

압력포텐셜을 이용한 초탄성 유한요소 정식화

김현영* · 김 호* · 김종재**
(2002년 1월 5일 접수, 2002년 10월 17일 심사완료)

Hyperelastic Finite Element Formulation using Pressure Potential

Heon-Young Kim and Ho Kim and Joong-Jae Kim

Key Words: Nonlinear Finite Element Formulation(비선형 유한요소 정식화), Hyperelasticity(초탄성), Pressure Potential(압력포텐셜), Engine Mount(엔진마운트)

Abstract

A rubber-like material model is generally characterized by hyperelasticity and formulated by a total stress-total strain relationship because the material shows nonlinear elastic behaviour under large deformation. In this study, a pressure potential obtained by a separately interpolated pressure is introduced to the non-linear finite element formulation incorporating with incompressible or almost incompressible condition of the material. The present formulation is somewhat different from the general formulation using the pressure computed in the displacement field. A non-linear finite element analysis program is developed for the plane strain and the axisymmetric contact problems of a rubber-like material. Various examples with rubber material are analyzed for its verification. The results about deformed shapes and stress distributions thought to be meaningful in comparison with a commercial program, MARC.

1. 서론

여러 가지 기계 요소에 사용되는데, 고무제품은 시일(seal)과 방진, 금속류 요소 사이의 접촉 방지 등의 중요한 역할을 담당한다. 고무제품은 초탄성이나 비선형성과 같은 재료 특성 때문에 거동을 예측하기가 쉽지 않아 설계에 많은 어려움을 안고 있다. 고무 재료의 거동을 정확히 표현할 수 있는 구성식이 미미하였고, 일반적인 금속재료의 구조해석에 사용하는 변위기준 유한요소법을 이용하여 고무와 같이 거의 비압축성인 재료

의 거동을 해석하는 것은 불안정한 압력의 계산으로 인해 큰 어려움이 있었다.

고무의 초탄성 거동을 표현하기 위한 구성식의 모델링은 1930년대 Meyer의 분자 사슬구조를 이용한 기구학적인 접근으로 시작되었으며, 수학적 이론을 이용한 발전은 1940년대 Rivlin⁽¹⁾의 2개의 변형을 불변량으로 구성된 에너지식으로부터 시작되었다. 좀더 정확한 초탄성 거동의 표현을 위해 많은 연구가 행하여졌으며, 1970년대 Ogden⁽²⁾은 주방향 신장률을 이용한 일반적인 에너지 함수를 제안하였다. Rivlin과 Ogden 식은 등방성 재료에 기초를 두고있으며 코드로의 전환이 용이하여 대다수의 고무거동 해석 프로그램들에 채택되어 사용되고 있다. 또한 최근에 재료의 이방성과 같은 세부적인 사항을 고려한 에너지식이 Kakavas 등^(3,4)에 의해 제안되었다.

비압축성 재료의 거동해석을 위해서는 Hermann⁽⁵⁾이 최초로 압력에 대하여 독립적으로

† 책임저자, 강원대학교 기계메카트로닉스공학부

E-mail : khy@cc.kangwon.ac.kr

TEL : (033)250-6317 FAX : (033)242-6013

* 회원, 강원대학교 기계메카트로닉스공학부

** 회원, 한라대학교 기계공학부

보간(interpolation)되는 평균응력(mean stress) 변수를 사용하는 혼합변분법(mixed variational formulation)을 소개 하였다. Oden과 Key⁽⁶⁾는 축대칭 고무 고체의 비선형 해석을 위한 공식을 제시하였고, 1970년대에는 많은 논문이 혼합변분법의 적용에 관한 문제점들에 대해 논하였으며, 그 결과 변위와 압력을 동일 차수로 보간하는 것은 비효율적이며 고무와 같은 비압축성 재료의 변형거동 해석에 선형요소가 적합치 않음이 밝혀진 바 있다.⁽⁷⁾ Sussman 등⁽⁸⁾은 거의 비압축성 재료와 압축성 재료의 거동 해석에도 적용 가능한 가장 일반적인 변위-압력 유한 요소를 제안하였으며 Sussman 등의 논문에서 쓰인 식은 변위와 압력의 혼합변분법을 기초로 한 변위/압력식(u/p formulation)이다. 다른 식들과의 큰 개념적인 차이점은 변위로부터 계산된 압력을 따로 보간된 압력으로 일반적인 절차를 사용하여 대체한 것이다. 이러한 비압축성과 초탄성에 대한 이론을 바탕으로 고무제품의 유한 요소 해석에 대한 연구⁽⁹⁻¹²⁾가 시행되었고, 고무 변형해석이 가능한 여러 가지 상용 프로그램이 개발되었다. 대표적인 상용 프로그램으로 ABAQUS, MARC, ADINA 등이 있다.

