韓國電磁波學會論文誌 第13卷 第8號 2002年 9月 2002-13-8-09

라이시안 감쇄 채널에서의 위상오류 분포

On the Distribution of Phase Error in the Rician Fading Channel

김 민 종 · 한 영 열*

Min-Jong Kim · Young-Yearl Han*

요 약

본 논문에서는 라이시안(Rician) 감쇄가 존재하는 채널 환경에서 협대역 잡음이 더하여진 경우에 대역 여파기를 통과한 수신신호의 위상오류에 대한 확률 밀도 함수를 유도하고 0차 모먼트가 1이 됨을 보임으로써 확률 밀도 함수로서의 타당성을 검증한다.

일반적으로 감쇄 환경에서 시스템의 오류 확률은 먼저 가산성 백색 가우시안 잡음(AWGN ; Additive White Gaussian Noise)만이 존재할 때의 오류 확률을 구한 후, 그 결과 식을 해당 감쇄에 대한 확률 밀도 함수로 평균을 취하여 구한다. 하지만 본 논문에서는 감쇄 환경에서의 수신 신호에 대한 위상 오류식을 구한 다음, 그 식을 한번의 이중 적분을 취함으로써 오류 확률을 구하게 된다.

Abstract

In this paper we derive the probability density function of the phase error of the received signal over Rician fading channel and verify its propriety as the probability density function using the zeroth moment.

In general, for the error probability over fading channel we compute the error probability in the first place when it is only AWGN, and then we get the final result by averaging the first result and the probability density function of the corresponding fading channel. In this paper, however, we compute the error probability by double integration after the probability density function over fading channel is computed.

Key words : Rician, Fading Channel, Phase Error, Error Probability

Ⅰ. 서 론

이동 통신의 여러 가지 문제점 중에서도 특히 다중 경로에 의한 감쇄 현상이 아주 중요한 문제가 되고 있다. 따라서 이러한 감쇄 채널을 모형화 하기 위하여 나카가미(Nakagami), 레일리(Rayleigh), 라이시안(Rician) 그리고 로그노말(Lognomal)등 여러 가지의 감쇄 모형이 제시되었다. 그 가운데 레일리 및 라이시안 감쇄 모형은 다중경로에 의한 다중파와 직접파의 유무에 따른 이동통신 시스템을 해석할 때 일반적으로 이용되는 모형이다.[1]

이 논문에서는 아직까지 유도되어 있지 않은 협대역 정규 잡음과 라이시안 감쇄가 존재하는 환경에서 수신신호의 위상오류의 확률 밀도 함수를 새로운 접근 방식인 확률 변수의 변환법을 이용하여 유도한다. 그 다음 기존의 평균을 취하는 방법이 아닌 위상오류의 밀도 함수를 직접 적분함으로써 BPSK시스템의 오류 확률식을 유도하여 라이시안

「본 연구는 2001년도 한양대학교 교내 연구비 지원에 의해 수행되었음.」

어필텔레콤(주) 통신연구소(Appeal Telecom)

*한양대학교 전자전기컴퓨터공학부(Division of Electrical & Computer Engineering, Hanyang University)

· 논 문 번 호 : 20020218-017

· 수정완료일자 : 2002년 4월 17일

감쇄 채널에서의 위상오류 확률 밀도 함수의 정확성을 검증하고, 수치 해석적인 방법을 이용하여 MPSK 시스템의 오류확률을 살펴본다.

Ⅱ. 라이시안 감쇄에 의한 수신 신호의 위상오류 분포

2-1 위상오류의 분포

가산성 백색 가우시안 잡음 $n(t)$가 포함된 수신 신호는 다음 식과 같이 표현된다.

$$r(t) = A\cos\omega_c t + n(t) \tag{1}$$

여기서 메시지 성분의 진폭 A는 라이시안 페이딩의 영향을 받으므로 신호의 진폭에 대한 확률 밀도 함수는 다음과 같다고 가정한다.

