

# Waviness 가 있는 볼베어링으로 지지된 회전계의 동특성해석 (I) -진동해석-

정성원\* · 장건희†

(2002년 5월 21일 접수, 2002년 10월 7일 심사완료)

## Dynamic Analysis of a Rotating System Due to the Effect of Ball Bearing Waviness (I) -Vibration Analysis-

Seong-Weon Jeong and Gunhee Jang

**Key Words :** Waviness(굴곡), Ball Bearing(볼베어링), Rotating System(회전계), Bearing Vibration(베어링 진동), Hertzian Contact Theory(허츠의 접촉이론)

### Abstract

This research presents an analytical model to investigate vibration due to ball bearing waviness in a rotating system supported by two or more ball bearings, taking account of the centrifugal force and gyroscopic moment of the ball. The waviness of rolling elements is modeled by the sinusoidal function, and it is incorporated into the position vectors of the race curvature center. The Hertzian contact theory is applied to calculate the elastic deflection and nonlinear contact force while the rotor has translational and angular motions. Both the centrifugal force and gyroscopic moment of the ball and the waviness of the rolling elements are included in the kinematic constraints and force equilibrium equations of a ball to derive the nonlinear governing equations of the rotor, which are solved by using the Runge-Kutta-Fehlberg algorithm to determine the new position of the rotor. The proposed model is validated by the comparison of the results of the prior researchers. This research shows that the centrifugal force and gyroscopic moment of the ball plays the important role in determining the bearing frequencies, i.e. the principal frequencies, their harmonics and the sideband frequencies resulting from the waviness of the rolling elements of ball bearing. It also shows that the bearing vibration frequencies are generated by the waviness interaction not only between the rolling elements of one ball bearing but also between those of two or more ball bearings constrained by the rotor.

### 1. 서론

Waviness는 볼베어링의 볼과 내외륜에 존재하는 기하학적 불완전성을 말하며, 회전기기의 진동과 소음을 유발하는 주요한 원인으로 알려져 있다. 이는 주로 볼베어링의 생산과정에서 발생하게 되지만, 완벽한 생산공정에 의해 볼베어링의 각 구성요소가 진원(perfect circle)을 이루더라도 회전체의 운전 및 하중조건에 의해 waviness가 발생하기

때문에 waviness가 없는 볼베어링은 실제 존재하지 않는다. 최근의 회전기기가 복잡하고 정교한 구조를 가지고, 볼베어링에 의해 발생하는 진동 및 소음이 회전계의 성능을 저해하는 경우가 증가함에 따라 이에 대한 관심이 커지고 있다.

Wardle<sup>(1,2)</sup>은 waviness의 진폭과 발생하는 가진력과의 관계를 해석적 모델을 통하여 계산하고 실험으로 검증하였으며, 볼베어링의 비선형 하중-변형 특성에 의한 진동 주파수를 예측하였다. 그러나 이 모델은 회전체를 고려하지 않은 볼베어링 단품에 대한 모델이므로 회전체를 지지하는 둘 이상의 볼베어링이 가지는 waviness의 간섭효과에 의한 진동의 예측이 불가능하다. Yhland<sup>(3)</sup>는 선형이론을 사용하여 waviness에 의한 볼베어링의 강성행

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : ghjang@hanyang.ac.kr  
TEL : (02)2290-0431 FAX : (02)2292-3406  
\* 한양대학교 기계공학부 PREM Lab.

렬을 계산하는 방법을 제시하고, 회전체의 운동방정식에 적용하여 waviness 가 회전체에 미치는 효과를 계산하였다. 그러나 이 모델은 볼베어링에서 발생하는 접촉력의 비선형 항을 무시한 선형성분만을 고려하였기 때문에 베어링의 하중-변형간 비선형성에 의한 응답을 예측할 수 없었다.

한편, Aktürk 등<sup>(4,5)</sup>은 waviness 가 존재하는 볼베어링이 강체축을 지지하는 경우에 대한 3 자유도 모델을 제안하였다. 그리고 Jang 과 Jeong<sup>(6)</sup>은 waviness 를 가지는 볼베어링으로 지지된 5 자유도 회전체에 대한 가진모델을 제안하고, 접촉력의 비선형성에 의해 발생하는 주파수 성분을 규명하였다. 그러나, 이러한 연구는 볼의 회전에 의해 발생하는 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 영향을 고려하지 않은 경우에 대한 결과이다. 이 영향은 구름요소간의 접촉력, 베어링 강성, waviness 에 의한 진동주파수 등의 응답특성을 변화시키기 때문에, 기존의 연구에 의한 회전체의 응답과는 큰 차이를 보일 수 있다.

본 연구에서는 구름요소에 waviness 가 존재하며, 볼의 원심력 및 자이로스코픽 모멘트가 작용하는 볼베어링으로 지지된 5 자유도 회전체의 진동을 해석하기 위한 이론적 모델을 제시하였다. 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 영향 및 구름요소의 waviness 를 고려하여, 볼베어링의 기하학적 조건과 힘 평형방정식을 구하고, 구름요소간의 접촉력을 계산하여 회전체의 운동방정식에 적용하였다. 볼의 원심력 및 자이로스코픽 모멘트 영향의 유무에 따른 회전체의 진동주파수를 계산하고 기존의 연구결과와 비교하여, 본 연구의 이론적 타당성을 검증하였다. 그리고 waviness 와 볼의 원심력 및 자이로스코픽 모멘트에 의해 회전체에서 발생하는 진동의 기본주파수와 그 조화성분 그리고 sideband 주파수를 계산하였으며, 서로 다른 waviness 를 가진 두개의 베어링으로 지지된 회전체의 진동응답을 계산하였다.

## 2. 해석방법

### 2.1 Waviness 모델

Figure 1 은 두개의 볼베어링으로 지지된 회전체를 나타낸 것이다. 내외륵에 존재하는 waviness 는 다음과 같이 표현할 수 있다.<sup>(6,9)</sup>

$$p_{oj} = \sum_{i=1}^O A_{oi} \cos[-l(\omega_o - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \alpha_{oi}] \quad (1)$$

$$p_{ij} = \sum_{i=1}^O A_{ii} \cos[-l(\omega_i - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \alpha_{ii}] \quad (2)$$

$$q^{oi} = \sum_{\alpha} B^{oi} \cos[-l(\omega^o - \omega^c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \beta^{oi}] \quad (3)$$

$$q^{ii} = \sum_{\alpha} B^{ii} \cos[-l(\omega^i - \omega^c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \beta^{ii}] \quad (4)$$

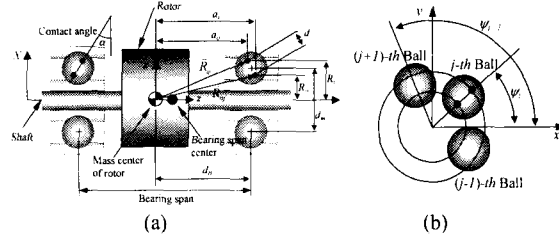


Fig. 1 (a) Rigid rotor supported by two ball bearings in x-z plane (b) Ball bearing in x-y plane

여기서  $p_{ij}, p_{oj}$ 는 내외륵의 반경방향 waviness,  $q_{ij}, q_{oj}$ 는 내외륵의 축방향 waviness이며  $l, Z, \omega_c, \omega_o, \omega_i$ 는 각각 waviness의 차수, 볼의 갯수, 케이지, 외륵, 내륵의 회전속도를 의미한다. 그리고  $A_{ob}, A_{ib}, B_{ob}, B_{ii}$ 과  $\alpha_{ob}, \alpha_{ib}, \beta_{ob}, \beta_{ii}$ 는 각각  $j$ 번째 볼과 접촉하는 내외륵 waviness의 진폭과 위상각을 의미한다.

볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트에 의한 효과를 고려하면 볼의 내외륵에서 발생하는 접촉각이 달라지므로, 볼 waviness는 기존연구에서 사용한 모델을 사용할 수 없다.<sup>(1-6)</sup> 그리고 내륵과 외륵에 접촉하는 볼의 waviness는 서로 180°의 위상차를 가지므로, 아래 식 (5)와 (6)과 같이 내륵과 외륵에 작용하는 waviness  $w_{ij}$ 와  $w_{oj}$ 를 구분하여 표현해야 한다.

$$w_{ij} = \sum_{i=1}^O C_{ji} [\cos(l\omega_i t + \gamma_{ji})] \quad (5)$$

$$w_{oj} = \sum_{i=1}^O C_{ji} [\cos(l\omega_o (t + \frac{\pi}{\omega_c}) + \gamma_{ji})] \quad (6)$$

여기서,  $w_{ij}$ 와  $w_{oj}$ 는 각각 내외륵에 작용하는 볼의 waviness,  $\gamma, \omega_b, C_{ji}$ 는 볼 waviness의 초기위상각, 볼의 자전속도,  $l$ 차 볼 waviness의 진폭을 각각 의미한다.

### 2.2 Waviness 를 고려한 볼의 힘평형조건 및 기하학적 구속조건

Fig. 1에서  $j$ 번째 볼이 위치한 내외륵 곡률반경 중심의 위치벡터  $\vec{R}_y$ 와  $\vec{R}_o$ 는 회전체의 질량중심을 기준으로 다음과 같이 정의할 수 있다.<sup>(6)</sup>

$$\vec{R}_y(t) = R_i \cos \psi_j \vec{i} + R_i \sin \psi_j \vec{j} + a_i \vec{k} \quad (7)$$

$$\vec{R}_o(t) = R_o \cos \psi_j \vec{i} + R_o \sin \psi_j \vec{j} + a_o \vec{k} \quad (8)$$

여기서  $R_i, R_o, a_i, a_o$ 는 내외륵 곡률반경의 위치벡터의 반경방향 및 축방향 성분이며, 피치지름  $d_m$ 과 내외륵 곡률반경 중심간의 거리  $d$ , 접촉각  $\alpha$ 에 의해 계산된다.  $\psi_j$ 는  $j$ 번째 볼의 x-y평면상 편향각으로서 케이지 회전속도의 함수로 표현된다.<sup>(9)</sup>

볼베어링이 고속으로 회전할 경우, 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 영향을 무시할 수 없게

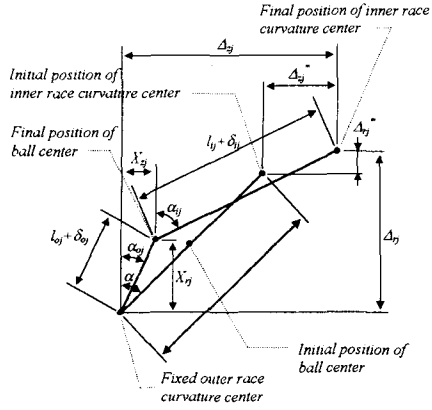


Fig. 2 Position of ball center and raceway curvature centers

되므로 내외륜의 접촉각은 서로 달라지게 되는데, Fig. 2는 볼의 원심력, 자이로스코픽 모멘트에 의한 궤도를 곡률반경 중심간의 거리와 볼 중심위치와의 관계를 나타낸 것이다. 여기서  $X_{oj}$ ,  $X_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{oj}$ ,  $l_{ij}$ ,  $l_{oj}$  는 각각 볼 중심위치의 반경방향 및 축방향 성분, 내외륜의 접촉각, 볼의 중심과 내외륜 곡률반경 중심간의 거리를 각각 의미한다.

볼의 waviness  $w_{ij}$ ,  $w_{oj}$ 와 다른 볼에 비해 특정 볼의 직경이 다른 경우의 효과  $h_j$  그리고 내외륜의 곡률반경  $r_i$ 와  $r_o$ 를 사용하여  $l_{ij}$ 와  $l_{oj}$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$l_{ij} = r_i(D+h_j)/2 - w_{ij}, l_{oj} = r_o(D+h_j)/2 - w_{oj} \quad (9)$$

내륜이 회전하는 베어링의 경우, 내륜은 회전 운동과 함께 병진운동과 각운동을 하게 되고 외륜은 정지하게 된다. 따라서 내륜곡률반경 중심의 위치벡터는  $x, y, z$ 방향에 대한 병진운동과  $\theta_x$ 와  $\theta_y$ 방향의 각운동을 하게 되므로 오일러 각(Euler angle)을 사용한 변환으로 표현할 수 있다. 이 벡터와 외륜 위치벡터와의 차를 구하면 두 곡률반경 간 거리가 구해지는데, 각 위치벡터의 반경 및 축방향 성분에 식 (1)-(4)의 내외륜 waviness를 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= (R_i - R_o) + a_i(\theta_y \cos \psi_j - \theta_x \sin \psi_j) + x \cos \psi_j \\ &\quad + y \sin \psi_j + (p_j - p_{oj}) + q_j(\theta_x \cos \psi_j - \theta_y \sin \psi_j) \\ \Delta_{oj} &= (a_o - a_i) + R_o(\theta_x \sin \psi_j - \theta_y \cos \psi_j) + z + (q_{ij} - q_{oj}) \\ &\quad + p_j(\theta_x \sin \psi_j - \theta_y \cos \psi_j) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $\Delta_{ij}$ 와  $\Delta_{oj}$ 는 베어링 중심의 변형과 waviness에 의한 궤도 중심간 거리의 반경방향 및 축방향 성분이다. Fig. 2에 대하여 피타고라스의 정리를 적용하면 식 (11)과 같은 기하학적 구속조건이 얻어진다.<sup>(7-9)</sup> 그리고 외륜회전형 베어링의 경우는

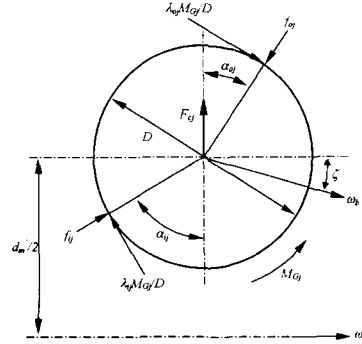


Fig. 3 Ball loading at arbitrary azimuth angle,  $\psi_j$

외륜 곡률반경 중심의 위치벡터에 대하여 동일한 과정을 통하여 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} (\Delta_{oj} - X_{oj})^2 + (\Delta_{ij} - X_{ij})^2 - (l_{ij} + \delta_{ij})^2 &= 0 \\ X_{oj}^2 + X_{ij}^2 - (l_{oj} + \delta_{oj})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 와  $\delta_{oj}$  각각 내륜 및 외륜과 볼 사이의 탄성변형을 의미한다.