본 논문에서는 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier method)을 이용한 압력 포텐셜(pressure potential)을 완전 압축성(completely incompressible)과 거의 비압축성(nearly incompressible) 조건에 대하여 정식화를 수행하였으며, Mooney와 Ogden이 제안한 초탄성 에너지식(hyperelastic energy equation)을 이용하여 고무 재료에 대한 변형해석 프로그램 HAnd(Hyperelastic Analysis and Design)를 개발하였다.

라그랑지 승수법을 이용하여 압력 포텐셜을 정의하고, 압력 포텐셜에 의해 수정된 전체 포텐셜로부터 유도되는 비선형 유한요소 정식화 과정을 설명하였다. 적용된 Mooney-Rivlin, Ogden 계열 초탄성 재료식을 소개하고, 정식화 과정에 적용하기 위한 수정 절차를 제시하였다. 프로그램의 검증해석을 위해 고무의 인장시험데이터를 이용하여 각 재료식의 계수를 계산하였고, 단위 요소를 이용한 단축인장해석과 접촉 조건이 포함된 엔진마운트의 변형해석을 통하여 일반적인 변형 해석 문제와 접촉문제에서 프로그램의 활용성과 타당성을 검증하였다.

2. 정식화

2.1 압력포텐셜

초탄성 재료에 대한 유한요소 정식화는 전적으로 포텐셜의 형태로 주어지며, 요소의 힘 벡터와 강성행렬, 구성행렬 등은 그에 대한 미분식으로 얻을 수 있다. 가상일의 원리⁽¹³⁾를 포텐셜과 토탈 라그랑지안 식(total Lagrangian formulation)을 이용하여 나타내면

$$\int_{\nu} \delta S_{ij} \delta \epsilon_{ij} d^0 V = \int_{\nu} \frac{\partial {}^t W}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} d^0 V \quad (1)$$

$$= \delta \left(\int_{\nu} {}^t W d^0 V \right) = {}^t R$$

탄성 재료의 경우 ${}^t W$ 는 원래의 단위 체적당 변형률 에너지이며, δS_{ij} 는 2차 피올라-키르히호프(Piola-Kirchhoff) 응력, $\delta \epsilon_{ij}$ 는 그린-라그랑지(Green-Lagrange) 변형률, V 는 체적에 해당한다. ${}^t R$ 은 외부에서 행하여진 가상일을 의미한다. 아래 첨자 0과 윗첨자 t 는 각각 초기구성(initial configuration)과 현재 구성(current configuration)을 나타낸다. 압축성 재료에 사용하는 일반적인 변위기준 유한요소법에서는 응력과 구성식 등이 모두 변위에서 계산되므로 식 (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\nu} \delta \bar{S}_{ij} \delta \epsilon_{ij} d^0 V = \int_{\nu} \frac{\partial {}^t \bar{W}}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} d^0 V \quad (2)$$

$$= \delta \left(\int_{\nu} {}^t \bar{W} d^0 V \right) = {}^t R$$

위 식에서 변수 위의 막대 기호는 변위로부터 계산된 값임을 의미하며 $\delta \bar{S}$, ${}^t \bar{W}$ 는 각각 변위로부터 계산된 2차 피올라-키르히호프 응력과 변형률 에너지를 나타낸다. 변위 기준 유한요소법의 포텐셜에서 변수는 오직 변위만이 존재한다.

비압축성 재료에서는 변위로부터 잘못된 압력의 계산으로 응력이 불안정성을 보이기 때문에 변위에서 계산되지 않고 따로 계산되는 압력 변수가 필요하다. 비압축성에 대한 유한요소식을 유도하는데 가장 중요한 것은 압력 변수를 포함하는 적절한 포텐셜을 정하는 것이다. 변위 기준

유한요소식에 쓰인 포텐셜 ${}^0\bar{W}$ 에 변위 뿐만 아니라 따로 보간된 압력의 함수인 포텐셜 0Q 를 더한 새로운 포텐셜을 정의한다.

$${}^0W = {}^0\bar{W} + {}^0Q \quad (3)$$

이 경우 식 (1)의 지배 방정식은

$$\delta \left(\int_V {}^0W d^0V \right) = \delta \left(\int_V ({}^0\bar{W} + {}^0Q) d^0V \right) = {}^0R \quad (4)$$

와 같으며, 본 논문에서는 라그랑지 승수법을 이용하여 완전 비압축성과 거의 비압축성 조건의 압력포텐셜 0Q 를 정의하였다.