$$f_A(a) = \frac{a}{\sigma_a^2} e^{-\frac{S^2+a^2}{2\sigma_a^2}} I_0\left(\frac{Sa}{\sigma_a^2}\right)$$

$$= \frac{a}{\sigma_a^2} e^{-K} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}} I_0\left(\sqrt{2K}\frac{a}{\sigma_a}\right),\ a>0 \tag{2}$$

위 식에서 S는 직접파 수신 신호 성분의 최대 진폭이고, σ_a^2은 신호 성분의 분산이며, $I_0(\cdot)$는 식 (3)으로 표현되는 0차 수정 베셀 함수이다. 그리고 K는 직접파 신호 성분과 감쇄 신호 성분의 평균 전력의 비이며 식 (4)로 표현된다.

$$I_0(\beta) = \int_0^{\pi} e^{-\beta\cos x} dx, \quad \beta>0 \tag{3}$$

$$K = \frac{S^2}{2\sigma_d^2} \tag{4}$$

수신 신호 식 (1)이 대역 여파기를 통과한 후에는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(t) = A\cos\omega_c t + n_c\cos\omega_c t - n_s\sin\omega_c t$$

$$= \sqrt{(A+n_c)^2+n_s^2}\cos\left(\omega_c t + \tan^{-1}\frac{n_s}{A+n_c}\right)$$

$$= R\cos(\omega_c t+\theta) \tag{5}$$

여기서 R과 θ는 각각 포락선과 위상오류를 나타내고 있으며, n_c와 n_s는 서로 독립이고 평균이 0이며 분산이 σ_n^2인 협대역 가우시안 잡음으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(n_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-n_c^2/2\sigma_n^2} \tag{6}$$

$$f(n_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-n_s^2/2\sigma_n^2} \tag{7}$$

새로운 변수 x와 y를 다음과 같이 정의한다.

$$x = A + n_c = R\cos\theta$$
$$y = n_s \quad = R\sin\theta \tag{8}$$

A와 n_c는 서로 독립이므로 x에 대한 확률 밀도 함수는 두 확률 밀도 함수의 컨벌루션이 되어 다음과 같이 나타내어진다.[2]

$$f(x) = f_A(a) * f_{N_C}(n_c)$$

$$= \frac{e^{-\left(K+\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right)}}{\sigma_a^2\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_0^{\infty} a e^{-\left(\frac{a^2}{2\sigma_a^2}+\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)} e^{\frac{ax}{\sigma_n^2}}$$

$$\cdot\ I_0\left(\sqrt{2K}\frac{a}{\sigma_a}\right) da \tag{9}$$

x와 y 또한 서로 독립이므로 결합 확률 밀도 함수는 두 확률 밀도 함수의 곱이 된다.

$$f(x,y) = f(x)f(y)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_a^2\sigma_n^2} e^{-K} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_n^2}} \int_0^{\infty} a e^{-\left(\frac{a^2}{2\sigma_a^2}+\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)}$$

$$\cdot\ e^{\frac{ax}{\sigma_n^2}} I_0\left(\sqrt{2K}\frac{a}{\sigma_a}\right) da \tag{10}$$

x와 y의 결합 확률 밀도 함수로부터 식 (8)의 관계를 이용하여 R과 θ의 결합 확률 밀도 함수를 구하면 다음과 같다.

$$f_{R,\theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)\,|J|$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_a^2\sigma_n^2} e^{-K} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} \int_0^{\infty} a e^{-\left(\frac{a^2}{2\sigma_a^2}+\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)}$$

$$\cdot\ e^{\frac{ar\cos\theta}{\sigma_n^2}} I_0\left(\sqrt{2K}\frac{a}{\sigma_a}\right) da \tag{11}$$

여기서 J는 Jacobian을 나타낸다.