Fig. 3은 회전에 의한 볼의 원심력, 자이로스코픽 모멘트 그리고 발생하는 접촉력과 관계를 나타낸 것으로서,  $D$ 는 볼의 직경이다. 그리고  $M_{Gj}$ 와  $F_{Gj}$ 는 각각 회전에 의해 발생하는 자이로스코픽 모멘트와 원심력이며,  $\lambda_{ij}$ 와  $\lambda_{oj}$ 는 궤도류 제어이론에 의한 상수이다.<sup>(9)</sup> 이 경우  $j$  번째 볼의 힘평형 조건은 식 (12)와 같이 구할 수 있다.<sup>(7-9)</sup>

$$\begin{aligned} f_{ij} \sin \alpha_{ij} - f_{oj} \sin \alpha_{oj} - \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{oj} M_{Gj}}{D} \cos \alpha_{oj} &= 0 \\ f_{ij} \cos \alpha_{ij} - f_{oj} \cos \alpha_{oj} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \sin \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{oj} M_{Gj}}{D} \sin \alpha_{oj} + F_{Gj} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

내외륜의 접촉력  $f_{ij}$ 와  $f_{oj}$ 는 Hertz의 접촉이론에 따라 다음과 같이 표현된다.

$$f_{ij} = K_{ij} \delta_{ij}^{1.5}, f_{oj} = K_{oj} \delta_{oj}^{1.5} \quad (13)$$

$K_{ij}$ 와  $K_{oj}$ 는 내외륜의 하중-변형상수(load-deflection factor)이며, 식 (12)의 볼의 원심력  $F_{Gj}$ 와 자이로스코픽 모멘트  $M_{Gj}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$F_{Gj} = 0.5 m_b d_m \omega_c^2 \quad (14)$$

$$M_{Gj} = I_p \omega_b \omega_c \sin \zeta \quad (15)$$

식 (14)와 (15)에서  $m_b$ 는 볼의 질량,  $I_p$ 는 볼의 질량관성모멘트이다. 그리고  $d_m$ ,  $\omega_c$ ,  $\omega_b$ 는  $M_{Gj}$ ,  $F_{Gj}$ 와 예압에 의한 피치지름, 케이지 회전속도, 볼의 자전속도이며 내륜이 회전하는 경우에 대하여 각각 다음의 식으로 계산된다.<sup>(9)</sup>

$$\omega_i = \frac{\omega_i + \omega_o \left( \frac{d_m + D \cos \alpha_{oj}}{d_m - D \cos \alpha_{oj}} \right) \cos(\alpha_{ij} - \zeta)}{1 + \left( \frac{d_m + D \cos \alpha_{oj}}{d_m - D \cos \alpha_{oj}} \right) \cos(\alpha_{oj} - \zeta)} \quad (16)$$

$$\omega_b = \frac{\omega_o - \omega_i}{D \left[ \frac{\cos(\alpha_{ij} - \zeta)}{d_m - D \cos \alpha_{oj}} + \frac{\cos(\alpha_{oj} - \zeta)}{d_m + D \cos \alpha_{oj}} \right]} \quad (17)$$

$$d_m = d'_m + 2X_{rj} - 2l_{oj} \cos \alpha \quad (18)$$

여기서,  $d_m$ 은 예압이 가해지지 않은 경우의 피치 름이며  $\omega_i$ 와  $\omega_b$ 는 내외륜의 회전속도이다. 비선형 연립방정식으로 표현되는 식 (11)의 기하학적 구속조건과 식 (12)의 힘평형조건을 Newton-Raphson 반복법 등에 의해 해석하면,  $\delta_{ij}$ ,  $\delta_{oj}$ ,  $X_{zj}$ ,  $X_{rj}$ 을 구할 수 있고, 내외륜 접촉각의 정현 및 역현 값은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{oj} &= \frac{X_{rj}}{l_{oj} + \delta_{oj}} & \sin \alpha_{oj} &= \frac{X_{zj}}{l_{oj} + \delta_{oj}} \\ \cos \alpha_{ij} &= \frac{\Delta_{rj} - X_{rj}}{l_{ij} + \delta_{ij}} & \sin \alpha_{ij} &= \frac{\Delta_{zj} - X_{zj}}{l_{ij} + \delta_{ij}} \end{aligned} \quad (19)$$

식 (12)와 (15)의  $\lambda_{ij}$ ,  $\lambda_{oj}$ ,  $\zeta$ 는 케도륜 제어이론에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$\zeta = \tan^{-1} \left( \frac{d_m \sin \alpha_{oj}}{d_m \cos \alpha_{oj} + D} \right) \quad \lambda_{oj} = 0, \quad \lambda_{ij} = 2 \quad (20)$$

2.3 볼베어링 가진에 의한 회전계의 운동방정식  
내륜이 회전하는 경우, 볼베어링이 회전체에 미치는 힘과 모멘트는 2.2 절의 결과로부터 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{k=1}^{N_B} \left[ \sum_{j=1}^Z \left( f_{ij} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \sin \alpha_{ij} \right) \cos \psi_j \right] \\ F_y &= \sum_{k=1}^{N_B} \left[ \sum_{j=1}^Z \left( f_{ij} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \sin \alpha_{ij} \right) \sin \psi_j \right] \\ F_z &= \sum_{k=1}^{N_B} \left[ \sum_{j=1}^Z \left( f_{ij} \sin \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \cos \alpha_{ij} \right) \right] \\ M_x &= \sum_{k=1}^{N_B} \left[ \sum_{j=1}^Z \left( f_{ij} \tau_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} e_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} r_i \right) \sin \psi_j \right] \\ M_y &= - \sum_{k=1}^{N_B} \left[ \sum_{j=1}^Z \left( f_{ij} \tau_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} e_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} r_i \right) \cos \psi_j \right] \end{aligned} \quad (21)$$

여기서,  $N_B$ 는 회전체를 지지하는 볼베어링의 개수이며,  $\tau_{ij}$ 와  $e_{ij}$ 는 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e_{ij} = R_i \cos \alpha_{ij} + a_i \sin \alpha_{ij}, \quad \tau_{ij} = R_i \sin \alpha_{ij} - a_i \cos \alpha_{ij} \quad (22)$$

식 (21)의 접촉력과 모멘트를 사용하여 힘 및 모멘트 평형식에 적용하면, 회전계의 운동방정식

이 구해지고, 성분별로 나누어 쓰면 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + F_x &= 0 \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + F_y &= 0 \\ m\ddot{z} + c\dot{z} + F_z &= 0 \\ I_x \ddot{\theta}_x + I_x \Omega \dot{\theta}_y + M_x &= 0 \\ I_y \ddot{\theta}_y - I_y \Omega \dot{\theta}_x + M_y &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $m$ ,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $\Omega$ 는 각각 회전체의 질량, 반경축 질량관성모멘트, 질량 극관성 모멘트, 회전축의 회전각속도를 각각 의미한다. 그리고  $c$ 는 볼 베어링이 가지는 감쇠이다.

