의 전자파 산란을 해석하기 위하여 모멘트 방법을 이용하였다. GID(Graphic Interface Design)툴을 이용하여 설계된 금속 도체의 표면은 서로 다른 모양의 삼각패치로 모델링 되었다. 도체 표면전류는 삼각패치의 벡터 기저함수로 확장되었다. 관측점과 전원점이 동일 삼각패치에 위치할 때, 삼각패치의 특이점 적분은 Duffy 방법을 이용하여 특이점이 없는 적분으로 변환이 가능하였고, 변환된 특이점 항들은 1차원의 가우시안 구적법을 이용하여 간단하게 계산되어질 수 있었다. 특이점을 제외한 적분들은 2차원 가우시안 구적법으로 계산되었다.

Abstract

The method of moment is applied to the analysis of electromagnetic scattering from an arbitrarily-shaped conductor. The conducting surface is discretized into triangular patches using a GID tool. Surface currents on a conductor are expanded with a vector triangle basis function. By using the Duffy's method, the singular integration appeared in a triangle patch can be transformed into the non-singular integral form suitable for one dimensional Gaussian quadrature integration method. Mutual and self integration extracted singular terms are evaluated by two dimensional Gaussian quadrature techniques.

Key words : EFIE, Duffy, Singular, Scattering

I. 서 론

본 논문은 임의 모양을 가진 금속 도체의 산란문제를 풀기 위해서 모멘트 방법을 이용하였다[1]. 이 방법은 오래 전부터 많이 다루어져 왔던 저주파 해석 방법으로서, 주로 비교적 사용파장에 비해 작은 구조와 간단한 모양의 구조 해석에 이용되어 왔다. 근래에는 실제구조의 전자파 산란문제를 해석하기 위해서 상용 툴을 사용하여 실제 구조와 같은 모양으로 모델링하고 있다. 이들은 실제 구조의 표면을 요소화하고 각 요소의 좌표값과 필요한 정보를 제공하는 전처리기로 이용된다. 본 논문에서 금속 도체는 일반적인 상용 툴인 GID(Graphic Interface Design)를 이용하여 모델링하였다[2]. 금속 표면은 삼각패치로 요소화하였으며, 임의 모양을 가진 각 삼각형의 꼭지점 좌표값과 삼각형 번호에 해당하는 꼭지점 번호를 생성시킨다.

금속 표면의 표면 전류를 삼각패치의 벡터 기저함수로 표현하였다[3],[4]. 한 개의 기저함수는 하나의 모서리를 공유하는 두 개의 삼각형으로 이루어져 있다. 따라서 각 행렬요소는 면적분 형태를 가지고 있으며 일반적으로 2차원의 가우시안 구적법에 의

경북대학교 전자전기컴퓨터학부(School of Electrical Engineering and Computer Science, Kyungpook National University)

· 논 문 번 호 : 20020615-068
· 수정완료일자 : 2002년 7월 25일

하여 계산되어지고, 본 논문에서는 7개의 샘플점에 대하여 계산하였다[5]. 셀프항의 면적분은 일반적인 닫힌 형태의 식으로 표현이 되지만 이는 복잡한 수식 전개과정이 필요하다[3]. 그러나 본 논문에서는 특이점이 포함된 셀프항의 면적분을 Duffy 방법을 이용하여 특이점이 없는 적분으로 변환을 하였다[6]. 이 경우 복잡한 수식이 단순화되며 그 결과식은 1차원 가우시안 구적법으로 표현된다. 본 논문에서는 유도된 적분식을 5개의 샘플점에 대하여 수치 적분하였다.

수치해석 결과는 이등변 삼각형의 삼각패치 모델에 대한 기존 결과와 임의 모양의 삼각패치에 대해 본 논문의 방법을 이용한 해석 결과와 상호 비교하였다. 해석구조는 사각 평판과 원형 구조이다.

Ⅱ. 본 론

2-1 표면 전장적분 방정식(Surface Electric Field Integral Equation)

임의 모양을 가진 완전도체의 산란 적분 방정식은 모멘트 방법으로 해석되어질 수 있다. 이는 저주파 해석방법으로서 사용 파장에 비해 비교적 작은 구조에 적합한 방법이다. 그림 1은 임의 모양의 완전도체에 평면파가 입사하는 구조이다. 평면파의 시간함수는 $e^{-i\omega t}$를 사용한다. 그림 1에서 $\bar{J}$는 입사파에 의해 도체 표면에 유기된 표면 전류이다. $\hat{n}$은 도체 표면의 외부 방향 단위 법선 벡터이다. 영역 I과 II는 각각 자유공간과 금속 도체 영역을 의미하고, S는 도체의 표면을 의미한다. P는 임의의 장점을 나타내고, P'은 금속 표면의 2차 전원점을 의미하며 각각의 위치는 $\bar{r}$과 $\bar{r}'$로 표현되었다.

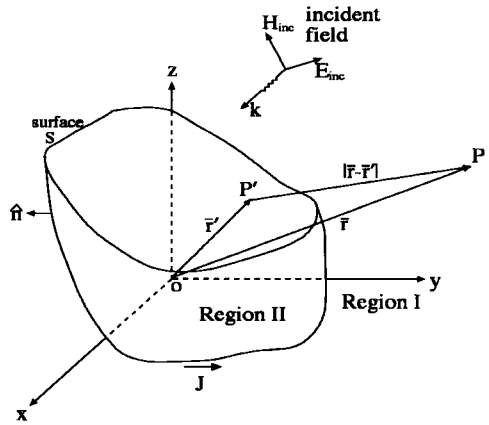


그림 1. 임의 모양을 가진 도체 형상과 좌표계
Fig. 1. An arbitrarily-shaped conductor and coordinate system.

