

# Waviness 가 있는 볼베어링으로 지지된 회전계의 동특성 해석 (II) -안정성 해석-

정 성 원\* · 장 건 희†

(2002년 5월 21일 접수, 2002년 10월 7일 심사완료)

## Dynamic Analysis of a Rotating System Due to the Effect of Ball Bearing Waviness (II) -Stability Analysis-

Seong-Weon Jeong and Gunhee Jang

**Key Words :** Waviness(굴곡), Ball Bearing(볼베어링), Rotating System(회전계), Bearing Vibration(베어링 진동), Stability Analysis(안정성 해석), Parametrically Excitation System(계수가진계)

### Abstract

This research presents an analytical model to investigate the stability due to the ball bearing waviness in a rotating system supported by two ball bearings. The stiffness of a ball bearing changes periodically due to the waviness in the rolling elements as the rotor rotates, and it can be calculated by differentiating the nonlinear contact forces. The linearized equations of motion can be represented as a parametrically excited system in the form of Mathieu's equation, because the stiffness coefficients have time-varying components due to the waviness. Their solution can be assumed as a Fourier series expansion so that the equations of motion can be rewritten as the simultaneous algebraic equations with respect to the Fourier coefficients. Then, stability can be determined by solving the Hill's infinite determinant of these algebraic equations. The validity of this research is proved by comparing the stability chart with the time responses of the vibration model suggested by prior researches. This research shows that the waviness in the rolling elements of a ball bearing generates the time-varying component of the stiffness coefficient, whose frequency is called the frequency of the parametric excitation. It also shows that the instability takes place from the positions in which the ratio of the natural frequency to the frequency of the parametric excitation corresponds to  $i/2$  ( $i=1,2,3..$ ).

### 1. 서론

볼베어링의 볼과 궤도륵에 존재하는 기하학적 결함인 waviness는 회전계의 진동을 유발하는 가진원으로 작용할 뿐만 아니라, 회전에 따른 볼베어링의 강성을 변화시켜 회전계의 고유진동특성과 그에 따른 응답을 변화시키는 원인이 된다. 회전계의 회전중 waviness에 의해 발생하는 고유진동특성의 변화는 최근 고속, 고정밀화 경향의 초정밀 회전기기의 성능에 큰 영향을 미칠 수 있기 때

문에, 안정된 회전특성을 가지는 회전계의 설계를 위하여 waviness의 영향을 고려한 회전계의 안정성 해석이 요구된다.

Jones<sup>(1)</sup>는 볼의 원심력과 자이로스콕픽 모멘트에 의한 궤도륵 제어이론을 제안하였고, 강성과 접촉력 등의 볼베어링 특성을 계산하기 위한 일반적인 해석방법을 제안하였다. 또한 Harris<sup>(2)</sup>와 Hamrock과 Dowson<sup>(3)</sup>은 Jones의 이론을 사용하여 다양한 설계변수에 대한 해석을 수행한 바 있다. 이러한 연구를 통한 정확한 베어링 특성해석을 바탕으로 회전계의 고유특성에 대한 많은 연구가 수행되었지만 대부분 기하학적 결함이 없는 베어링으로 지지된 회전계에 대한 연구로서, waviness의 영향에 의한 동특성 변화 등은 설명하지 못하였다. Yhland<sup>(4)</sup>는 waviness의 영향을 고려한 회전계 해석 모델을

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : ghjang@hanyang.ac.kr  
TEL : (02)2290-0431 FAX : (02)2292-3406  
\* 한양대학교 기계공학부 PREM Lab.

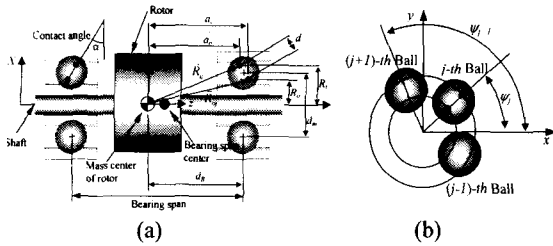


Fig. 1 (a) Rigid rotor supported by two ball bearings in  $x$ - $z$  plane (b) Ball bearing in  $x$ - $y$  plane

제안하였는데, 이 모델은 선형화된 접촉력에 의한 강성행렬 해석모델이므로 하중-변형간의 비선형 특성에 의한 응답을 예측할 수 없다는 단점이 있었다. 따라서, 이러한 볼베어링의 비선형성을 고려한 해석을 위하여 많은 연구가 수행되었는데, Aktürk 등<sup>(5,6)</sup>은 waviness를 고려한 3자유도 강체회전체의 해석모델을 제안하였고, Jang and Jeong<sup>(7)</sup>은 waviness와 5자유도 회전체의 자이로스코픽 효과를 고려한 가진모델을 제안한 바 있다. 그리고 정성원과 장건희<sup>(8,9)</sup>는 5자유도 강체회전체의 해석모델에 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트를 고려하여 개선된 해석모델을 수립하고, 비선형 접촉력에 의한 동특성을 계산하였다. 그러나 이와같은 해석모델은 waviness를 포함하는 볼베어링으로 지지된 회전체의 특정 운전조건에 대한 응답의 계산이 가능하지만, 전체 운전조건에 대한 안정성 판별은 불가능하다.

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 waviness를 가지는 두개의 볼베어링으로 지지된 강체회전체의 안정성을 해석하기 위한 해석모델을 제안하였다. 볼베어링의 waviness와 볼의 원심력 그리고 자이로스코픽 모멘트를 고려한 5자유도 강체회전체의 해석모델<sup>(9)</sup>을 사용하여 비선형 접촉력에 의한 강성행렬과 회전에 따른 각 성분의 변화를 계산하였다. 이와 같이 시간의 변화에 따라 강성계수가 주기적인 변화를 하는 5자유도 강체회전체의 운동방정식은 계수가진(parametrically excited)계가 되며 Mathieu방정식 형태의 선형방정식으로 표현할 수 있다. Mathieu 방정식의 해는 Fourier급수로 가정할 수 있으므로 운동방정식은 Fourier 계수에 대한 대수연립방정식으로 변환된다. 이 방정식으로부터 Hill의 무한행렬식에 대한 안정성 판별조건에 따라 안정성선도를 구하여 안정성을 판별하였다. 안정성 판별결과를 검증하기 위하여, 5자유도 회전체의 비선형 해석모델에 의한 시간응답을 구하여 안정성 선도와 비교하였다.