### 3. 결과 및 고찰

#### 3.1 해석모델 및 수치해석 과정

본 연구에서는 Fig. 1 과 같이 서로 반대방향의 접촉각을 가지는 한쌍의 볼베어링으로 지지된 강체 회전계에서 waviness 에 의해 발생하는 베어링 진동을 계산하였다. 해석에 사용된 볼베어링은 내륜 회전형으로 가정하였으며, 볼베어링과 회전체의 사양은 Table 1 과 2 에 나타내었다. 그리고 좌우 베어링의 반경방향 waviness 의 위상차는  $0^\circ$ , 축방향 waviness 의 위상차는  $180^\circ$  라고 가정하였는데 이 경우 회전체의 각변위가 발생하지 않기 때문에 두 베어링에서 발생하는 축방향 접촉력은 서로 상쇄되어 축방향 변위가 발생하지 않는다. 그리고 접촉력의 시간응답을 주파수 변환하여 진동주파수를 계산하였다.

Table 1 Specification of spindle system

Parameter	Value
Radial mass moment of inertia, $I_r$	$3.985 \times 10^{-3}$ [kg-m <sup>2</sup> ]
Polar mass moment of inertia, $I_z$	$7.534 \times 10^{-3}$ [kg-m <sup>2</sup> ]
Mass, $m$	$8.6 \times 10^{-1}$ [kg]
Bearing span	$8.0 \times 10^{-2}$ [m]
Number of bearing	2

Table 2 Specification of Ball Bearing

Parameter	Value
Number of ball, $Z$	16
Ball diameter, $D$	$22.23 \times 10^{-3}$ [m]
Free pitch diameter, $d_{mo}$	$125.26 \times 10^{-3}$ [m]
Axial preload, $P_z$	10 [kN]
Groove radius of inner race, $r_i$	$11.63 \times 10^{-3}$ [m]
Groove radius of outer race, $r_o$	$11.63 \times 10^{-3}$ [m]
Diametral clearance, $P_d$	$0.43 \times 10^{-3}$ [m]
Waviness amplitude, $A$	$1 \times 10^{-6}$ [m]

Fig. 4는 waviness에 의한 회전체의 진동을 해석하는 과정을 나타낸 것이다. 예압에 의해 각 볼에서 발생하는 초기 접촉각과 탄성변형을 계산하고, 회전체의 질량중심을 기준으로 정의된 궤도를 곡률반경중심의 위치벡터에 내외륜의 waviness를 적용하였다. 그리고 볼과 궤도륜의 기하학적 구속조건에 볼 waviness를 적용하였다. Waviness의 영향이 고려된 식 (11)의 기하학적 구속조건과 식 (12)의 힘평형 방정식을 Newton-Raphson 반복법에 의해 연립해서 풀면, 회전시 각 볼의 위치와 탄성변형량을 계산할 수 있다. 그리고 회전체에 작용하는 힘과 모멘트는 식 (21)에 의해 계산되고 이를 식 (23)의 운동방정식에 적용하여 Runge-Kutta-Fehlberg 방법으로 수치적분 하였다. Newton-Raphson 반복법의 허용오차는  $10^{-15}$  %로 두었고, 수치적분의 초기 시간간격과 적분 허용오차는 각각  $10^{-12}$  초와  $10^{-5}$  %로 두고 계산하였다. 그리고 가진 주파수와 회전체의 고유진동수와 일치하는 영역에서, 해의 발산을 방지하기 위하여, 이론적 베어링 강성계수의  $10^{-5}$ 에 해당하는 수치감쇠를 병진운동에 적용하였다. 이는 볼베어링이 가지는 감쇠량으로 일반적으로 알려져 있으며, 회전체의 고유특성에는 영향을 거의 미치지 않는다.<sup>(10)</sup> 본 연구에 사용된 회전체가 10,000rpm의 속도로 회전할 경우, 후진 및 전진 각운동 방향과 반경 및 축방향의 고유진동수는 각각 657Hz, 745Hz, 2,361Hz 그리고 3,073Hz로 계산되는데, 수치 감쇠에 의한 고유진동수의 변화는 각각 0.1Hz (0.01%), 0.1Hz (0.01%), 1.9Hz (0.12%) 그리고 7.3Hz (0.3%)로 계산되었다. 따라서 본 연구에서 적용한 수치감쇠가 계의 고유특성에는 거의 영향을 미치지 않음을 확인할 수 있으며, 다른 회전속도에서도 동일한 결과를 보임을 확인하였다. 가변시간간격으로 계산되는 베어링 가진력과 회전체의 변위를 선형 보간하고 Fourier 변환을 통하여 주파수 분석하였다.

3.2 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트를 고려한 베어링 진동

볼베어링의 waviness에 의한 베어링 접촉력은 기본주파수 뿐만 아니라, 하중-변형간의 비선형 특성에 의한 조화성분과 sideband 성분을 가진다. Table 3 과 4는 각각 기존의 연구에서 밝혀진 waviness 차수에 따른 반경방향 및 축방향 진동변위의 기본주파수<sup>(1,3)</sup>와 waviness 간의 상호작용에 의한 sideband 주파수<sup>(3)</sup>를 나타낸 것이다. 그리고 Table 5는 축방향과 반경방향 waviness의 상호작용에 의해 추가적으로 발생하는 sideband 주파수를 나타낸 것이다.<sup>(6)</sup> Table 3, 4, 5로부터 베어링 진동의 기본주파수와 sideband 주파수는 볼의 개수, 내륜의 회전주파수, 케이지 회전주파수, 볼의 자진주파수의 선형조합으로 표현되는 것을 알 수 있다.

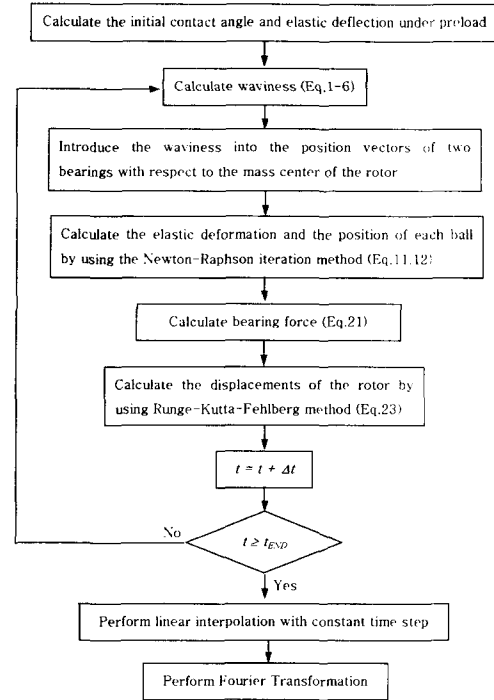


Fig. 4 Numerical procedures to calculate the ball bearing vibration due to the effect of waviness

Table 3 Principal vibration frequencies due to the waviness of the rolling elements ( $i \geq 1$ : integer,  $Z$ : number of ball,  $f$ : rotating frequency of inner race,  $f_c$ : cage rotating frequency,  $f_b$ : ball spinning frequency)