도체가 존재하는 매질은 자유공간으로 가정하였다. 그림 1에서 표시된 도체 표면으로의 입사 전장은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{E}_{inc}(\bar{r}) = (\hat{\phi}E_{\phi} + \hat{\theta}E_{\theta})e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} \tag{1}$$

여기서

$$E_{\theta} = E_0\cos\alpha \ , \ E_{\phi} = E_0\sin\alpha$$

$$\bar{k}\cdot\bar{r} = k_0(x\sin\theta\cos\phi + y\sin\theta\sin\phi + z\cos\theta)$$

$$E_x^{inc} = E_{\theta}\cos\theta\cos\phi - E_{\phi}\sin\phi$$

$$E_y^{inc} = E_{\theta}\cos\theta\sin\phi + E_{\phi}\cos\phi$$

$$E_z^{inc} = -E_{\theta}\sin\theta$$

이다. 또한 α는 편파각을 의미하고 θ와 ϕ는 입사각을 의미하며, E_0는 입사전장의 크기를 의미한다.

그림 1에서 금속 표면의 유기 전류에 의한 산란파의 전장은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{E}_{scat}(\bar{r}) = i\omega\bar{A}(\bar{r}) - \nabla\phi(\bar{r}) \tag{2}$$

여기서

$$\bar{A}(\bar{r}) = \int_s \bar{J}(\bar{r}')g(\bar{r},\bar{r}')ds'$$

$$\phi(\bar{r}) = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0}\int_s \nabla'\cdot\bar{J}(\bar{r}')g(\bar{r},\bar{r}')ds'$$

$$g(\bar{r},\bar{r}') = \frac{\mu_0 e^{ik_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

이며, $g(\bar{r},\bar{r}')$는 자유공간 그린 함수이다. $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$이고, $\omega = 2\pi f$는 각주파수이다. 또한 f, ε_0 그리고 μ_0는 각각 사용 주파수, 자유공간 유전율과 투자율을 의미한다. 식 (2)의 첫째항은 금속 표면위의 유기 전류에 의한 벡터 포텐셜을 의미하고, 둘째항은 표면 전하 밀도에 의한 스칼라 포텐셜을 의미한다.

그림 1의 금속표면 S위에서 전장 경계조건을 부

여하면 다음과 같은 전장 적분 방정식을 얻을 수 있다.

$$-\hat{n}\times[\,\bar{E}_{inc}(\bar{r})]=\hat{n}\times[i\omega\bar{A}(\bar{r})-\nabla\phi(\bar{r})]\ ,\quad \bar{r}\in S \tag{3}$$

도체 표면의 유기 전류는 기저함수의 합으로 표현할 수 있으며, 다음 식과 같이 표현된다.

$$\bar{J}(\bar{r})=\sum_{n=1}^{N} I_n \bar{\Lambda}_n(\bar{r}) \tag{4}$$

여기서 I_n은 n번째 유기 전류의 계수를 의미하고, $\bar{\Lambda}(\bar{r})$는 임의의 기저함수를 나타낸다.

본 논문은 기저함수로 삼각형 패치 쌍으로 표현되는 삼각패치 기저함수를 사용하였으며, 그림 2에 도시하였다. 그림 2에서 기저함수는 두 삼각형 면, 공통 모서리(l_n), 꼭지점 그리고 경계 모서리들로 구성된다. 그림 2에서 T_n^+ 삼각형의 자유 꼭지점은 벡터 $\bar{r}_n^+$ 로 T_n^- 는 벡터 $\bar{r}_n^-$ 로 표기하였다.

그림 2에서 $\bar{r}$이 T_n^+ 삼각형 내에 존재할 때 $\bar{\rho}_{n^+}=\bar{r}-\bar{r}_n^+$이고, 자유 꼭지점에서 나오는 방향이다. 반면 $\bar{r}$이 T_n^- 삼각형 내에 존재할 때는 $\bar{\rho}_{n^-}=-(\bar{r}-\bar{r}_n^-)$ 이며, 자유 꼭지점으로 들어가는 방향이다.

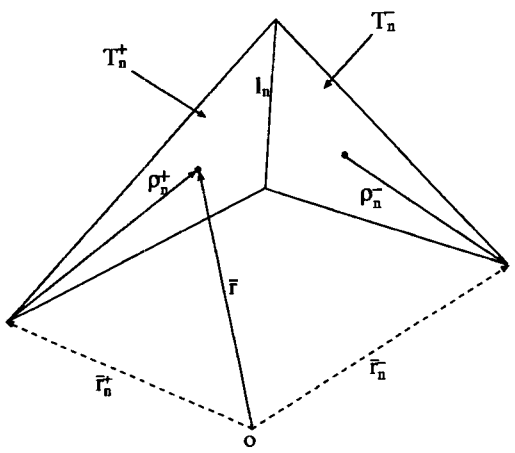


그림 2. n 번째 기저함수의 지역 좌표계

Fig. 2. Local coordinates associated with the n-th edge.

$$\bar{\Lambda}_n(\bar{r})=\begin{cases}\dfrac{l_n}{2S_n^+}\,\bar{\rho}_{n^+}\ , & \bar{r}\in T_n^+\\ \dfrac{l_n}{2S_n^-}\,\bar{\rho}_{n^-}\ , & \bar{r}\in T_n^-\end{cases} \tag{5}$$

여기서 $S_n^{\pm}$는 각 삼각형의 면적을 의미하며, $\bar{r}$이 두 삼각형 외부에 존재할 때는 n 번째 기저함수 값은 영이다.