식 (11)을 주변 확률 밀도 함수의 정의에 의하여 R의 전구간에 대하여 적분하면 위상오류 θ에 대한 확률 밀도 함수를 구할 수 있다.[2],[4]

$$f(\theta) = \int_0^{\infty} f_{R,\theta}(r,\theta) dr$$

$$= \frac{e^{-K}}{2\pi\ \sigma_a^{\,2}\ \sigma_n^{\,2}} \int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} \left[\int_0^{\infty} ae^{-\left(\frac{a^2}{2\sigma_n^2}+\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)} \cdot e^{\frac{ar\cos\theta}{\sigma_n^2}} I_0\left(\sqrt{2K}\frac{a}{\sigma_a}\right) da \right] dr$$

$$= \frac{e^{-K}}{2\pi\ \sigma_a^{\,2}\ \sigma_n^{\,2}} \int_0^{\infty} ae^{-\left(\frac{a^2}{2\sigma_n^2}+\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)} I_0\left(\sqrt{2K}\frac{a}{\sigma_a}\right) \cdot \left[\int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} e^{\frac{ar\cos\theta}{\sigma_n^2}} dr \right] da \qquad (12)$$

위의 이중 적분을 풀면 다음과 같은 라이시안 감쇄 채널에서의 수신 신호에 대한 위상 오류의 확률 밀도 함수를 얻을 수 있다(자세한 풀이 과정은 appendix 참조).

$$f(\theta) = \frac{e^{-K}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K)^n}{(n!)^2} \left(\frac{1+K}{1+K+\gamma}\right)^{n+1} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n+1)\ {}_2F_1\left(1, n+1; \frac{1}{2}; \frac{\gamma\cos^2\theta}{1+K+\gamma}\right) + \cos\theta \cdot \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{1+K+\gamma}}\ {}_2F_1 \cdot \left(\frac{3}{2}, n+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\gamma\cos^2\theta}{1+K+\gamma}\right) \right], \quad -\pi \le \theta \le \pi \qquad (13)$$

여기서 $\gamma = (1+K)\frac{\sigma_a^{\,2}}{\sigma_n^{\,2}}$는 신호대잡음비 ($SNR$)이고, ${}_2F_1(\cdot)$은 초기하 함수이며[3] 다음 식으로 표현된다.

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha; z) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\alpha+k)} \frac{z^k}{k!} \qquad (14)$$

라이시안 감쇄의 특별한 경우인 레일리 감쇄 채널에서 수신 신호의 위상오류의 분포는 식 (13)에 K=0을 대입하면 얻을 수 있다. K=0 이므로 $\gamma = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} = R$ 로 놓으면, 식 (13)은 다음과 같이 된다.

$$f(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{1+R}\right)\ {}_2F_1\left(1, 1; \frac{1}{2}; \frac{R\cos^2\theta}{1+R}\right) + \cos\theta \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{R} \cdot \left(\frac{1}{1+R}\right)^{\frac{3}{2}}\ {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{R\cos^2\theta}{1+R}\right) \right] \qquad (15)$$

이 식을 계산하기 위하여 첫 번째 항에는 식 (14)의 관계식을, 두 번째 항에는 식 (16)의 관계식[3]을 이용하면

$${}_2F_1(-n, \beta; \beta; -z) = (1+z)^n \qquad (16)$$

다음과 같은 레일리 감쇄 채널에서의 위상 오류의 분포식을 구할 수 있다.

$$f(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)} \frac{R^n}{(1+R)^{n+1}} (\cos\theta)^{2n} + \frac{\sqrt{R}\cos\theta}{4(1+R\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}, \quad -\pi \le \theta \le \pi \qquad (17)$$

그림 1과 그림 2는 라이시안 감쇄 현상이 존재할 때 수신 신호의 위상오류의 분포 함수를 직접파 신호 성분과 감쇄 신호 성분의 평균 전력의 비 K와 신호대 잡음비 γ의 변화에 따라 그린 것이다. 그래프를 고찰하면 K가 일정할 경우 γ가 클수록 0을 중심으로 더욱 첨예하게 모여 있고, γ가 일정할 경우에도 역시 K가 증가할수록 0을 중심으로 모여드는 것을 확인할 수 있다.