Type of waviness	Waviness order	Principal frequencies[Hz]	Type of motion
Outer race	$l=iZ$	$iZf_c$	axial
	$l=iZ \pm 1$	$iZf_c$	radial
Inner race	$l=1$	$f$	radial
	$l=iZ$	$iZ(f-f_c)$	axial
	$l=iZ \pm 1$	$iZ(f-f_c) \pm f$	radial
Ball	Oversize	$f_c$	radial
	$l=2i$	$2if_b$	axial
	$l=2i$	$2if_b \pm f_c$	radial

Table 4 Sideband frequencies due to the waviness interaction between the rolling elements<sup>(1)</sup>

Interacting surfaces	Sideband frequencies[Hz]	
	Axial vibration	Radial Vibration
Outer race Ball oversize	$iZf_c \pm jf_c$	$iZf_c \pm jf_c$
Outer race Ball	$iZf_c \pm j2f_b$	$iZf_c \pm j2f_b$
Outer race Inner race	$iZf_c \pm jf$	$iZf_c \pm jf$
Inner race Ball oversize	$iZ(f-f_c) + jf_c$	$iZ(f-f_c) \pm j \pm jf_c$
Inner race Ball	$iZ(f-f_c) \pm 2jf_b$	$iZ(f-f_c) \pm f \pm 2jf_b$

**Table 5** Radial sideband frequencies due to the waviness interactions between the waviness of axial and radial vibration<sup>(6)</sup>

Interacting surfaces	Waviness Order	Sideband frequencies[Hz]
Outer race Ball	$l = iZ$	$iZf_c \pm 2j f_b \pm f_c$
	$l = 2i$	
Outer race Inner race	$l = iZ$	$iZf_c \pm jZ(f-f_c) \pm f$
	$l = iZ \pm 1$	
Outer race Inner race	$l = iZ \pm 1$	$iZf_c \pm jZ(f-f_c)$
	$l = iZ$	
Inner race Ball oversize	$l = iZ$ 1	$iZ(f-f_c) \pm jf_c$
Inner race Ball	$l = iZ$	$iZ(f-f_c) \pm 2j f_b \pm f_c$
	$l = 2i$	

**Table 6** Comparisons of principal vibration frequencies due to the waviness of the rolling elements

Type	Waviness order	Principal frequencies[Hz]			Type of motion
		Prior Model <sup>(3)</sup>	Proposed model without $F_{cj}$ and $M_{Gj}$	Proposed model with $F_{cj}$ and $M_{Gj}$	
Cage rotating frequency	$f_c$	71.63	72.06	76.72	
Ball spinning frequency	$f_b$	460.30	461.11	500.91	
Outer race	15	1146.10	1146.52	1227.60	radial
	16	1146.10	1146.10	1227.60	axial
	17	1146.10	1146.10	1227.60	radial
Inner race	15	1353.90	1650.47	1272.40	radial
	16	1520.57	1517.15	1439.10	axial
	17	1687.24	1680.81	1605.73	radial
Ball		848.97	850.07	925.09	radial
	2	920.60	922.23	1001.82	axial
		992.23	994.39	1078.54	radial

Table 6 은 내륜이 10000rpm 으로 회전하는 회전체에 대하여 다양한 차수의 waviness 에 의한 진동 주파수를 기존의 해석모델<sup>(3)</sup>과 본 연구에서 제안한 해석모델을 사용하여 계산하고 비교한 결과이다. 볼의 원심력  $F_{cj}$  와 자이로스코픽 모멘트  $M_{Gj}$  를 고려한 기존의 연구결과가 존재하지 않기 때문에, 본 연구에서 제안한 해석모델의 타당성을 검증하기 위하여  $F_{cj}$  와  $M_{Gj}$  를 고려하지 않고 회전체의 응답을 계산하고 주파수 변환하여, Table 6 의 3 번째, 4 번째 열에 나타난 기존 연구결과와 비교하였다. 기존의 해석모델과 매우 정확히 일치함을 알 수 있다. 또한 5 번째 열에 나타난 결과는  $F_{cj}$  와  $M_{Gj}$  를 고려한 본 연구의 해석모델을 사용하여 회전체의 진동을 해석한 결과로서,  $F_{cj}$  와  $M_{Gj}$  의 영향에 의해 진동주파수가 상당히 달라짐을 알 수 있다. 이는 식 (16)-(17)로부터 알 수 있듯이,  $F_{cj}$  와  $M_{Gj}$  의 영향으로 내륜의 접촉각  $\alpha_{ij}$  는 증가하게 되고, 외륜의 접촉각  $\alpha_{oj}$  와 볼의 자전축과 베어링 회전축이 이루는 각도  $\zeta$  는 감소하게 되므로, 케이지 회전주파수  $f_c$  와 볼의 자전주파수  $f_b$  가  $F_{cj}$  와  $M_{Gj}$  의 영향을 고려하지 않은 경우에 비하여 증가하기 때문이다. 따라서  $2if_b \pm f_c$  와  $2if_b$  의 식으로 표

현되는 볼의 waviness 에 의한 베어링 진동주파수와  $iZf_c$  에 의해 표현되는 외륜의 waviness 에 의한 베어링 진동주파수는  $F_{cj}$  와  $M_{Gj}$  의 영향으로 증가하며,  $Z(f-f_c) \pm f$  와  $Z(f-f_c)$  의 식으로 표현되는 내륜 waviness 에 의한 진동주파수는 감소한다. 볼베어링의 waviness 에 의해 발생하는 접촉력은 기본주파수 성분 이외에 조화성분과 sideband 주파수 성분의 진동을 유발한다. 따라서  $F_{cj}$  와  $M_{Gj}$  의 영향으로 진동의 기본주파수가 변화함과 동시에 그 조화 성분 및 Table 4, 5 의 sideband 성분 또한 변화한다.

### 3.3 회전체에 의해 구속된 두 볼베어링 waviness 간의 간섭에 의한 베어링 진동

Waviness 에 의한 진동에 대한 기존의 연구는 단일 베어링에 의해 지지된 회전체의 진동문제이거나 동일한 waviness 를 가진 두개의 볼베어링에 의해 지지된 회전체의 문제에 대하여 해석이 수행되어 왔다.<sup>(1,6)</sup> 그러나 회전체를 지지하는 두개 이상의 볼베어링에 작용하는 하중조건은 회전체의 운전조건에 따라 동일하지 않기 때문에, 발생하는 기하학적 결함 또한 서로 다를 수가 있다. 따라서 서로 다른 종류의 waviness 를 가지며, 회전체에 의해 구속된 두개 이상의 볼베어링으로 지지된 회전체의 응답을 고찰할 필요가 있다.

Fig. 5, 6, 7 은 좌측 베어링에 차수가 16 인 내륜 waviness 가 존재하며, 우측 베어링에는 차수가 2 인 볼 waviness 가 존재하는 경우에 대하여, 각각의 베어링에서 발생하는 접촉력을 계산한 결과이다. 이 경우, 베어링의 스펙트럼과 회전체의 질량 중심은 서로 일치한다고 가정하였다. 여기서 C, B, I, \*, (i,j), (i,j) 는 케이지 회전주파수, 볼 waviness 에 의한 기본주파수, 내륜 waviness 에 의한 기본주파수, 조화성분 그리고 Table 4 와 5 의 sideband 주파수를 각각 의미한다.