## 2. 해석방법

### 2.1 Waviness 에 의한 강성계수 계산

Fig. 1 과 같이 강체 회전체를 지지하는 두개의

베어링에 의한 강성계수는 볼베어링 구름요소간에 발생하는 비선형 접촉력을 회전체의 질량중심으로 부터 정의된 위치벡터  $\{u\} = \{x, y, z, \theta_x, \theta_y\}^T$  로 편미분 함으로써 계산할 수 있다. 본연구에서는 두 베어링의 반경방향 및 축방향 waviness 간 위상차는 각각  $0^\circ$  와  $180^\circ$  이며, 회전체의 질량중심과 베어링의 스캔중심은 서로 일치한다고 가정하였다. 따라서  $5 \times 5$  강성행렬의 비대각성분은 모두 소멸되고 대각성분만이 남게된다. 따라서 각 강성계수는 다음과 같이 표현된다.<sup>(8,9)</sup>

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\partial F_x}{\partial x} = \sum_{b=1}^{N_b} \sum_{j=1}^Z \left[ 1.5K_y \delta_{ij}^s \frac{\partial \delta_{ij}^s}{\partial x} \cos \alpha_{ij} + K_y \delta_{ij}^{s5} \frac{\partial \cos \alpha_{ij}}{\partial x} + \frac{\lambda_y M_G}{D} \frac{\partial \sin \alpha_{ij}}{\partial x} \right] \cos \psi_j \\ k_y &= \frac{\partial F_y}{\partial y} = \sum_{b=1}^{N_b} \sum_{j=1}^Z \left[ 1.5K_y \delta_{ij}^s \frac{\partial \delta_{ij}^s}{\partial y} \cos \alpha_{ij} + K_y \delta_{ij}^{s5} \frac{\partial \cos \alpha_{ij}}{\partial y} + \frac{\lambda_y M_G}{D} \frac{\partial \sin \alpha_{ij}}{\partial y} \right] \sin \psi_j \\ k_z &= \frac{\partial F_z}{\partial z} = \sum_{b=1}^{N_b} \sum_{j=1}^Z \left[ 1.5K_y \delta_{ij}^s \frac{\partial \delta_{ij}^s}{\partial z} \sin \alpha_{ij} + K_y \delta_{ij}^{s5} \frac{\partial \sin \alpha_{ij}}{\partial z} - \frac{\lambda_y M_G}{D} \frac{\partial \cos \alpha_{ij}}{\partial z} \right] \\ k_{\theta_x} &= \frac{\partial M_x}{\partial \theta_x} = \sum_{b=1}^{N_b} \sum_{j=1}^Z \left[ 1.5K_y \delta_{ij}^s \frac{\partial \delta_{ij}^s}{\partial \theta_x} \tau_{ij} + K_y \delta_{ij}^{s5} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \theta_x} - \frac{\lambda_y M_G}{D} \frac{\partial e_{ij}}{\partial \theta_x} \right] \sin \psi_j \\ k_{\theta_y} &= \frac{\partial M_y}{\partial \theta_y} = - \sum_{b=1}^{N_b} \sum_{j=1}^Z \left[ 1.5K_y \delta_{ij}^s \frac{\partial \delta_{ij}^s}{\partial \theta_y} \tau_{ij} + K_y \delta_{ij}^{s5} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \theta_y} - \frac{\lambda_y M_G}{D} \frac{\partial e_{ij}}{\partial \theta_y} \right] \cos \psi_j \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $N_b$ ,  $Z$ ,  $\psi_j$ ,  $\delta_{ij}^s$ ,  $K_{ij}$  그리고  $M_{Gj}$  는 각각 볼베어링의 개수, 볼의 개수,  $j$  번째 볼의 편향각, 접촉변형, 하중-변형상수 그리고 볼의 자이로스코픽 모멘트이다. 그리고  $e_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$  는 다음과 같이 표현된다.

$$e_{ij} = R_i \cos \alpha_{ij} + a_i \sin \alpha_{ij}, \quad \tau_{ij} = R_i \sin \alpha_{ij} - a_i \cos \alpha_{ij} \quad (2)$$

여기서  $R_i$ ,  $a_i$  그리고  $\alpha_{ij}$  는 각각 내륜 곡률반경중심 위치벡터의 반경방향과 축방향성분과 내륜의 접촉각을 의미한다. 볼과 웨드론의 waviness 는 기존의 연구에서와 같이 정현파 함수로 모델링하여 운동방정식에 적용하였다.<sup>(5-9)</sup>

### 2.2 Waviness 에 의한 계수가진계의 안정성해석

두 베어링의 반경방향 및 축방향 waviness 간 위상차를 각각  $0^\circ$  와  $180^\circ$  이며, 회전체의 질량중심과 베어링의 스캔중심은 서로 일치한다고 가정하였으므로 회전체의  $x$ ,  $y$  그리고  $z$  방향 병진운동은 연성되지 않으며 되고  $\theta_x$  와  $\theta_y$  방향의 각운동은 자이로스코픽 효과에 의해 연성된다. 따라서 회전체의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_x(t)x &= 0 \\ m\ddot{y} + k_y(t)y &= 0 \\ m\ddot{z} + k_z(t)z &= 0 \\ I_x \ddot{\theta}_x + I_x \Omega \dot{\theta}_y + k_{\theta_x}(t)\theta_x &= 0 \\ I_y \ddot{\theta}_y - I_y \Omega \dot{\theta}_x + k_{\theta_y}(t)\theta_y &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $m, I_1, I_2$  그리고  $\Omega$ 는 회전체의 질량, 반경축 방향의 관성모멘트, 극관성 모멘트 그리고 회전체의 회전속도이다. 비연성화된 병진운동과 연성된 각운동에 대하여 안정성 해석을 각각 수행하였으며, 강성계수의 계수가진주파수는 기본 주파수 성분과 그 조화성분을 포함하고 있으나, 조화성분의 진폭은 기본주파수에 비하여 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정하였다.

2.2.1 병진운동에 의한 안정성 해석

병진운동에 대한 운동방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$m\ddot{p}(t) + (K + k \cos \chi t) p(t) = 0 \tag{4}$$

여기서  $K, k$  그리고  $\chi$ 는 강성계수의 평균값, 시간 변화량 그리고 계수가진주파수를 각각 의미한다.  $p(t)$ 는 병진운동의 일반좌표계를 의미하며 식 (4)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\ddot{p}(t) + \omega_i^2 (1 + \varepsilon \cos \chi t) p(t) = 0 \tag{5}$$

여기서  $\omega_i$ 와  $\varepsilon$ 는 각각 회전계의 병진운동방향 고 유진동수, 강성계수의 평균값에 대한 시간변화량의 비율로서 각각 다음 식으로 표현된다.