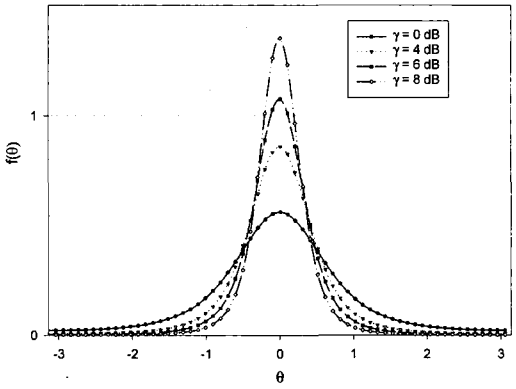


그림 1. 위상오류의 밀도함수(K=6 dB)
Fig. 1. PDF of Phase Error(K=6 dB).

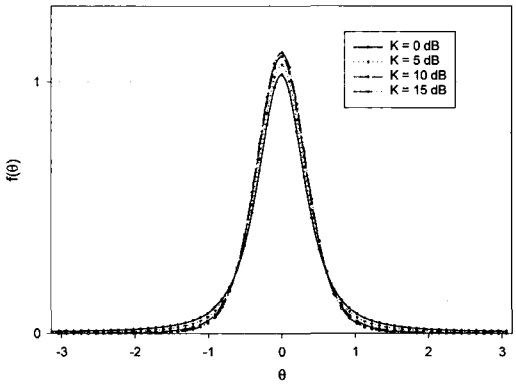


그림 2. 위상오류의 밀도함수(γ=6 dB)
Fig. 2. PDF of Phase Error(γ=6 dB).

2-2 위상 오류식의 검증

라이시안 감쇄 채널하의 신호에 협대역 잡음이 가하여진 경우 위상오류의 분포 식 역시 확률 밀도 함수이므로 θ의 전구간에 대한 적분 값, 즉 0차 모멘트가 1이 됨을 보임으로써 이 식이 타당함을 검증할 수 있다.

앞에서 구한 식 (13)을 $x=\cos\theta$ 로 치환을 하면 다음과 같다.

$$f(\theta)=\frac{e^{-K}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(K)^n}{(n!)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+1)\left(\frac{1+K}{1+K+\gamma}\right)^{n+1}\right.$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,{}_2F_1\left(1,n+1;\frac{1}{2};\frac{\gamma x^2}{1+K+\gamma}\right)$$
$$+x\cdot\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{1+K}}\left(\frac{1+K}{1+K+\gamma}\right)^{n+\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\left.{}_2F_1(\frac{3}{2},n+\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{\gamma x^2}{1+K+\gamma})\right] \quad (18)$$

0차 모멘트의 정의식에 따라[4]

$$m_0(1)=\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=\frac{e^{-K}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(K)^n}{(n!)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+1)\left(\frac{1+K}{1+K+\gamma}\right)^{n+1}\right.$$
$$\cdot\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,{}_2F_1\left(1,n+1;\frac{1}{2};\frac{\gamma x^2}{1+K+\gamma}\right)dx$$
$$+\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{1+K}}\left(\frac{1+K}{1+K+\gamma}\right)^{n+\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\left.\cdot\,{}_2F_1\left(\frac{3}{2},n+\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{\gamma x^2}{1+K+\gamma}\right)dx\right]$$
$$=\frac{e^{-K}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(K)^n}{(n!)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+1)\left(\frac{1+K}{1+K+\gamma}\right)^{n+1}\right.$$
$$\left.\cdot A+\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{\gamma}{1+K}}\left(\frac{1+K}{1+K+\gamma}\right)^{n+\frac{3}{2}}\cdot B\right] \quad (19)$$

이 되고, A와 B는 각기 적분항을 표시한다. 식 (19) 내의 A와 B를 적분하기 위해 다음의 적분공식[3]을 이용하면, 식 (21)과 같이 된다.

$$\int_0^1(1-x)^{\mu-1}x^{\nu-1}\,{}_pF_q(a_1\cdots a_p;b_1\cdots b_q;ax)\,dx$$
$$=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\cdot\,{}_{p+1}F_{q+1}(\nu,a_1\cdots a_p;\mu+\nu,b_1$$
$$\cdots b_q;a) \quad (20)$$

$$A=\pi\cdot\,{}_3F_2\left(\frac{1}{2},1,n+1;\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{\gamma}{1+K+\gamma}\right),$$
$$B=0\ (\because\text{기함수}) \quad (21)$$