Fig. 5 는 반경방향으로 발생하는 좌우 베어링접촉력의 계산결과로서, 내륜 waviness 차수가 16 인 경우는 반경방향 진동을 발생하지 않으므로 볼 waviness 에 의한 진동만이 발생하게 된다. 따라서 우측베어링에서는 볼 waviness 에 의한 반경방향진동의 기본주파수와 그 조화성분이 크게 나타나며, 반경과 축방향 진동성분의 상호작용에 의한 Table 5 의 sideband 주파수가 발생하는 것을 볼 수 있다. 한편 좌측베어링의 경우, 반경방향 진동을 유발하는 waviness 가 존재하지 않지만, 우측베어링에 존재하는 볼 waviness 의 영향으로 볼 waviness 에 의한 반경방향 진동이 발생하게 됨을 알 수 있다. 또한 기존의 연구로부터, sideband 주파수는 단일 볼베어링의 구성요소들이 가지는 waviness 의 상호작용 때문에 발생하는 것으로 알려져 있으나, 강체 회전체에 의해 구속된 두 베어링의 구성요소 존재하는 waviness 또한 서로 상호작용을 하여 sideband 주파수가 발생함을 알 수 있다.

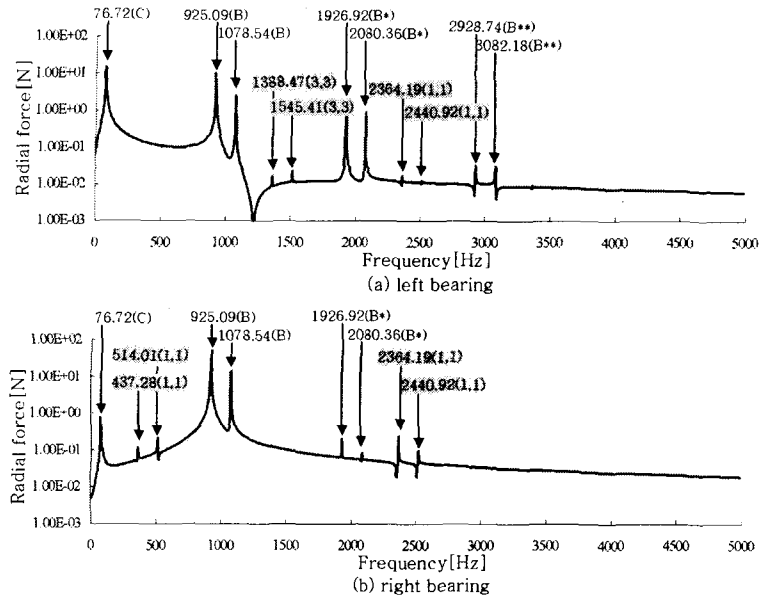


Fig. 5 Frequency spectra of the radial force at each ball bearing in the case that the left bearing has the ball waviness of order 2 and the right bearing has the inner race waviness of order 16

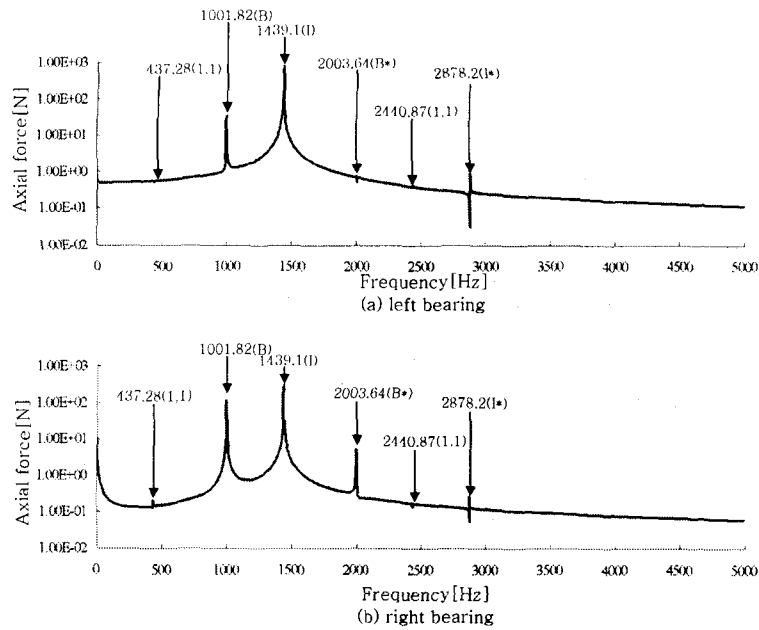


Fig. 6 Frequency spectra of the axial force at each ball bearing in the case that the left bearing has the ball waviness of order 2 and the right bearing has the inner race waviness of order 16

Fig. 6 은 축방향 진동을 비교한 것으로서, 볼 waviness 와 내륜 waviness 에 의한 기본주파수와 그 조화성분이 발생하며, 축방향 진동성분간의 상호작용에 의한 Table 4 의 sideband 주파수가 발생함을 알 수 있다. 반경과 축방향 진동의 상호작용에 의한 sideband 성분이 나타나지 않는 것은 궤도에 의한 축방향 탄성변형이 볼에 의한 반경방향의 탄성변형보다 매우 커서 반경방향접촉력의 축방향 영향이 작기 때문이라고 판단된다. 그리고 Fig. 7 은 각운동을 유발하는 모멘트를 계산한 결과로서 반경방향의 접촉력과 유사한 주파수 성분을 나타낸다. 이는 좌우베어링에서 반경방향으로 발생하는 힘의 불균형에 의해 모멘트가 발생하기 때문이다. Fig. 5, 6, 7 의 결과로부터, waviness 에 의해 발생하는 기본주파수와 그 조화성분의 베어링 진동은 회전체로 구속된 다수의 베어링 사이에서 서로 전달되어 발생함을 알 수 있다. 그리고 베어링의 비선형 하중-변형특성에 의해 발생하는 sideband 주파수는 기존의 연구결과로 알려진 다양한 종류의 waviness 를 가진 단일 베어링에서만 발생하는 것이 아니라, 회전체로 구속된 다수의 베어링이 서로 다른 종류의 waviness 를 가지고 있는 경우에도

waviness 간의 상호작용에 의해서도 발생함을 확인할 수 있다.