도체 표면 전류를 식 (5)와 같이 확장을 하였을 때 식 (2)의 둘째항의 스칼라 포텐셜에 나타난 표면 전하밀도는 식 (5)의 발산으로 표현된다. 기저 함수의 발산은 다음과 같다.

$$\nabla_s\cdot\bar{\Lambda}_n(\bar{r})=\begin{cases}\dfrac{l_n}{S_n^+}\ , & \bar{r}\in T_n^+\\ -\dfrac{l_n}{S_n^-}\ , & \bar{r}\in T_n^-\end{cases} \tag{6}$$

식 (6)은 $\bar{r}$이 $T_n^{\pm}$의 각 삼각형에 대하여 각 면 위의 표면 전하밀도는 항상 일정함을 의미하며 펄스 형태와 같다.

모멘트 법을 적용하기 위하여 식 (5)의 시험함수를 선택하여 식 (3)에 내적을 취하는 Galerkin 방법을 적용하면 다음과 같이 표현이 된다.

$$-\langle\bar{E}_{inc}(\bar{r}),\bar{\Lambda}_m(\bar{r})\rangle=i\omega\langle\bar{A}(\bar{r}),\bar{\Lambda}_m(\bar{r})\rangle$$
$$-\langle\nabla\phi(\bar{r}),\bar{\Lambda}_m(\bar{r})\rangle \tag{7}$$

여기서 내적은

$$\langle\bar{F},\bar{G}\rangle=\int_s\bar{F}\cdot\bar{G}ds$$

이다. 그리고 식 (7) 우변의 둘째항은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$-\langle\nabla\phi(\bar{r}),\bar{\Lambda}_m(\bar{r})\rangle=\int_s\phi(\bar{r})\nabla\cdot\bar{\Lambda}_m(\bar{r})ds \tag{8}$$

식 (8)을 식 (7)에 대입하고, 시험함수에 대한 적분을 m 번째 모서리에 해당하는 두 삼각형의 중심점을 이용하면 식 (7)은 다음과 같이 근사화 된다.

$$\langle\bar{E}_{inc}(\bar{r}),\bar{\Lambda}_m(\bar{r})\rangle\approx\frac{l_m}{2}[\,\bar{E}_{inc}(\bar{r}_m^{c+})\cdot\bar{\rho}_{m^{c+}}+\bar{E}_{inc}(\bar{r}_m^{c-})\cdot\bar{\rho}_{m^{c-}}] \tag{9-1}$$

$$i\omega\langle\bar{A}(\bar{r}),\bar{\Lambda}_m(\bar{r})\rangle\approx i\omega\frac{l_m}{2}[\,\bar{A}(\bar{r}_m^{c+})$$

$$\cdot \bar{\rho}_{m^{c+}} + \overline{A}(\bar{r}_m^{c-}) \cdot \bar{\rho}_{m^{c-}}] \quad (9-2)$$

$$-\langle \nabla \phi(\bar{r}), \overline{\Lambda}_m(\bar{r}) \rangle \approx l_m[\phi(\bar{r}_m^{c+}) - \phi(\bar{r}_m^{c-})] \quad (9-3)$$

식 (9)는 각 삼각형의 모서리 m=1,2,3,…,N과 관련된 방정식이며, 식 (4)를 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 N×N 선형 행렬 방정식을 얻을 수 있다.

$$[V_m] = [Z_{mn}][I_n] \quad (10)$$

식 (10)에서 $[V_m]$과 $[I_n]$은 N의 열 벡터 행렬이고, $[Z_{mn}]$은 N×N의 행렬식이다. 식 (10)의 각 행렬 요소는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Z_{mn} = l_m l_n \Big\{ \frac{i\omega}{4} [M_{m^+n^+} + M_{m^+n^-} + M_{m^-n^+} + M_{m^-n^-}] + [W_{m^+n^+} - W_{m^+n^-} - W_{m^-n^+} + W_{m^-n^-}] \Big\} \quad (11-1)$$

$$V_m = \frac{l_m}{2} [V_m^+ + V_m^-] \quad (11-2)$$

여기서

$$M_{pq} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{S_q} \int_{T_q} \frac{e^{ik_0 R_{pq}^c}}{R_{pq}^c} \bar{\rho}_q ds' \cdot \bar{\rho}_{p'} \quad (12-1)$$

$$W_{pq} = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_0} \frac{1}{S_q} \int_{T_q} \frac{e^{ik_0 R_{pq}^c}}{R_{pq}^c} ds' \quad (12-2)$$

이다.