따라서,

$$m_0(1)=e^{-K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K^n}{n!}\left(\frac{1+K}{1+K+\gamma}\right)^{n+1}\cdot$$
$$\,{}_3F_2\left(\frac{1}{2},1,n+1;\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{\gamma}{1+K+\gamma}\right) \quad (22)$$

여기서 ${}_3F_2(\cdot)$는 초기하 함수이고[3], 다음 식으로 표현된다.

$${}_3F_2(\alpha,\beta,\gamma;a,b;z)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)\Gamma(\Gamma+k)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}\frac{z^k}{k!} \quad (23)$$

식 (16)과 식 (23)을 이용하여 식 (22)를 정리하면

$$m_0(1)=e^{-K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K^n}{n!}=1 \quad (24)$$

0차 모멘트는 1임을 확인할 수 있어 앞에서 구한 식 (13)이 정확함을 알 수 있다.

Ⅲ. BPSK(Binary Phase Shift Keying) 시스템의 오류 확률

라이시안 감쇄 채널에서 BPSK 시스템의 오류 확률식을 구하기 위해 앞에서 도출한 위상오류의 확률분포 식 (13)을 $-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}$ 구간에 대해 적분함으로써 올바르게 판정할 확률 P_c 를 먼저 구한다.

$$P_C=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)d\theta$$
$$=\frac{e^{-K}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K^n}{(n!)^2}\times$$
$$\left[n!+\sqrt{\frac{\gamma}{1+K}}\left(\frac{1+K}{1+K+\gamma}\right)^{n+\frac{3}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n+k\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}\left(\frac{\gamma}{1+K+\gamma}\right)^k\right] \quad (25)$$

따라서, 라이시안 감쇄채널에서 BPSK 시스템의 오류 확률식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(E)=1-P_C \quad (26)$$

식 (26)에서 $K=0$ ($\gamma=\frac{\sigma_d^2}{\sigma_n^2}=R$)를 대입하면,

$$P(E)=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{\frac{R}{1+R}}\right] \quad (27)$$

이 되는데, 이는 잘 알려진 레일리 감쇄채널에서 BPSK 시스템의 오류 확률식이다.

그림 3은 라이시안 감쇄채널에서 BPSK 시스템

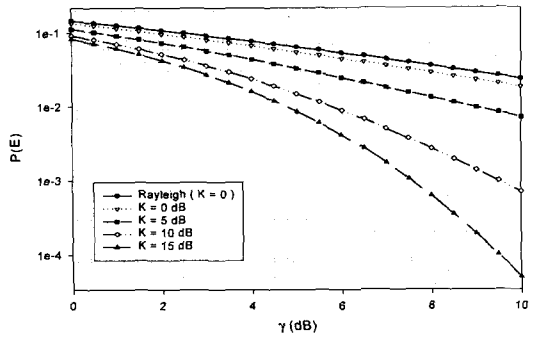


그림 3. 라이시안 감쇄채널 하에서의 BPSK 시스템의 오류확률

Fig. 3. Error probability of BPSK system in Rician Channel.

의 오류확률을 그린 것인데, 그래프를 살펴보면 신호대 잡음비(γ)가 클수록 시스템의 성능이 좋아지며, 감쇄가 덜 심할수록 즉, K값이 커질수록 성능이 좋아짐을 확인할 수 있다.

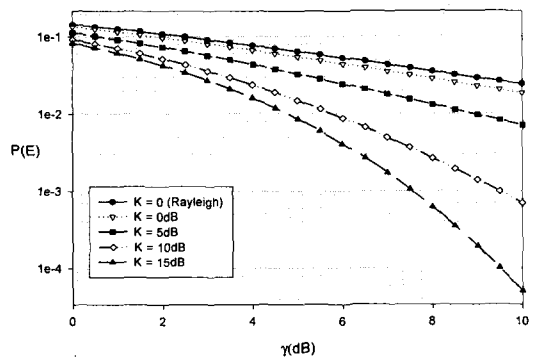
Ⅳ. MPSK(M-ary Phase Shift Keying)의 수치해석 결과

MPSK 시스템을 해석하기 위해서는 BPSK 시스템에서와 마찬가지로 위상 오류의 확률 분포를 $-\frac{\pi}{M} \sim \frac{\pi}{M}$구간에 대해 적분을 행해야 하는데, M=2 즉, BPSK 시스템을 제외하고는 그 적분이 불가능하다. 따라서, 다음과 같이 수치해석적인 방법을 통해 MPSK 시스템의 위상 오류를 고찰해 본다.