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \varepsilon = \frac{k}{K} \tag{6}$$

식 (5)의 계수가진주파수는  $\chi$ 이므로 방정식의 해는 주기  $T=2\pi/\chi$ 를 가지는 주기함수라고 할 수 있다. 따라서 방정식의 해  $p(t)$ 는 다음과 같은 성질을 가진다.

$$p(t+T) = \sigma p(t) \tag{7}$$

여기서  $\sigma$ 는 임의의 상수이다. 즉,  $|\sigma| > 1$ 인 경우  $p(t)$ 는 시간의 경과에 따라 불안정하게 되고,  $|\sigma| < 1$ 인 경우의  $p(t)$ 는 안정하게 되며,  $|\sigma| = 1$ 인 경우는 시간의 경과에 따라 동일한 진폭을 유지하므로 임계안정특성을 가지게 된다. 따라서, 안정과 불안정의 경계는  $\sigma = \pm 1$ 인 조건에서 구해지는데,  $\sigma = +1$ 인 경우  $p(t)$ 의 주기는  $T$ 가 되고  $\sigma = -1$ 인 경우의 주기는  $2T$ 가 된다. 그런데  $\sigma = -1$ 인 경우의 특성방정식이 가지는 고유치는  $\sigma = +1$ 인 경우의 고유치를 모두 포함하기 때문에, 본 연구에서는  $\sigma = -1$ 인 경우의 특성방정식만을 유도하고, 해석을 수행하였다.<sup>(10)</sup>  $2T$ 의 주기를 가지는 주기해  $p(t)$ 에 대하여 식 (7)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$p(t+2T) = p(t) \tag{8}$$

이 경우  $p(t)$ 는 Fourier 급수를 사용하여 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos n \frac{\chi t}{2} + b_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \tag{9}$$

여기서  $a_n$ 과  $b_n$ 는 Fourier 계수이며, 가속도  $\ddot{p}(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{p}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -a_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \cos n \frac{\chi t}{2} - b_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \tag{10}$$

식 (9),(10)을 식 (5)에 대입하면 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4} \chi^2 \left[ a_n \cos n \frac{\chi t}{2} + b_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \\ & + \omega_i^2 \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{\chi t}{2} + b_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right) \right] \\ & + a_0 \omega_i^2 \varepsilon \cos \chi t + \omega_i^2 \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \left( \cos \frac{2+n}{2} + \cos \frac{2-n}{2} \right) \right] \\ & + \omega_i^2 \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \left( \sin \frac{2+n}{2} - \sin \frac{2-n}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

이 식을  $\sin n\chi t$ 와  $\cos n\chi t$ 에 관한 성분 그리고 상수에 대하여 정리하고 각 항을 0으로 두면, 다음과 같이  $a_n$ 와  $b_n$ 에 대한 선형 대수연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\text{상수 } (n=0): \omega_i^2 a_0 + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} a_2 = 0 \tag{12}$$

$$\cos \frac{\chi t}{2} \quad (n=1): \left( \omega_i^2 + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} - \frac{\chi^2}{4} \right) a_1 + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} a_3 = 0 \tag{13}$$

$$\sin \frac{\chi t}{2} \quad (n=1): \left( \omega_i^2 - \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} - \frac{\chi^2}{4} \right) b_1 + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} b_3 = 0 \tag{14}$$

$$\cos \chi t \quad (n=2): \left( \omega_i^2 - \chi^2 \right) a_2 + \omega_i^2 \varepsilon a_0 + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} a_4 = 0 \tag{15}$$

$$\sin \chi t \quad (n=2): \left( \omega_i^2 - \chi^2 \right) b_2 + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} b_4 = 0 \tag{16}$$

$$\cos \frac{n\chi t}{2} \quad (n \geq 3): \left( \omega_i^2 - \frac{n^2}{4} \chi^2 \right) a_n + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} a_{n-2} + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} a_{n+2} = 0 \tag{17}$$

$$\sin \frac{n\chi t}{2} \quad (n \geq 3): \left( \omega_i^2 - \frac{n^2}{4} \chi^2 \right) b_n + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} b_{n-2} + \frac{\omega_i^2 \varepsilon}{2} b_{n+2} = 0 \tag{18}$$

식 (12)-(18)을  $N$ 차 항까지 전개하고 Fourier 계수에 대하여 정리하면, 다음과 같이 표현된다.

$$[P]\{U\} = 0 \tag{19}$$

여기서  $\{U\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_N, b_1, b_2, b_3, \dots, b_N\}^T$ 이며, 행렬  $[P]$ 는 다음 무차원수에 의해 표현할 수 있다.

$$\rho = \frac{\omega_a^2}{\chi^2}, \quad e = \frac{\omega_a^2}{\chi^2} \varepsilon \quad (20)$$

식 (19)가 유리해(non-trivial solution)를 가지기 위해서는  $[P]$ 의 행렬식이 0 이 되어야 한다. 그리고 행렬 $[P]$ 는 그 대각성분에만  $\rho$ 를 포함하게 되므로,  $[P]$ 는 다음식과 같은  $\rho$ 의 고유치 문제로 표현할 수 있다.<sup>(10-12)</sup>

$$[[P]_{\rho=0} + \rho[I]] = 0 \quad (21)$$

여기서  $[P]_{\rho=0}$ 는  $[P]$ 에서  $\rho$ 를 제외한 행렬이며,  $[I]$ 는 단위행렬이다. 식 (21)은 Hill의 무한행렬식과 동일한 형태가 되는데, 식 (21)의 해는 안정과 불안정의 경계를 의미하게 되며, Hill의 무한행렬식의 안정성 판별조건에 따라 다음의 조건에 의해 불안정 영역이 결정된다.<sup>(11,12)</sup>

$$|P| < 0 \quad (22)$$

2.2.2 각운동에 의한 안정성 해석

각운동에 대한 운동방정식은 다음과 같이 회전체의 자이로스코픽 효과에 의해 연성된 방정식으로 표현된다.

$$\ddot{\theta}_x + \Omega \xi \dot{\theta}_y + \omega_a^2(1 + \varepsilon \cos \chi t)\theta_x = 0 \quad (23)$$

$$\ddot{\theta}_y - \Omega \xi \dot{\theta}_x + \omega_a^2(1 - \varepsilon \cos \chi t)\theta_y = 0 \quad (24)$$