2-2 삼각 패치 면적 적분

식 (11)의 n^+와 n^-는 각각 n 번째 모서리에 인접한 T_n^+와 T_n^- 삼각형의 면적분을 의미하고, m^+과 m^-은 m 모서리에 해당하는 삼각형의 면적분에 해당하고, 식 (9)의 근사를 따른다. 식 (11-1)의 Z_{mn}은 삼각형의 비경계 모서리와 m과 n 모서리에 관계를 가지며, 같은 삼각형에 대하여 적분을 반복하게 된다. 따라서 그러한 반복 계산하는 비효율성을 피하기 위하여 식 (12)의 관측 삼각형과 전원 삼각형에 대한 패치 대 패치 적분을 수행하여 식 (11)의 행렬식의 요소들로 채워지게 된다. 이는 모서리 대 모서리 적분에 비해 9 배의 계산 효율이 향상된다[3]. 식 (12)에서 $R_{pq}^c = |\bar{r}_c - \bar{r}'|$를 의미하고, 삼각형 패치 대 패치 적분을 의미한다. 삼각형 T_p와 T_q는 각각 최대 3개의 기저함수를 가진다. 식 (12-1)의 벡터 $\bar{\rho}_{p'}$는 p 번째 삼각형의 무게 중심과 임의의 자유 꼭지점과의 거리 벡터이다. 그리고 $\bar{\rho}_q$는 q 번째 삼각형의 임의의 전원점과 자유꼭지점과의 거리벡터이며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{\rho}_{qj} = \pm(\bar{r} - \bar{r}_{qj}), \; j=1,2,3 \quad (13)$$

식 (13)은 q 번째 삼각형내의 거리 벡터이고 + 기호는 전류의 기준 방향이 자유 꼭지점으로부터 멀어지는 방향이고, - 기호는 자유 꼭지점으로 향하는 방향을 의미한다. 또한 $\bar{r}_{qj}$는 q 번째 삼각형의 j 번째 모서리에 대한 자유꼭지점을 의미한다.

그림 3은 삼각 패치 대 패치에 대한 지역 좌표계이다. 그림 3의 전원점과 관측점 사이의 거리는 $R_{pq} = |\bar{r}_{pc} - \bar{r}'|$이며, 두 삼각형과 관계된 식 (12)의 함수는 최대 9개이다. $\bar{r}_{pc}$는 p 번째 삼각형의 중앙에서의 위치벡터이다.

식 (12)의 면적 적분은 q 번째 삼각형내 임의의 전원점에 대하여 $S_q = S_1 + S_2 + S_3$의 관계를 만족하는 3개의 영역으로 나누고, 이를 S_q로 정규화할 경우 $\xi + \zeta + \eta = 1$을 만족하는 영역 좌표계를 얻을 수 있다. 전원점은 이 영역 좌표계의 항으로 표현할 수 있다[3].

$$\bar{r}' = (1-\zeta-\eta)\,\bar{r}_1 + \eta\,\bar{r}_2 + \zeta\,\bar{r}_3 \quad (14)$$

전원점과 관측점이 서로 다른 삼각형에 위치하고

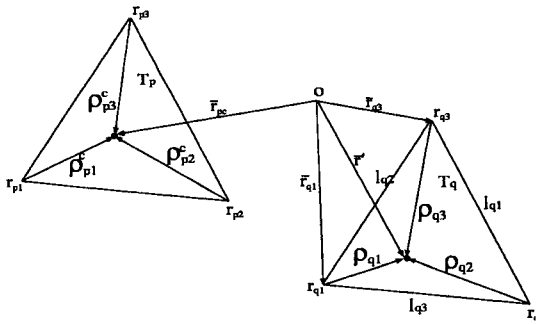


그림 3. 전원 삼각형과 관측 삼각형에 대한 지역 좌표계

Fig. 3. Local coordinate for source and observation triangle.

표 1. 7점 가우시간 구적법의 삼각형 좌표쌍과 가중치

Table 1. The trianglar coordinate pair and weighting values for the 7-point Gaussian quadrature.

n	ζ_n	η_n	w_n^{2d}
1	0.1012865073235	ζ_1	0.1259391805448
2	0.7974269853531	ζ_1	w_1^{2d}
3	ζ_1	ζ_2	w_1^{2d}
4	0.4701420641051	ζ_6	0.1323941527885
5	ζ_4	ζ_4	w_4^{2d}
6	0.0597158717898	ζ_4	w_4^{2d}
7	0.3333333333333	ζ_7	0.2250000000000

있을 때 식 (12)의 면적 적분은 2차원 가우시안 구적법에 의하여 계산되어지며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{S_q}\int_{T_q} g(\bar{r})ds' = \sum_{n=1}^{M} w_n^{2d}\, g[\bar{r}(\zeta_n,\eta_n)] \qquad (15)$$

식 (15)의 삼각형 영역좌표 쌍(ζ_n, η_n)과 가중치(w_n^{2d})은 다음의 값들을 사용하였다[5].

관측점과 전원점이 같은 삼각형에 위치하지 않을 때의 식 (12)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M_{pq}^{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{n=1}^{N_w^2} w_n^{2d}(\bar{r}_n - \bar{r}_{q_i})\cdot(\bar{r}_{pc} - \bar{r}_{p_i})\cdot \frac{\exp[ik_0|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|]}{|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|} \qquad (16-1)$$

$$W_{pq}^{ij} = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N_w^2} w_n^{2d}\frac{\exp[ik_0|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|]}{|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|} \qquad (16-2)$$

식 (16)에서 N_w^2값은 7이고, i, j=1,2,3으로 각 삼각형의 세 꼭지점을 나타내며 전류의 기저함수와 관계를 가진다. 식 (16-1)은 기저함수에 따라 다른 값을 가지지만 (16-2)는 기저함수에 상관없이 동일 삼각형에서는 같은 값을 가진다.