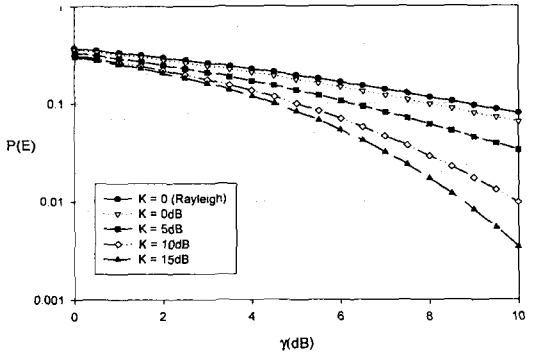
$$P(E) = 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} f(\theta) d\theta \tag{28}$$

그림 4는 라이시안 감쇄 채널하에서 MPSK의 심볼수 M이 2, 4, 8, 16일 때 수치 해석적인 방법을 통해 심볼 오류 확률을 γ에 대하여 보여주고 있다.

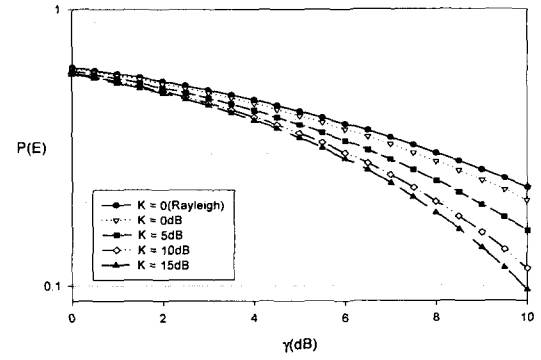
그림을 살펴보면 각각의 경우에 대해 예상했던 대로 고정된 K값에 대해서 γ값이 커질수록 성능이



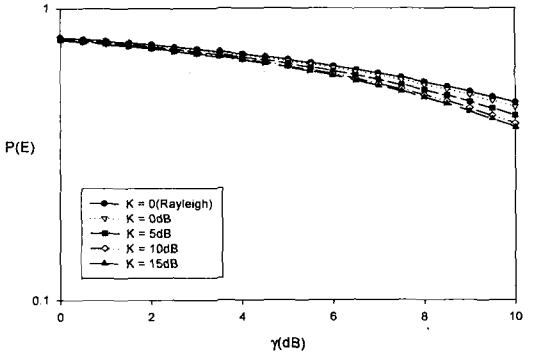
(a) M = 2



(b) M = 4



(c) M = 8



(d) M = 16

그림 4. 라이시안 감쇄 채널하에서의 MPSK 시스템의 오류 확률

Fig. 4. Error probability of MPSK systemin Rician Channel.

좋아짐을 알 수 있고, 또한 M은 증가할수록 성능이 나빠짐을 알 수 있다. 그리고 BPSK의 경우 그림 3과 같은 결과임을 확인할 수 있다.

V. 결 론

이 논문에서는 라이시안 감쇄 환경하에서 가산성 백색 정규 잡음이 더하여진 수신 신호의 위상 오류의 확률 밀도 함수를 확률 변수의 변환법을 이용하여 유도하였다. 유도된 위상 오류의 확률 밀도 함수를 이용하여 BPSK(M=2)의 경우 직접 적분을 행함으로써 오류 확률식을 구하였으며 나머지(M=4, 8, 16) 경우에 대해서는 수치해석적인 방법을 이용하여 고찰하였다. 오류 확률 결과를 살펴보면, 직접파 신호성분과 감쇄 신호 성분의 비(K)가 일정하면 신호대 잡음비(γ)가 커질수록 오류확률은 좋아지며, 반대로 고정된 신호대 잡음비에 대해선 직접파 성분과 감쇄 성분의 평균 전력비가 클수록 오류확률은 좋아진다. 또한 심볼 수(M)이 증가할수록 시스템의 성능은 나빠짐도 확인할 수 있다. BPSK 시스템의 경우 수치해석적인 결과와 유도된 오류 확률식의 결과가 같음을 확인해 위상 오류의 확률 밀도함수가 타당함을 재차 확인할 수 있다.