Fig. 8 은 Fig. 5, 6, 7 과 같이 좌측 베어링에 차수가 16 인 내륜 waviness 가 존재하며, 우측 베어링에는 차수가 2 인 볼 waviness 가 존재하는 경우, 좌우측 베어링의 힘과 모멘트의 합력에 의해 발생하는 회전체의 진동변위를 계산하여 주파수 변환한 결과이다. Fig. 8(a)와 (c)에 나타난 반경방향과 각운동 방향의 진동변위는 볼 waviness 에 의한 기본주파수와 그 조화성분 그리고 축방향 진동성분과의 상호작용에 의한 sideband 주파수가 발생함을 확인할 수 있고, Fig. 5 와 7 의 주파수 성분과 동일한 경향을 보인다. 그러나 Fig. 8(b)의 축방향 진동에는 볼과 내륜 waviness 에 의한 기본진동 주파수만이 발생함을 볼 수 있다. 이는 두 베어링의 접촉각이 반대방향이므로 좌우베어링의 축방향 접촉력도 위상이 반대가 되어 서로 상쇄되기 때문이다. 그리고 반경반향 및 전진 각운동 방향(forward rocking)의 고유진동수와 베어링 가진력과 의 공진현상이 발생하는 것을 확인할 수 있다. (745Hz and 2361Hz)

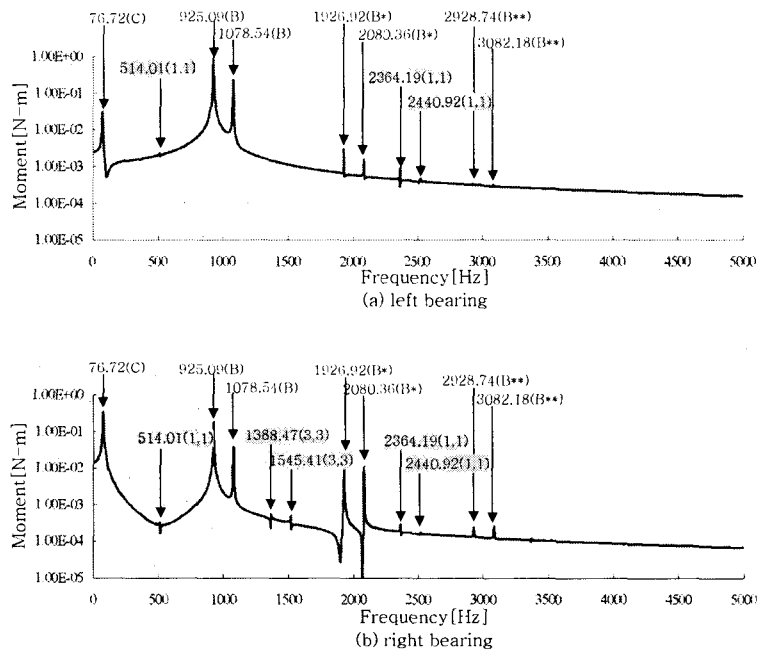


Fig. 7 Frequency spectra of the moment at each ball bearing in the case that the left bearing has the ball waviness of order 2 and the right bearing has the inner race waviness of order 16



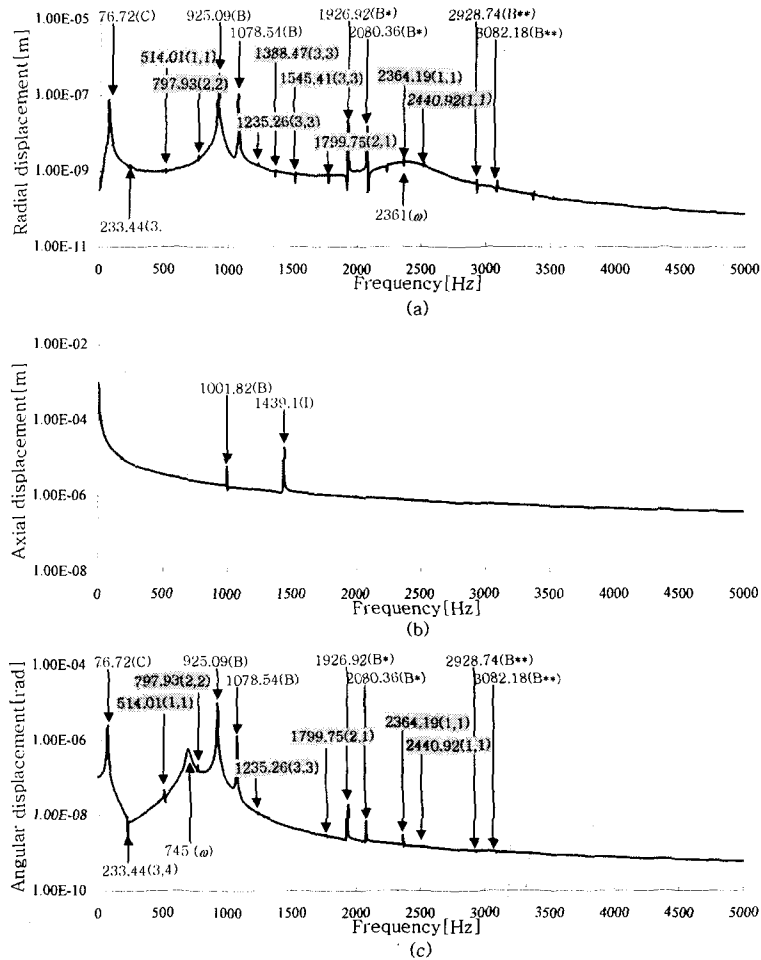


Fig. 8 Frequency spectra of the displacements of the rotor due to the application of the bearing force and moment in the case that the left bearing has ball waviness of order 2 and the right bearing has inner race waviness of order 16

Fig. 9 는 좌측 베어링에 차수가 15 인 내륜 waviness 가 존재하며, 우측 베어링에는 차수가 16 인 외륜 waviness 가 존재하는 경우에 대하여, 좌측 베어링에서 발생하는 반경 및 축방향의 접촉력과 모멘트를 계산하여 주파수 변환한 결과이다. 차수가 15 인 내륜 waviness 는 반경방향의 접촉력을 유발하고 차수가 16 인 외륜 waviness 는 축방향 접촉력을 유발하게 된다. Fig. 9(a)와 (c)의 결과로부터, 좌측 베어링에 존재하는 차수 15 의 내륜 waviness 의 영향으로 반경방향 접촉력과 모멘트의 기본주파수와 조화성분이 발생함을 확인할 수 있다. 그리고 좌측베어링에 존재하는 차수 15 의 내륜 waviness 는 축방향 진동을 유발하지 않지만, 우측베어링에 존재하는 차수 16 의 외륜 waviness 의 영향으로 축방향 진동 또한 발생함을 확인할 수 있다. 그러나 우측 베어링에서는 Fig. 10 과 같이 좌측베어링의 영향에 의한 반경방향 접촉력과

모멘트는 발생하지 않고, 축방향 진동만이 발생한다. 이는 예압의 영향으로 축방향 접촉력이 반경방향에 비해 매우 크기 때문에, waviness 에 의한 접촉력의 영향은 축방향에서 반경방향으로만 작용하기 때문이다. 그리고 이 경우, 좌측베어링의 내륜 waviness 와 우측베어링의 외륜 waviness 간의 간섭에 의한 sideband 주파수가 발생하지 않는것은 내륜과 외륜이 서로 직접 접촉하는 베어링 요소가 아니므로 두 베어링간 waviness 간섭효과가 매우 작기 때문이다. Figure 11 은 좌측 베어링에 차수가 15 인 내륜 waviness 가 존재하며, 우측 베어링에는 차수가 16 인 외륜 waviness 가 존재하는 경우에 대하여, 각각의 베어링에서 발생하는 진동변위를 반경방향, 축방향 그리고 각운동 방향에 대하여 계산한 결과이다. Fig. 9 와 같이 차수가 15 인 좌측