관측점과 전원점이 동일 삼각형($p=q$)에 위치하고 있을 때 식 (12)의 면적 적분은 특이점을 가지는 적분이며, 기저함수와 관계된 거리 벡터 $\bar{\rho}_{p_i} = \bar{r}_{pc} - \bar{R} - \bar{r}_{p_i}$로 변환할 수 있다. 그리고 특이점을 제거하기 위하여 식 (12)를 다음과 같이 표현하면 $\frac{1}{R}$의 특이점 적분만을 가진다.

$$M_{pp}^{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{S_p}\left\{\int_{T_p}\frac{\bar{R}^c}{R^c}(1-\exp[ik_0R^c])ds' + (\bar{r}_{pc} - \bar{r}_{p_i})\int_{T_p}\frac{\exp[ik_0R^c]-1}{R^c}ds' - \int_{T_p}\frac{\bar{R}^c}{R^c}ds' + (\bar{r}_{pc} - \bar{r}_{p_i})\int_{T_p}\frac{1}{R^c}ds'\right\}\cdot\bar{\rho}_{p^c} \qquad (17-1)$$

$$W_{pp}^{ij} = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\frac{1}{S_p}\left\{\int_{T_p}\frac{e^{ik_0R^c}-1}{R^c}ds' + \int_{T_p}\frac{1}{R^c}ds'\right\} \qquad (17-2)$$

여기서 $\bar{R}^c = \bar{r}_{pc} - \bar{r}'$이고 $R^c = |\bar{R}^c|$이다. 이를 식 (15)와 같은 가우시안 구적법을 이용하여 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M_{pp}^{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\sum_{n=1}^{N_w^2}\frac{(1-\exp[ik_0|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|])}{|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|}(\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n)\cdot(\bar{r}_{pc} - \bar{r}_{p_i}) + (\bar{r}_{pc} - \bar{r}_{p_i})\cdot(\bar{r}_{pc} - \bar{r}_{p_i})\sum_{n=1}^{N_w^2}\frac{\exp[ik_0|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|]-1}{|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|} + 2[\bar{S}_A + (\bar{r}_{pc} - \bar{r}_{p_i})S_\phi]\cdot(\bar{r}_{pc} - \bar{r}_p)\right\} \qquad (18-1)$$

$$W_{pp}^{ij} = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\left\{\sum_{n=1}^{N_w^2}\frac{\exp[ik_0|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|]-1}{|\bar{r}_{pc} - \bar{r}'_n|} + 2S_\phi\right\} \qquad (18-2)$$

식 (17-1) 우변항의 첫째와 둘째 항과 식 (17-2)의 첫째 항은 특이점을 가지지 않는다. 따라서 이 항들은 식 (15)와 같이 식 (18)과 같이 가우시안 구적법으로 표현하였다. 그러나 식 (17)의 나머지 항($\bar{S}_A$, S_ϕ)들은 특이점이 존재하는 적분으로 수치계산이 어렵다. 이러한 특이점을 가진 적분은 발산정리를 이용하여 닫힌 형태의 적분으로 표현할 수 있다[6]. 그러나 본 논문은 이를 다루기 위해 복잡한 수식 전개 없이 간단한 변환을 통해 특이점을 수치적분으로 계산하였다.

2-3 Duffy 방법

장점이 전원 삼각형 내부에 존재할 때 장점을 기

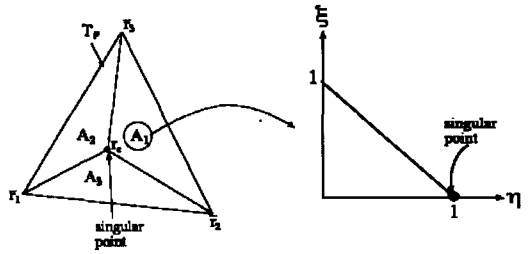


그림 4. 특이점을 포함한 면적 적분의 영역 좌표계로의 변환

Fig. 4. Transformation to the area coordinate of a surface integration with singular point.

준으로 전원 삼각형은 전원점의 위치에 따라 세 개의 부 삼각형으로 나누어진다. 각각의 부 삼각형은 장점의 위치에서 특이점을 가진다. 그림 4는 부 삼각형의 하나인 삼각형 A_1에 대한 변환을 나타낸다.

그림 4에서 부 삼각형 A_1의 특이점은 $\eta-\xi$ 평면 위에서 (1,0)으로 변환되고, $\bar{r}_2$점은 (0,1)점에 $\bar{r}_3$점은 (0,0)점으로 변환을 시킨다. 이는 특이점을 기준으로 반시계 방향이다. 전원점이 그림 4의 T_p 삼각형내의 부 삼각형(r_c, r_2, r_3)내에 존재할 때 변환식은 다음과 같다.

$$\bar{R}_1^c = \bar{r}_c - [\eta(\bar{r}_c - \bar{r}_3) + \xi(\bar{r}_2 - \bar{r}_3) + \bar{r}_3] \quad (19)$$

식 (19)의 좌변은 전원점이 그림 4의 면적 A_1내에 위치하고 있을 때 거리 벡터이다.