디지털 이동 통신이 더욱 발달하고 보편화됨에 따라 더 다양한 통신 환경이 제공되고 여러 변·복조 방식들이 사용되고 있다. 따라서 이동 통신에서 일어나는 다양한 감쇄 현상들을 충분히 반영하는 관련 분야에 대한 더 많은 연구가 필요할 것으로 생각된다.

Appendix

식 (12)의 내부적분을 풀기 위하여 다음의 관계식[3]을 이용하면

$$\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-\beta x^2-\gamma x}dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}}\Gamma(\nu)e^{\frac{\gamma^2}{8\beta}} \cdot D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \quad ,\beta>0 \ , \ \nu>0 \quad \text{(a.1)}$$

다음 식을 얻을 수 있다.

$$f(\theta)=\frac{e^{-K}}{2\pi\,\sigma_a^2\,\sigma_n^2}\int_0^\infty ae^{-\left(\frac{a^2}{2\sigma_n^2}+\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)}I_0\left(\sqrt{2K}\frac{a}{\sigma_a}\right)\cdot\ \sigma_n^2 e^{\frac{a^2\cos^2\theta}{4\sigma_n^2}}\ D_{-2}\left(-\frac{a\cos\theta}{\sigma_n}\right)da$$

$$=\frac{e^{-K}}{2\pi\,\sigma_a^2}\int_0^\infty ae^{-ta^2}I_0(pa)\ D_{-2}\left(-\frac{a\cos\theta}{\sigma_n}\right)da \quad \text{(a.2)}$$

여기서 $D_\nu(x)$는 parabolic cylinder 함수로서 다음과 같이 정의되고[3], t와 p는 각각 (a.4), (a.5)와 같다.

$$D_\nu(x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{4}}}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty e^{-xy-\frac{y^2}{2}}y^{-\nu-1}dy \quad ,\nu>0 \quad \text{(a.3)}$$

$$t=\frac{1}{2\,\sigma_a^2}+\frac{1}{2\,\sigma_n^2}-\frac{\cos^2\theta}{4\,\sigma_n^2} \quad \text{(a.4)}$$

$$p=\frac{\sqrt{2K}}{\sigma_a} \quad \text{(a.5)}$$

식 (a.2)의 적분을 계산하기 위하여 다음의 관계식들[3]을 이용한다.

$$I_0(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2} \quad \text{(a.6)}$$

$$D_\nu(x)=2^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}\ {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2};\frac{x^2}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}x}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}\ {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{3}{2};\frac{x^2}{2}\right)\right] \quad \text{(a.7)}$$

여기서 ${}_1F_1(\cdot)$는 초기하(hypergeometric) 함수[3]이며, 다음과 같이 정의된다.

$${}_1F_1(\alpha,\beta,x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+n)x^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)n!} \quad \text{(a.8)}$$

식 (a.6)과 (a.7)을 이용하여 식 (a.2)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$f(\theta)=\frac{e^{-K}}{2\pi\,\sigma_a^2}\int_0^\infty ae^{-ta^2}\left(\sum_{n=0}^\infty\frac{(pa)^{2n}}{(n!)^2 4^n}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{\frac{\cos^2\theta}{4\sigma_n^2}a^2}\cdot\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\ {}_1F_1\left(1,\frac{1}{2};\frac{\cos^2\theta}{2\sigma_n^2}a^2\right)+\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sigma_n}a\ {}_1F_1\cdot\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2};\frac{\cos^2\theta}{2\sigma_n^2}a^2\right)\right]da$$