여기서  $\omega_a$ 와  $\xi$ 는 회전체의 각운동 방향 진동의 고유진동수 그리고 극관성 모멘트에 대한 반경방향 관성모멘트의 비율을 의미하며 각각 다음의 식으로 표현된다.

$$\omega_a = \sqrt{\frac{K}{I_z}}, \quad \xi = \frac{I_r}{I_z} \quad (25)$$

식 (23),(24)의  $\theta_x$ 와  $\theta_y$ 는 다음과 같은 Fourier 급수로 각각 가정할 수 있다.

$$\theta_x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos n \frac{\chi t}{2} + b_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \quad (26)$$

$$\theta_y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \cos n \frac{\chi t}{2} + d_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \quad (27)$$

가속도는 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ddot{\theta}_x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -a_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \cos n \frac{\chi t}{2} - b_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \quad (28)$$

$$\ddot{\theta}_y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -c_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \cos n \frac{\chi t}{2} - d_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \quad (29)$$

식 (26)-(29)를 식 (23)-(24)에 대입하면 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4} \chi^2 \left[ a_n \cos n \frac{\chi t}{2} + b_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \\ & + \Omega \xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \chi \left[ -c_n \sin n \frac{\chi t}{2} + d_n \cos n \frac{\chi t}{2} \right] \\ & + \omega_a^2 \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{\chi t}{2} + b_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right) \right] + a_0 \omega_a^2 \varepsilon \cos \chi t \\ & + \omega_a^2 \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \left( \cos \frac{2+n}{2} + \cos \frac{2-n}{2} \right) \right] \\ & + \omega_a^2 \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \left( \sin \frac{2+n}{2} - \sin \frac{2-n}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4} \chi^2 \left[ c_n \cos n \frac{\chi t}{2} + d_n \sin n \frac{\chi t}{2} \right] \\ & - \Omega \xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \chi \left[ -a_n \sin n \frac{\chi t}{2} + b_n \cos n \frac{\chi t}{2} \right] \\ & + \omega_a^2 \left[ c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n \sin n \frac{\chi t}{2} + d_n \cos n \frac{\chi t}{2} \right) \right] + c_0 \omega_a^2 \varepsilon \cos \chi t \\ & + \omega_a^2 \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n \left( \sin \frac{2+n}{2} + \sin \frac{2-n}{2} \right) \right] \\ & + \omega_a^2 \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[ d_n \left( \cos \frac{2+n}{2} - \cos \frac{2-n}{2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

이 식을  $\sin n\chi t$ 와  $\cos n\chi t$ 에 관한 성분 그리고 상수에 대하여 정리하고 각 항을 0으로 두면, 다음과 같이  $a_n, b_n, c_n$  그리고  $d_n$ 에 대한 선형 대수 연립 방정식이 얻어진다. 식 (30),(31)을  $N$ 차 항까지 전개하고 Fourier 계수에 대하여 정리하면, 다음과 같이 표현된다.

$$[P]\{U\} = 0 \quad (32)$$

여기서  $\{U\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_N, b_1, b_2, b_3, \dots, b_N, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_N, d_1, d_2, d_3, \dots, d_N\}^T$ 이며, 행렬  $[P]$ 는 식 (20)과 다음의 무차원수에 의해 표현된다.

$$\mu = \frac{\Omega \xi}{\chi} \quad (33)$$

식 (32)의 안정성은 식 (21),(22)를 사용하여 병진운동과 동일하게 해석할 수 있다.

3. 결과 및 고찰

3.1 볼베어링 waviness에 의한 감성변화

Table 1과 2는 해석에 사용된 볼베어링과 회전체의 사양을 나타낸 것이다. 그리고 Fig. 2는 내륜

**Table 1 Specification of a rotor system**

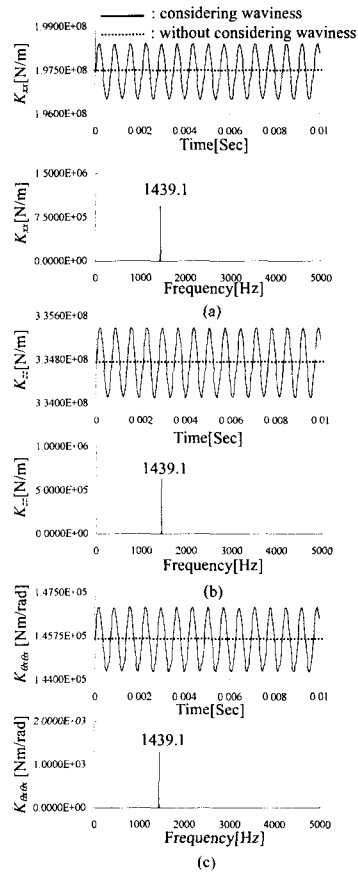
Parameter	Value
Radial mass moment of inertia, $I_r$	$3.985 \times 10^{-3}$ [kg-m <sup>2</sup> ]
Polar mass moment of inertia, $I_z$	$7.534 \times 10^{-3}$ [kg-m <sup>2</sup> ]
Mass, $m$	$8.6 \times 10^{-1}$ [kg]
Bearing span	$8.0 \times 10^{-2}$ [m]
Number of bearings	2

**Table 2 Specification of a ball bearing**

Parameter	Value
Number of balls, $Z$	16
Ball diameter, $D$	$22.23 \times 10^{-3}$ [m]
Free pitch diameter, $d_{m0}$	$125.26 \times 10^{-3}$ [m]
Axial preload, $P_z$	10 [kN]
Groove radius of inner race, $r_i$	$11.63 \times 10^{-3}$ [m]
Groove radius of outer race, $r_o$	$11.63 \times 10^{-3}$ [m]
Diametral clearance, $P_d$	$0.43 \times 10^{-3}$ [m]
Waviness amplitude, $A$	$1 \times 10^{-6}$ [m]

waviness 의 차수가 16 이고, 두 베어링에 존재하는 waviness 의 축방향 위상차가 180° 인 경우 강성계수와 그 변화주파수를 나타낸 것이다. 볼베어링에 waviness 가 존재하는 경우의 강성계수는 waviness 가 존재하지 않는 경우의 강성계수를 기준으로 주기적으로 변화하는 것을 볼 수 있으며, 차수가 16 인 좌우 베어링의 waviness 는 축방향, 반경방향 그리고 각운동 방향 강성계수성분의 시간변화를 유발함을 알 수 있다. 좌우 베어링에 존재하는 내륜 waviness 의 위상차가 180° 이므로 회전체의 축방향 변위는 발생하지 않지만, 접촉각 방향의 탄성변형은 발생하게 되므로 축방향, 반경방향 그리고 각운동 방향 강성계수성분의 변화가 모두 발생하게 된다. 그리고 회전계를 계수가진 시키는 주파수 성분은 볼베어링의 waviness 차수가 16 인 경우 발생하는 베어링 진동의 축방향 기본 주파수 성분( $16(f_c) = 1439.1\text{Hz}$ )과 동일하다.