면적 A_1에 해당하는 적분은 영역 좌표계의 적분으로 표현이 가능하며, 적절한 치환으로 이중 적분을 단일 적분으로 표현이 가능하다[7]. 식 (18)의 특이점에 대한 적분 항들에 대한 면적 적분을 단일 적분으로의 유도과정을 식 (20)에 기술하였으며, 그림 4의 면적 A_1에 대한 삼각형만 고려하였다. 부 삼각형에 대한 면적 적분을 특이점이 없는 적분으로 표현하기 위해서 $\eta-\xi$평면에서 표현된 적분을 $\xi=(1-\eta)u$으로 치환함으로써 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_{A_1}\frac{1}{R_1^c}ds' &= 2A_1\int_{\eta=0}^{1}\int_{\xi=0}^{1-\eta}\frac{1}{|(\bar{r}_{pc}-\bar{r}_3)(1-\eta)+(\bar{r}_3-\bar{r}_2)\xi|}d\xi d\eta \\ &= 2A_1\int_{u=0}^{1}\frac{1}{|(\bar{r}_{pc}-\bar{r}_3)+(\bar{r}_3-\bar{r}_2)u|}du \quad (20-1)\\ &\approx 2A_1\sum_{m=1}^{M_w^1} w_m^{1d}\frac{1}{R_i^c(u_m)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{A_1}\frac{\bar{R}_1^c}{R_1^c}ds' &= 2A_1\int_{\eta=0}^{1}\int_{u=0}^{1}\frac{(\bar{r}_{pc}-\bar{r}_3)+(\bar{r}_3-\bar{r}_2)u}{|(\bar{r}_{pc}-\bar{r}_3)+(\bar{r}_3-\bar{r}_2)u|}(1-\eta)du d\eta \\ &= A_1\int_{u=0}^{1}\frac{(\bar{r}_{pc}-\bar{r}_3)+(\bar{r}_3-\bar{r}_2)u}{|(\bar{r}_{pc}-\bar{r}_3)+(\bar{r}_3-\bar{r}_2)u|}du \\ &\approx A_1\sum_{m=1}^{M_w^1} w_m^{1d}\frac{\bar{R}_i^c(u_m)}{R_i^c(u_m)}\end{aligned}$$

(20-2)

여기서 $R_1^c(u_i)=|(\bar{r}_{pc}-\bar{r}_3)+(\bar{r}_3-\bar{r}_2)u_i|$ 이다. 따라서 T_p 삼각형 전체에 대한 특이점 적분은 식 (20)과 같은 세 개의 부 삼각형의 합으로 표현할 수 있다. 따라서 식 (18)의 $\bar{S}_A$와 S_ϕ는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{S}_A = -\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i}{2S_p}\sum_{m=1}^{M_w^1} w_m^{1d}\frac{\bar{R}_i^c(u_m)}{R_i^c(u_m)} \quad (21-1)$$

$$S_\phi = \sum_{i=1}^{3}\frac{A_i}{S_p}\sum_{m=1}^{N_w^1} w_m^{1d}\frac{1}{R_i^c(u_m)} \quad (21-2)$$

$$\bar{R}_i^c(u_m) = \bar{r}_{pc} - \bar{r}_{(i+2)} + (\bar{r}_{(i+2)} - \bar{r}_{(i+1)})u_m,$$
$$R_i^c(u_m) = |\bar{R}_i^c(u_m)| \quad (21-3)$$

여기서, $\bar{S}_A$는 벡터량이고, S_ϕ는 스칼라량이며, i=1,2,3은 그림 4의 T_p 삼각형 내 각각의 부 삼각형을 의미한다. 각 부 삼각형에 대한 1차원 가우시안 구적법의 총 샘플 수(N_w^1)를 5개로 하였으며 w_m^{1d}는 가중치 값이며, 표 2에 나타내었다. 식 (21-2)의 $\bar{r}_{(i+1)}$와 $\bar{r}_{(i+2)}$는 그림 4의 각 부 삼각형에 해당하는 T_p 삼각형의 세 꼭지점중 두 개의 꼭지점으로 무게중심점을 기준으로 반 시계방향의 꼭지점 순이다. $\bar{r}_4=\bar{r}_1$이고 $\bar{r}_5=\bar{r}_2$이다.

표 2. 5점 가우시안 구적법의 좌표값과 가중치

Table 2. Sample points and weighting values of the 5-point Gaussian quadrature.