$$=\frac{e^{-K}}{4\sqrt{\pi}\,\sigma_a^2}\sum_{n=0}^\infty\frac{p^{2n}}{(n!)^2 4^n}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty a^{2n+1}e^{-\left(t+\frac{\cos^2\theta}{4\sigma_n^2}\right)a^2}\ {}_1F_1\left(1,\frac{1}{2};\frac{\cos^2\theta}{2\sigma_n^2}a^2\right)da+\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sigma_n}\cdot\int_0^\infty a^{2n+2}e^{-\left(t+\frac{\cos^2\theta}{4\sigma_n^2}\right)a^2}\ {}_1F_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2};\frac{\cos^2\theta}{2\sigma_n^2}a^2\right)\right]da \quad \text{(a.9)}$$

위의 적분을 계산하기 위하여 아래의 적분 공식[3]을 이용하면,

$$\int_0^\infty e^{-st}\, t^{b-1}\, {}_1F_1(a,c\,;kt)dt = \Gamma(b)s^{-b}\cdot$$

$${}_2F_1\left(a,b\,;c\,;\frac{k}{s}\right),\ |s|>|k|,\ Re(b)>0 \qquad \text{(a.10)}$$

$$f(\theta)=\frac{e^{-K}}{4\sqrt{\pi}\,\sigma_a^{\,2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{2n}}{(n!)^2 4^n}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+1)\right.$$

$$\cdot\frac{1}{\left(t+\frac{\cos^2\theta}{4\sigma_n^{\,2}}\right)^{n+1}}\,{}_2F_1\left(1,n+1;\frac{1}{2};\frac{2\cos^2\theta}{4\sigma_n^2 t+\cos^2\theta}\right)$$

$$+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}\sigma_n}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\left(t+\frac{\cos^2\theta}{4\sigma_n^{\,2}}\right)^{n+\frac{3}{2}}}\cdot$$

$$\left.{}_2F_1\left(\frac{3}{2},n+\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{2\cos^2\theta}{4\sigma_n^2 t+\cos^2\theta}\right)\right] \qquad \text{(a.11)}$$

가 되고, 식 (a.4)와 (a.5)를 대입해서 정리하면 최종적으로 수신 신호에 대한 위상오류의 확률 밀도 함수 식 (13)이 된다.

참 고 문 헌

[1] R. E. Ziemer, W. H. Tranter, *Principles of Communications*, Houghton Mifflin Company, 1995.

[2] P. Z. Peebles, *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*, McGraw-Hill, 1993.

[3] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1965.

[4] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1995.

[5] 김치환, 한영열, "나카가미 감쇄채널에서 BPSK와 QPSK 신호의 변조분류", 한국통신학회 논문지, 20(4), pp. 952-961, 1995년 4월.

[6] 서동규, "라이시안 감쇄 채널에서 수신 신호의 포락선 분포를 이용한 시스템 성능분석", 한양대학교 석사논문, 1999년.

김 민 종

2000년 2월: 한양대학교 전자·전자통신·전파공학과군 (공학사)
2002년 2월: 한양대학교 전자통신전파공학과 (공학석사)
2002년 3월~현재: 어필텔레콤(주) 통신연구소 연구원
[주 관심분야] 디지털 통신이론, 이동 통신

한 영 열

1960년 2월: 서울대학교 전자공학과 (공학사)
1976년 5월: Univ. of Missouri 통신공학 (공학석사)
1979년 5월: Univ. of Missouri 통신공학 (공학박사)
1985년~1987년: 전자통신에 관한 국제기구 국내 연구단 운영위원
1988년~1989년: 미국 콜로라도 주립대 교환교수
1991년~1994년: 체신부 전파육성협의회 운영위원
1981년~1995년: 한국통신학회 이사, 상임이사, 부회장
1995년~1996년: 미국 오레곤 주립대학 교환교수
1997년~현재: 한국통신학회 감사
1993년~현재: 특허청 객원 심사위원
1980년~현재: 한양대학교 전자전기공학부 교수
[주 관심분야] 확률/통계통신, 디지털 통신이론, 이동 통신, 통신 시스템