Fig. 3 은 내륜 waviness 의 차수가 15 이고, 두 베어링에 존재하는 waviness 의 반경방향 위상차가 0° 인 경우 강성계수와 그 변화주파수를 나타낸 것이다. 내륜 waviness 의 차수가 15 인 경우는 회전체의 축방향 변위가 발생하지 않기 때문에, 반경방향의 탄성변형만이 발생하고 따라서 반경방향 강성계수의 시간변화만이 발생하게 된다. 그리고 계수가진 주파수는 내륜 waviness 의 차수가 15 인 경우 발생하는 반경방향 베어링 진동주파수( $16(f_c) - f = 1272.4\text{Hz}$ )의 2 배인 2514 Hz 의 주파수로 발생하는 것을 볼 수 있다. 다양한 waviness 와 볼베어링에 대한 해석을 수행한 결과, 내륜에 존재하는 waviness 의 차수가 볼의 개수보다 1 이 크거나



**Fig. 2** Stiffness coefficients and their frequency spectra in the case that the left and right bearings have the inner race waviness of order 16 with 180° phase difference

을 경우 발생하는 계수가진 주파수는 동일한 waviness 에 의한 반경방향 베어링 진동주파수의 2 배성분으로 발생하는 것을 확인하였다.

Fig. 2 와 3 에서, 내륜 waviness 의 차수가 16 인 경우의 강성계수 변화량이 내륜 waviness 의 차수가 15 인 경우에 비하여 매우 크게 발생하는 것을 볼 수 있는데, 축방향 예압을 받고 있는 볼베어링의 경우 waviness 차수가 16 인 경우 발생하는 축방향 접촉력의 변화량이 차수가 15 인 경우 발생하는 반경방향 접촉력의 변화량에 비하여 매우 크기 때문이다.

Fig. 4 는 볼 waviness 의 차수가 2 인 경우 강성계수와 그 변화주파수를 나타낸 것인데, 축방향, 반경방향 및 각운동 방향에 대하여 강성계수의 시간변화가 발생하는 것을 볼 수 있다. 축방향의 계수가진 주파수는 축방향의 베어링 진동주파수( $2f_b = 1001.8\text{Hz}$ )와 정확히 일치한다. 그리고 반경방향과 각운동 방향의 계수가진 주파수는  $2f_b \pm 2f_c = 848, 1155.3\text{Hz}$  로서 반경방향 및 각운동 방향의 베어링

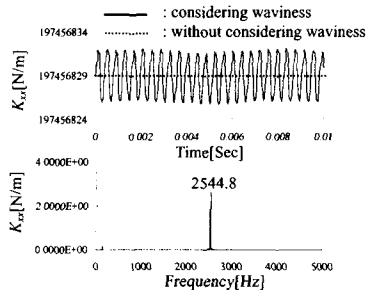


Fig. 3 Radial stiffness coefficient and its frequency spectrum in the case that the left and right bearings have the inner race waviness of order 15 with 0° phase difference

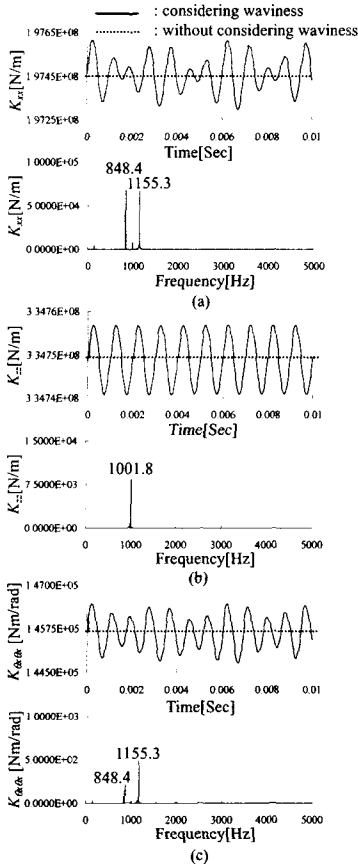


Fig. 4 Stiffness coefficients and their frequency spectra in the case that the ball has the waviness of order 2

진동주파수( $2f_b \pm f_c$ )에서  $f_c$  만큼 이동한 주파수 성분을 가지는 것을 알 수 있다. 다양한 회전속도에 대한 해석을 통하여 볼 waviness의 차수가 2인 경우의 계수가진 주파수는 베어링 진동주파수에서  $f_c$  만큼 이동한 주파수로 발생하는 것을 확인하고, 강성계수의 계수가진 주파수를 Table 3에 정리하여 나타내었다.

Table 3 Principal frequencies of vibration and stiffness coefficients due to the waviness of the rolling elements ( $i \geq 1$  : integer,  $Z$  : number of balls,  $f$  : rotating frequency of inner race,  $f_c$  : cage rotating frequency,  $f_b$  : ball spinning frequency)

Type of waviness	Waviness order	Principal frequencies of vibration [Hz] <sup>(13)</sup>	Type of motion	Principal frequencies of stiffness [Hz]	Type of Stiffness
Outer race	$l=iZ$	$iZf_c$	axial	$iZf_c$	$K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}$
	$l=iZ \pm 1$	$iZf_c$	radial	$2iZf_c$	$K_{xx}, K_{yy}$
Inner race	$l=1$	$f$	radial	$2f$	$K_{xx}, K_{yy}$
	$l=iZ$	$iZ(f-f_c)$	axial	$iZ(f-f_c)$	$K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}$
	$l=iZ \pm 1$	$iZ(f-f_c) \pm f$	radial	$2iZ(f-f_c) \pm 2f$	$K_{xx}, K_{yy}$
Ball	Overize	$f_c$	radial	$2f_c$	$K_{xx}, K_{yy}$
	$l=2i$	$2if_b$	axial	$2if_b$	$K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}$
	$l=2i$	$2if_b \pm f_c$	radial	$2if_b \pm 2f_c$	$K_{xx}, K_{yy}$