	1	2	3	4	5
w_m^{1d}	0.2955242247	0.2692667193	0.2190863625	0.1494513491	0.0666713443
u_m	0.1488743389	0.4333953941	0.6794095682	0.8650633666	0.9739065285

장점과 전원점이 동일 삼각형 내부에 존재할 때 발생하는 특이점 적분은 Duffy 방법을 이용하여 특이점이 제거가 되었다. 이를 검증하기 위해서 각 변의 길이가 0.1 λ 인 정삼각형에 대하여 기존의 닫힌 형태의 엄밀해 적분 결과[6]와 본 논문의 방법을 비교하였다. 그림 5는 정삼각형 내부에 수직 t방향으로 장점이 위치할 때, 두 특이점에 대한 적분 결과이다. 그림 5(a)는 식 (21-2)의 S_ϕ에 대한 결과이며, 닫힌 형태의 결과와 일치한다. 그리고 삼각형의 무게중심 방향으로 갈수록 두 결과가 큰 값을 가진다. 그림 5(b)는 식 (21-1)의 $\overline{S}_A$의 계산값과 장점 벡터(ρ_1)의 내적에 대한 결과이다. 그림 5(b)로부터 두 결과가 일치함을 알 수 있다. 그러나 그림 5(b)의 결과는 그림 5(a)의 결과에 비해 아주 작은

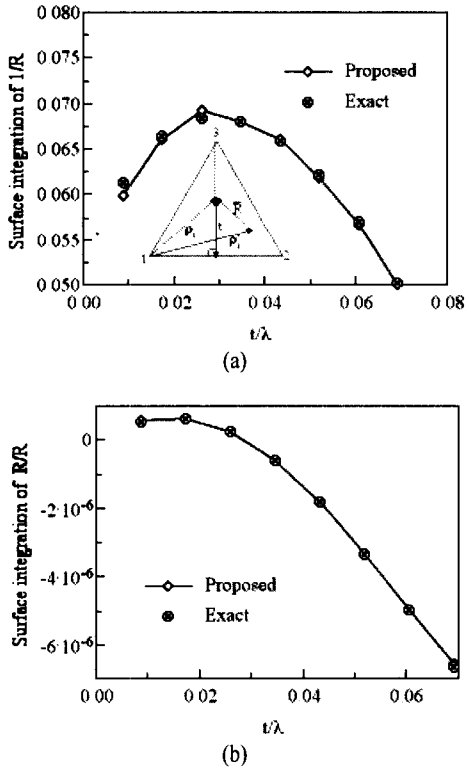


그림 5. 특이점 적분에 대한 Duffy 방법과 닫힌 형태의 적분 결과 (a) S_ϕ, (b) $\overline{S}_A \cdot \rho_1$

Fig. 5. Results of Duffy's method and a closed form integration for singular integrations. (a) S_ϕ, (b) $\overline{S}_A \cdot \rho_1$

값을 보이고 있다. 그림 5에서 Exact는 참고문헌[6]의 닫힌 형태에 대한 결과를 의미한다. 그림 5로부터 Duffy 방법에 의한 적분 결과는 엄밀해의 적분 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

2-4 수치해석 결과

본 논문은 삼각형 패치 벡터 기저함수를 사용하여 모멘트 법을 적용하였으며 삼각형으로 금속 도체를 모델링하였다. 삼각형의 모양은 동일 모양의 직각 삼각형과 서로 다른 모양의 삼각형 두 가지에 대하여 모델링하였으며, 기존의 방법과 본 논문의 방법에 대한 결과를 비교하였다. 서로 다른 모양의 삼각형은 일반적인 상용 툴(GID)을 사용하여 모델링하였다. 임의의 한 지점에서 전류의 양을 구할 때 샘플 지점이 삼각형의 모서리에 놓일 경우 이 지점을 통과하는 전류는 최대 5개의 기저함수와 관계를 가진다. 그러나 임의 삼각형 내 한 지점의 전류밀도는 그 삼각형과 관계된 최대 3개의 기저함수와 관계된 전류밀도의 합과 같다.

그림 6은 가로, 세로 크기가 1.0 λ인 정사각형 도체 평판에 대한 전류밀도 분포이다. 입사 전장은 x 방향으로 편파된 평면파가 금속 도체 평판위로 수직 입사한다. 이는 식 (1)의 $E_0=1$이고 $\alpha=3\pi/2$, $\phi=\pi/2$ 그리고 $\theta=\pi$일 때를 의미한다. Rao의 방법과 본 논문에서 사용한 방법이 일치함을 확인할

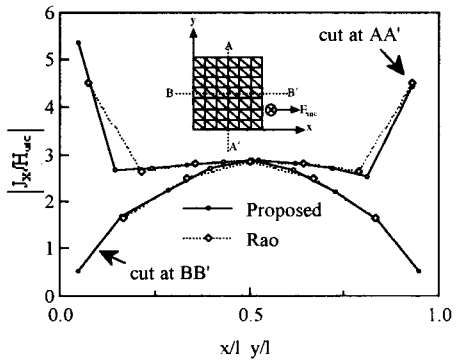


그림 6. 1.0 λ의 정사각형 평판에 대한 J_x의 정규화 분포

Fig. 6. Distribution of normalized current J_x on a 1.0 λ square flat plate.

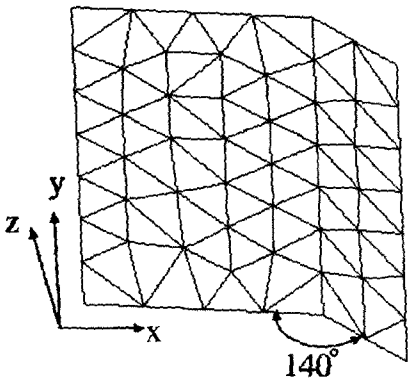


그림 7. 40° 꺾인 1.0λ 정사각형 도체 평판의 Gid 모델

Fig. 7. Gid model of a 1.0λ square plate bent 40°

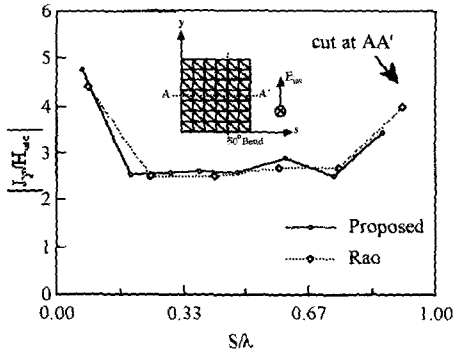


그림 8. 1.0λ 꺾인 정사각형 평판에 대한 J_y의 정규화 분포

Fig. 8. Distribution of normalized current J_y on a 1.0λ bent square flat plate.