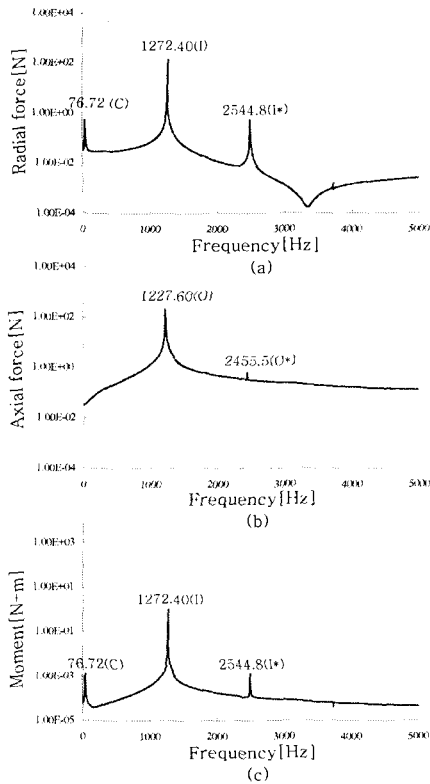


Fig. 9 Frequency spectra of the radial force, axial force and moment of the left bearing in the case that the left bearing has the inner race waviness of order 15 and the right bearing has the outer race waviness of order 16

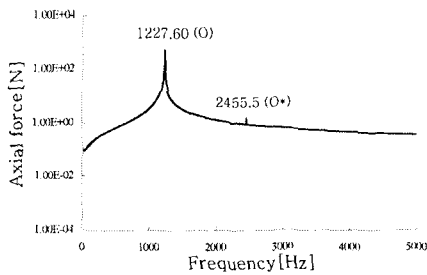


Fig. 10 Frequency spectrum of the axial force of the right bearing in the case that the left bearing has the inner race waviness of order 15 and the right bearing has the outer race waviness of order 16

베어링의 내륜 waviness 에 의해 반경방향과 각운동 방향의 진동과 우측 베어링에 존재하는 차수가 16 인 외륜 waviness 에 의한 축방향 진동이 발생함을 확인할 수 있다. 그리고 반경방향 및 전진 각운동 방향(forward rocking)의 고유진동수와 베어링 가진력과 의 공진현상이 발생하는 것을 확인할 수 있다. (745Hz and 2361Hz)

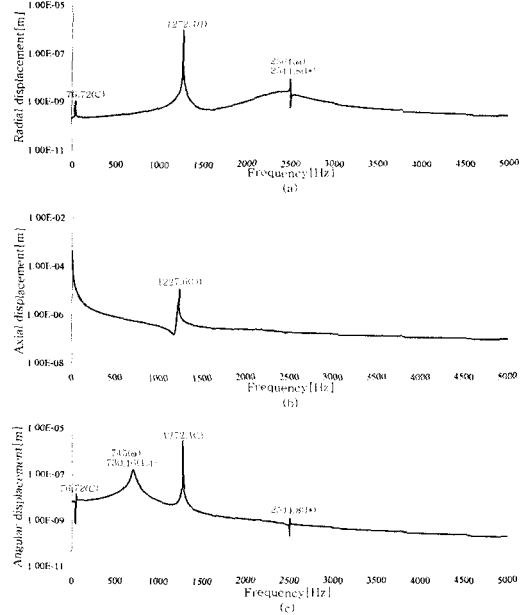


Fig. 11 Frequency spectra of the displacements of the rotor due to the application of the bearing force and moment in the case that the left bearing has the inner race waviness of order 15 and the right bearing has the outer race waviness of order 16

#### 4. 결론

(1) 구름요소에 waviness 가 존재하며, 볼의 원심력 및 자이로스코픽 모멘트가 작용하는 두개이상의 볼베어링으로 지지된 5 자유도 회전체의 진동을 해석하기 위한 이론적 모델을 제시하였다.

(2) 베어링의 회전에 의해 발생하는 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트는 케이지 회전속도와 볼의 자전속도를 변화시키기 때문에 waviness 서로 다를 경우, 한 베어링에서 발생한 가에 의한 베어링 가진력의 기본주파수와 그 조화성분 그리고 sideband 주파수를 변화시킨다.

(3) 둘 또는 그 이상의 볼베어링으로 지지된 회전계에서 각 볼베어링에 존재하는 waviness 특성이 가진력의 기본주파수와 그 조화성분은 다른 베어링에서 발생하는 가진력의 주파수 성분에 전달된다.

(4) 둘 또는 그 이상의 볼베어링으로 지지된 회전계에서 각 볼베어링에 존재하는 waviness 특성이 서로 다를 경우, sideband 주파수는 단일 베어링에 존재하는 waviness 간의 상호작용에 의해서만 발생하는 것이 아니라, 강제 회전체에 의해 구속된 둘 이상의 베어링에 존재하는 waviness 간의 상호작용에 의해서도 발생한다.

## 참고문헌

- (1) Wardle, F. P., 1988a, "Vibration Forces Produced by Waviness of the Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearing, Part 1 : Theory," *Proc. IMechE*, Vol. 202, No. C5, pp. 305~312.
- (2) Wardle, F. P., 1988b, "Vibration Forces Produced by Waviness of the Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearing, Part 2 : Experimental Validation," *Proc. IMechE*, Vol. 202, No. C5, pp. 313~319.
- (3) Yhland, E., 1992, "A Linear Theory of Vibrations Caused by Ball Bearings with Form Errors Operating at Moderate Speed," *ASME, J. of Tribology*, Apr., Vol. 114, pp. 348~359.
- (4) Aktürk, N., Uneeb, M., Gohar, R., 1997, "The Effects of Number of Balls and Preload on Vibrations Associated with Ball Bearings," *ASME, J. of Tribology*, Oct., Vol. 119, pp. 747~753.
- (5) Aktürk, N., 1999, "The Effect of Waviness on Vibrations Associated with Ball Bearings," *ASME, J. of Tribology*, Oct., Vol. 121, pp. 667~677.
- (6) Jang, G. H. and Jeong, S. W., 2002, "Nonlinear Excitation Model of Ball Bearing Waviness in a Rigid Rotor Supported by Two or More Ball Bearings Considering Five Degrees of Freedom," *ASME, J. of Tribology*, Jan., Vol. 124, pp. 82~90.
- (7) Jones, A. B., 1960, "A General Theory of Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings under Arbitrary Load and Speed Conditions," *ASME J. Basic Eng.*, Vol. 82, pp. 309~320.
- (8) Harris, T. A., 1991, *Rolling Bearing Analysis*, 3<sup>rd</sup> Ed., John Wiley & Sons, INC.
- (9) Hamrock, B. J., Dowson, D., 1981, *Ball Bearing Lubrication - The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts*, John Wiley & Sons, INC.
- (10) E. Krämer, *Dynamics of Rotors and Foundations*, Springer-Verlag, 1993.