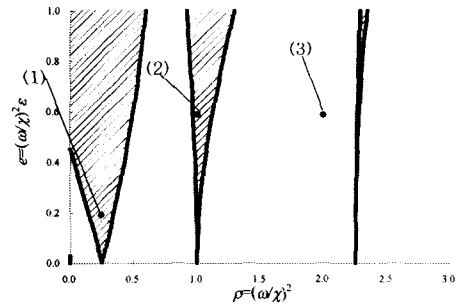


Fig. 5 Stability chart for the translational motion (□ : stable region, ▨ : unstable region)

3.2 병진운동에 의한 계수가진계의 안정성

식 (4)로 표현되는 병진운동에 대한 운동방정식으로부터 식 (22)와 같은 Hill의 무한행렬식을 구하여 안정성 판별조건에 따라 안정성 해석을 수행한 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 이를 계산하기 위하여, 식 (21)의 고유치를 해석하여 안정과 불안정의 경계를 구하고, 식 (22)의 조건에 따라 안정과 불안정 영역을 각각 판별하였다. Fourier 급수항의 계수는 안정선도의 변화가 발생하지 않을 때까지 증가해 가며 계산을 수행하였으며, 본 연구에서는 40개의 Fourier 계수( $N=40$ )를 사용하였다. Fig. 5의 모든 곡선들은  $e$ 의 변화에 대하여 행렬[P]의 고유치  $\rho$ 를 계산한 결과이다. 불안정 영역은  $x$  축상에 존재하는  $\rho = i^2/4$  ( $i=1,2,3,\dots$ )인 지점으로 부터 발생하는 것을 볼 수 있는데, 이 지점은  $e$ 가 0이 되는 경우, 행렬[P]의 고유치가 된다.  $\rho=1$ 이고  $e=0$ 인 경우 회전체의 고유진동수와 강성계수의 계수가진주파수가 일치하게 되므로 공진이 발생하게 되며, 운동방정식의 해를 계수가진주파수( $n\chi/2, n=1,2,\dots$ )와 Fourier 계수에 의한 다항식으로 가정하였기 때문에  $\rho = i^2/4$  ( $i=1,3,4,5,\dots$ ),  $e=0$ 인 경우 또한 공진이 발생하게 된다.

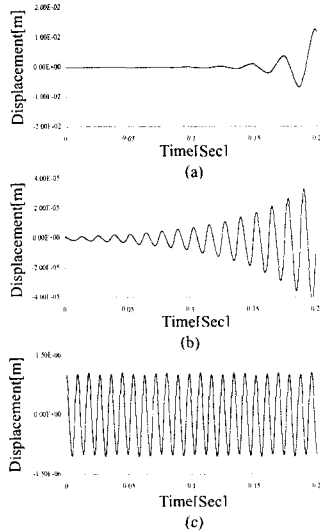


Fig. 6 Time responses of the radial displacements for varying  $\rho$  and  $e$ : (a)  $\rho=0.25, e=0.2$  (b)  $\rho=1.0, e=0.6$ , (c)  $\rho=2.0, e=0.6$

Fig. 6 은 안정성 해석의 타당성을 검증하기 위하여 Fig. 5 의 불안정 영역인 (1)( $\rho=0.25, e=0.2$ ), (2)( $\rho=0.2, e=0.6$ )지점과 안정영역인 (3)( $\rho=2.0, e=0.6$ )지점에 대한 식 (14)의 시간응답을 계산한 결과이다. 초기변위와 수치적분의 시간간격은 각각  $1 \times 10^{-6}$  m,  $1 \times 10^{-7}$  sec 로 두고 계산하였다. Fig. 6 (a)와(b)는 불안정 영역 (1),(2)에 대한 시간응답이므로 발산하는 것을 볼 수 있고, Fig. 6 (c)는 안정영역에 대한 시간응답이므로 주어진 초기조건에 따라 일정한 진폭으로 진동함을 볼 수 있다.

Fig. 7 은 내륜 waviness 의 차수가 15, 16 인 경우와 볼 waviness 차수가 2 인 경우, 회전속도에 따른 강성계수변화를 계산한 특성곡선을 구하여 Fig. 5 의 안정선도와 비교한 결과이다. 여기서 y 축은 대수척도로 표현하였다. 특성곡선은 10,000 rpm 에서 20,000 rpm 까지 5,000 rpm 씩 증가시켜 가며 계산하였다. 여기서 3.1 절에서 계산한 바와 같이 강성계수가 변화하는 계수가진 주파수는 차수가 15 와 16 인 내륜 waviness 의 경우 각각  $(32(f-f_c)-2f)$  와  $(16(f-f_c))$ 이며, 차수가 2 인 볼 waviness 의 경우는  $(2f_b \pm 2f_c)$ 와 같이 발생하게 된다. Fig. 7 에서 볼 수 있듯이, 10kN 의 예압을 받는 Table 2 사양의 두 볼베어링으로 지지된 Table 3 의 회전계가 가지는 모든 특성곡선은 안정영역 내에 존재함을 알 수 있다. 그러나 동일한 베어링과 회전체에 대하여 베어링 예압이 변화하게 되면, 강성과 강성변화량이 변화하게 되어 Fig. 7 의 특성곡선 또한 변화

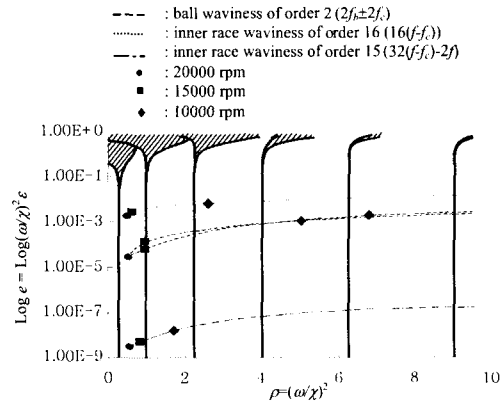


Fig. 7 Stability chart for the translational motion with the characteristic curves( □ : stable region, ▨ : unstable region)

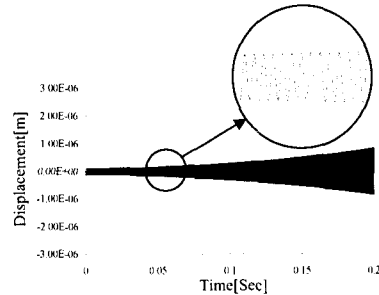


Fig. 8 Time response of the radial displacement corresponding to the unstable condition of ball bearing ( $\rho=1.0045, e=0.101576$ )

게 된다. 즉, 예압을 5.6 kN 으로 변화시켰을 경우, 내륜 waviness 차수가 16 일때의 특성곡선은 회전속도 10000rpm 에서 불안정 영역에 위치하게 된다. 이 경우의 계수가진주파수와 변화량 그리고 강성계수의 평균값은 각각 1351.38Hz,  $6.55 \times 10^6$  N/m 그리고  $6.45 \times 10^7$  N/m 로 계산된다. 따라서  $\rho$  와  $e$  는 각각 1.0045, 0.101576 가 되므로 Fig. 7 의 불안정 영역에 위치하게 된다. Fig. 8 은 식 (3)으로 표현되는 기존 해석모델<sup>(8,9,14)</sup>을 사용하여  $\rho$  와  $e$  가 각각 1.0045, 0.101576 인 경우에 대한 시간응답을 계산한 결과이다. 시간의 경과에 따라 발산하는 것을 확인할 수 있다.