수 있다. 또한 그림 6은 AA'와 BB'방향을 따른 정규화된 x 성분의 전류밀도이다. 삼각형은 84개와 168개이다. Gid를 이용한 도체 평판의 삼각 패치 모델은 그림 6에 보인 같은 모양의 삼각패치 형태를 가지지 않는 임의 형태이다.

그림 7은 이용한 음의 z축 방향으로 40° 꺾인 도체 평판을 Gid 툴을 이용하여 삼각 패치로 모델링한 그림이며, 임의 모양의 삼각패치로 구성이 되었다. 총 삼각형의 개수는 88개이며, 72개의 동일 삼각형으로 모델링된 Rao 결과와 비교하였다. 입사파는 y 편파된 전장이 40° 꺾인 그림 7의 도체 평판위로 수직 입사한다. 이는 식 (1)에서 $E_0=1$이고 $\alpha=3\pi/2$, $\phi=\pi$ 그리고 $\theta=\pi$ 일 때를 의미한다. 그림 8은 그림 7의 구조에 대한 결과로 AA'을 따른 y방향의 전류밀도 성분이 Rao 결과와 본 논문에서 사용한 결과가 잘 일치함을 보이고 있다. 그림 7의 50° 꺾인 표시는 음의 z 축과 꺾인 도체 평판과의 각도를 의미한다.

Ⅲ. 결 론

본 논문은 임의 형상의 금속 도체상에 유기된 전류의 양을 계산하였다. 상용툴인 Gid를 이용하여 금속도체를 모델링 하였고, RWG 기저함수로는 삼각패치를 사용하였다. 이 때 RWG 기저함수 사용시 셀프항에 포함된 특이점을 계산할 때 기존 방법은 복잡한 계산을 필요로 하지만, 본 논문에서는 Duffy 방법을 이용함으로써 복잡한 계산을 줄일 수 있었다. 특이점 적분은 엄밀해의 결과와 잘 일치하였다. 이 방법은 삼각 패치뿐 아니라 사각형의 패치 모델에도 셀프 항을 간단하게 수치적분으로 표현이 가능할 것이다.

참 고 문 헌

[1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Method*, New York, Macmillan, 1968.

[2] http://www.gid.cimne.upc.es/

[3] S. M. Rao, "Electromagnetic scattering and radiation of arbitrarily-shaped surfaces by triangular patch modeling", *Ph. D. dissertation, Univ., Mississippi, MS*, Aug. 1980.

[4] S. M. Rao, D. R. Wilton and A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-30, no. 3, pp. 409-418, May 1982.

[5] Hao Shi, "Study of printed circuit board power-bus design with a circuit extraction technique based on a quasi-static MPIE/MOM formulation", *Ph.D. dissertation, Univ., Missouri-Rolla*, 1997.

[6] D. R. Wilton, S. M. Rao, A. W. Glisson, D. H.

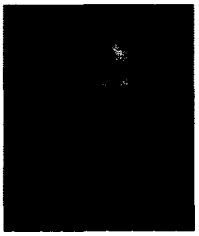
Schaubert, O. M. Al-Bundak and C. M. Butler, "Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-32, no. 3, pp. 276-281, Mar. 1984.

[7] M. G. Duffy, "Quadrature over a pyramid or curve of integrands with a singularity at a vertex", *Journal of Numerical Analysis*, no. 19, pp. 1260-1262, 1982.

이 승 학

1996년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학사)
1998년 2월: 경북대학교 대학원 전자공학과 (공학석사)
1998년 3월~현재: 경북대학교 대학원 전자공학과 박사과정
[주 관심분야] 전자파 산란특성, 안테나 해석 및 설계, 원격탐지, 전자파의 인체영향

김 채 영



1976년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학사)
1978년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학석사)
1990년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학박사)
1979년 4월~1992년 9월: 경북대 전자공학과 전임강사, 조교수, 부교수
1985년 9월~1986년 8월: 미국 Syracuse대학 방문 연구원
1991년 9월~1993년 2월: 미국 MIT 공대 연구과학자
1992년 10월~현재: 경북대 전자전기공학부 교수
[주 관심분야] 이동통신 전파환경, 전자파 수치해석, 전자파 이론 및 응용, 전자소자 측정기법 개발

이 창 원

1991년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학사)
1993년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학석사)
1998년 8월: 경북대학교 전자공학과 (공학박사)
1999년 7월~2000년 6월: Illinois Urbana-Champaign 박사후 연구원
2001년 8월~현재: 경북대학교 전자공학과 BK 계약 교수
[주 관심분야] 전자파 산란, 안테나 설계, 전자파 수치해석, 주기구조론