### 3.3 각운동에 의한 계수가진계의 안정성

회전계의 각운동은 회전체의 자이로스코픽 효과에 의해 연성되는데, 본 연구에서는 식 (33)의 무차원수  $\mu$ 를 사용하여 해석에 적용하였고, 0.05 에서 0.1 사이의 값을 사용하였다. 식 (23)과 (24)로부터 Hill 의 무한행렬식을 구하고 안정성 해석을 수행하여 Fig. 9 에 나타내었다. Fourier 급수항의 계수는 병진운동의 경우와 같이 안정선도의 변화가

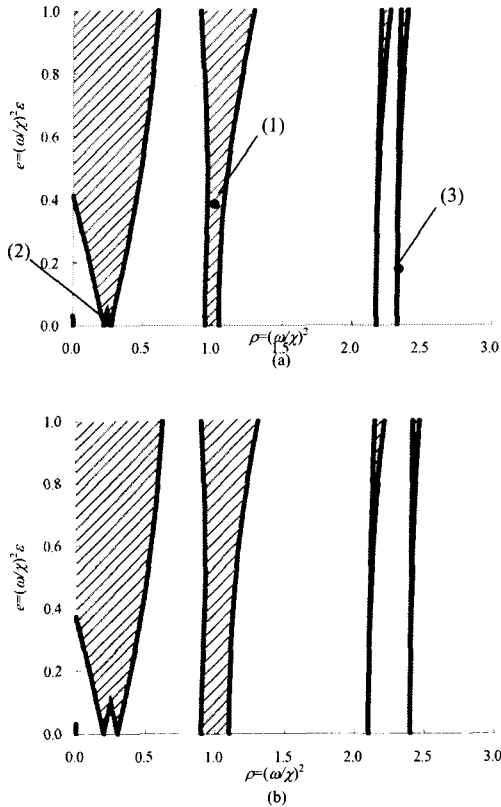


Fig. 9 Stability chart for the angular motion for varying  $\mu$  : (a)  $\mu=0.05$ , (b)  $\mu=0.1$  (□ : stable region, ▨ : unstable region)

발생하지 않을 때 까지 증가해 가며 계산을 수행하였고, 40 개의 Fourier 계수( $N=40$ )를 사용하였다. 병진운동의 경우와 같이,  $x$  축상의  $\rho=i^2/4$  ( $i=1,2,3..$ ) 지점을 기준으로 불안정 영역이 존재함을 확인할 수 있다. 그러나 무차원수  $\mu$ 의 영향으로 병진운동의 경우와는 달리  $\rho=1$  지점을 기준으로 넓은 공진 영역이 존재하는 것을 볼 수 있으며,  $\rho=0.25, 2.25$ 에서는 이 지점을 기준으로 두개의 불안정 영역이 나뉘어 지게 된다. 그리고  $\mu$ 의 증가에 따라 불안정성이 증가하게 된다.

Fig. 10 은 안정성 해석의 타당성을 검증하기 위하여, Fig. 9 의 불안정 영역인 (1) ( $\rho=1.0, e=0.4$ ) 지점과 안정영역인 (2) ( $\rho=0.25, e=0.01$ ) 와 (3) ( $\rho=2.4, e=0.2$ ) 지점에 대한 식 (23), (24)의 시간응답을 계산한 결과이다. 초기변위와 수치적분의 시간간격은 각각  $1 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,  $1 \times 10^{-7} \text{ sec}$  로 두고 계산하였다. Fig. 10 (a)의 시간응답이 발산하는 것으로부터 (1)지점이 불안정 영역임을 확인할 수 있으며, Fig. 10 (b)와 (c)의 안정된 시간응답특성으로부터 (2)와 (3)지점이 안정영역을 확인할 수 있다.

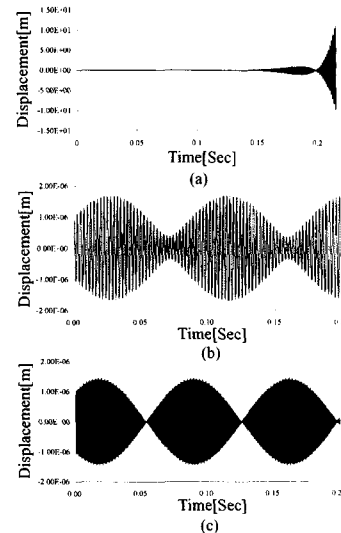


Fig. 10 Time responses of the angular displacements for varying  $\rho$  and  $e$  : (a)  $\rho=1.0, e=0.4$ , (b)  $\rho=0.25, e=0.01$ , (c)  $\rho=2.4, e=0.2$

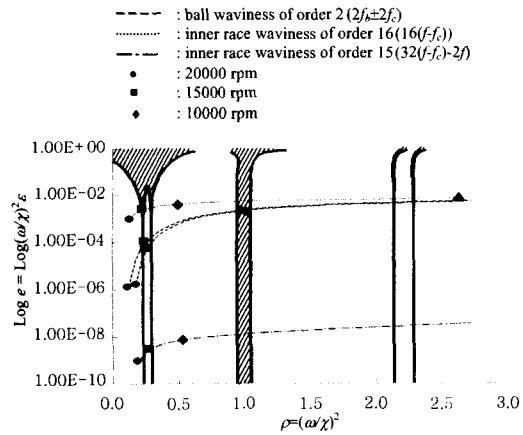


Fig. 11 Stability chart for the angular motion with the characteristic curves (□ : stable region, ▨ : unstable region)

Fig. 11 은 내륜 waviness 의 차수가 15, 16 인 경우와 볼 waviness 차수가 2 인 경우, 회전속도에 따른 강성계수변화를 계산한 특성곡선을 구하여 Fig 9(a)의 안정선도와 비교한 결과이다. 여기서  $y$  축은 대수척도로 표현하였다. 특성곡선은 10,000 rpm 에서 20,000 rpm 까지 5,000 rpm 씩 증가시켜 가며 계산하였다. 여기서 3.1 절에서 계산한 바와 같이 강성계수가 변화하는 계수가진 주파수는 차수가 15 와 16 인 내륜 waviness 의 경우 각각  $(32(f-f_c)-2f)$  와  $(16(f-f_c))$ 이며, 차수가 2 인 볼 waviness 의 경우는  $(2f_b \pm 2f_c)$ 와 같이 발생하게 된다. Fig. 11 에 나타



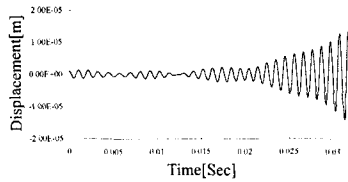


Fig. 12 Time response of the angular displacement corresponding to the unstable condition of ball bearing (inner race waviness of order=16,  $\Omega=15000\text{rpm}$ ,  $\rho=0.2199$ ,  $e=0.00102$ )

난 특성선도는 대부분 안정영역에 존재하지만, 모든 특성선도는  $\rho=1$  지점의 넓은 불안정 영역을 통과하게 된다. 또한 내륜 waviness 의 차수가 16 인 경우의 특성곡선은 회전속도가 15,000 rpm 일때 불안정 영역에 존재하게 된다. 이 경우의  $\rho$  와  $e$  는 각각  $\rho=0.2199$ ,  $e=0.00102$  으로 계산된다. 이 결과는 식 (23),(24)의 시간응답을 구하여 그 해가 발산함을 확인하였으며, 식 (3)으로 표현되는 기존의 해석모델<sup>(9,14)</sup>을 사용하여 동일한 경우에 대한 시간응답을 계산하고 Fig. 12 에 나타내었다. 시간의 경과에 따라 발산하는 것을 확인할 수 있다.

#### 4. 결론

(1) Waviness 를 가진 두개의 볼베어링으로 지지된 회전계에서 발생하는 강성계수의 계수가진주파수와 그 진폭을 계산하고 안정성을 해석하기 위한 해석적 방법을 제시하였다.

(2) 볼의 개수와 동일한 차수를 가지는 내륜 waviness 의 경우, 반경방향과 축방향 그리고 각운동방향성분의 강성계수에 대한 시간변화를 유발하고, 그 주파수는 waviness 에 의한 베어링 진동주파수와 동일하게 발생한다.

(3) 볼의 개수보다 하나 크거나 작은 차수의 내륜 waviness 의 경우, 반경방향과 각운동 방향성분의 강성계수에 대한 시간변화를 유발하고, 그 주파수는 waviness 에 의한 베어링 진동주파수의 2 배성분을 가진다.

(4) 볼 waviness 의 차수가 2 인 경우 발생하는 축방향 강성계수의 계수가진주파수는 베어링 진동주파수와 동일하게 발생한다.

(5) 볼 waviness 의 차수가 2 인 경우 발생하는 반경방향 및 각운동방향 강성계수의 계수가진주파수는 베어링 진동주파수에서  $\pm f_c$  만큼 이동한 성분을 가진다.

(6) 병진운동에 대한 계수가진계의 안정성은  $\rho=i^2/4$  ( $i=1,2,3..$ )을 기준으로 불안정 영역이 존재한다.

(7) 각운동에 대한 계수가진계의 안정성은  $\rho=i^2/4$  ( $i=1,2,3..$ )를 기준으로 불안정 영역이 존재하

며, 자이로스코픽 효과의 영향은  $\rho=1$  지점의 넓은 불안정 영역과  $\rho=0.25, 2.25$  지점 등의 분리된 불안정 영역을 발생한다.

#### 참고문헌

- (1) Jones, A. B., "A General Theory of Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings under Arbitrary Load and Speed Conditions," *ASME J. Basic Eng.*, Vol. 82, pp. 309~320, 1960
- (2) Harris, T. A., *Rolling Bearing Analysis*, 3rd Ed., John Wiley & Sons, INC., 1991.
- (3) Hamrock, B.J., Dowson, D., *Ball Bearing Lubrication - The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts*, John Wiley & Sons, INC., 1981,
- (4) Yhland, E., 1992, "A Linear Theory of Vibrations Caused by Ball Bearings with Form Errors Operating at Moderate Speed," *ASME, J. of Tribology*, Apr, Vol. 114, pp.348~359
- (5) Aktürk, N., Uneeb, M., Gohar, R., 1997, "The Effects of Number of Balls and Preload on Vibrations Associated with Ball Bearings", *ASME, J. of Tribology*, Oct., Vol. 119, pp.747~753
- (6) Aktürk, N., 1999, "The Effect of Waviness on Vibrations Associated with Ball Bearings", *ASME, J. of Tribology*, Oct., Vol. 121, pp. 667~677
- (7) Jang, G. H. and Jeong, S. W., 2002, "Nonlinear Excitation Model of Ball Bearing Waviness in a Rigid Rotor Supported by Two or More Ball Bearings Considering Five Degrees of Freedom", *ASME, J. of Tribology*, Jan., Vol. 124, pp. 82~90
- (8) Jeong, S. W. and Jang, G. H., 2001, "Analytical Theory of Ball Bearing Considering Waviness of Rolling Elements", *J. of KSNVE*, Vol. 11, No.7, pp. 275~286.
- (9) Jeong, S. W. and Jang, G. H., 2001, "Vibration Analysis of 5-DOF Rotor System Supported by Two or More Ball Bearings Considering Centrifugal Force and Gyroscopic Moment of Ball," *Proc. of KSNVE, Fall*, pp. 297~303.
- (10) Newland, D. E., *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific and Tech., 1989.
- (11) Hayashi, C. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1985.
- (12) Nayfeh, A. H., Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, INC., 1979
- (13) Wardle, F. P., 1988a, "Vibration Forces Produced by Waviness of the Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearing, Part 1 : Theory", *Proc. IMechE*, Vol. 202, No. C5, pp. 305~312
- (14) Jeong, S. W. and Jang, G. H., 2002 "Dynamic Analysis of a Rotating System Due to the Effect of Ball Bearing Waviness (I) :Vibration Analysis" *Trans. of KSME, A*, Vol. 26, No. 12, pp. 2636~2646.