완전 비압축성 조건

$${}^0Q = -\hat{p}({}^0J_3 - 1) \quad (5)$$

거의 비압축성 조건

$${}^0Q = -\hat{p}({}^0J_3 - \hat{J}) \quad (6)$$

식 (5)와 (6)에서 \hat{p} 는 라그랑지 승수으로써 별도로 구해지는 압력 변수이며, 0J_3 는 변형구배텐서 (deformation gradient tensor)의 행렬식(determinant)으로서 전체 부피 변화율에 해당한다. 식 (5)의 1과 식 (6)의 \hat{J} 는 구속조건을 부여하기 위한 라그랑지 승수 인자(parameter)이며 ‘—’ 기호는 압력의 부호를 고려한 것이다.

기존의 정식화 과정과는 달리 본 논문에서는 체적비를 인자로서 이용하여 기존의 압력을 기준으로 판단하는 방법보다 비압축성과 압축성 재료의 구분을 명확히 하며, 검사과정에서 압력 계산 과정을 줄이고자 하였다.

$${}^0J_3 = \det {}^0X \equiv \frac{V}{V_0} \quad (7)$$

완전 비압축성 조건에서는 라그랑지 승수인자로 전체 부피 변화율 ‘1’이라는 구속조건을 주었으며, 거의 비압축성 조건에서는 체적변화율 \hat{J} 를 구속조건으로 부여하였다.⁽¹⁴⁾

$${}^0J_3 - \hat{J} = 0 \quad (8)$$

$${}^0J = \hat{J}_1 + \hat{J}_2 r + \hat{J}_3 s + \hat{J}_4 rs + \dots \quad (9)$$

\hat{J} 는 \hat{p} 와 같이 식 (9)의 형태로 따로 독립적으로 보간되는 변수이며 \hat{J}_i 는 압력에 대한 각 적분점(integration point) 값을 의미한다. 본 논문에서는 식 (5)와 식 (6)의 압력 포텐셜을 이용하여 완전 비압축성 재료와 거의 비압축성 재료 각각에 대하여 정식화를 수행하였다.

2.2 비압축성 유한요소 정식화

변위 기준 유한요소법에서 사용하는 포텐셜 ${}^0\bar{W}$ 는 다음과 같이 편차항 ${}^0W'$ 와 정수압항 ${}^0W''$ 두 부분으로 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^0\bar{W} &= {}^0W' + {}^0W'' \\ &= {}^0W' + \frac{1}{2} \alpha ({}^0J_3 - 1)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서 정수압에 의한 에너지 항 ${}^0W''$ 은 Sussman 등이 제안한 재료식에 대한 제반사항을 만족하는 에너지 항을 이용하였다.

완전 비압축성 조건이면 식 (3)과 같이 식 (10)의 포텐셜에 식 (5)의 완전 비압축성 조건에 대한 압력포텐셜을 더하여, 압력에 관한 항을 포함하는 전체 포텐셜을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^0W &= {}^0\bar{W} + {}^0Q \\ &= {}^0W' - \hat{p}({}^0J_3 - 1) \end{aligned} \quad (11)$$

라그랑지 승수인 \hat{p} 는 압력변수가 1개인 경우 식 (12)의 첫 번째 식을 사용하고 3개인 경우에는 식 (12)의 두 번째 식을 이용하여 보간된다.

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \hat{p}_0 \quad (1 \text{ variable}) \\ \hat{p} &= \hat{p}_0 + r \hat{p}_1 + s \hat{p}_2 \quad (3 \text{ variables}) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (11)의 포텐셜을 변위 변수 \hat{u} 에 대한 변분과 압력 변수 \hat{p} 에 대한 변분항으로 나누고 현재

시간 t 와 시간 증분 Δt 에 대해 정리하면 식 (13)과 같이 변위와 압력 변수에 관한 행렬식으로 지배 방정식을 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}_{UU} & {}^t\mathbf{K}_{UP} \\ {}^t\mathbf{K}_{PU} & {}^t\mathbf{K}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{F}_U \\ {}^t\mathbf{F}_P \end{bmatrix} \quad (13)$$

${}^t\mathbf{F}_U$ 와 ${}^t\mathbf{F}_P$ 는 힘벡터를 나타내며 각각 다음과 같은 요소로 구성된다.

$$\begin{aligned} ({}^tF_U)_i &= \frac{\partial}{\partial \hat{u}_i} \left[\int_{\nu_V} {}^tW d^0V \right] \\ &= \int_{\nu_V} {}^tS_{kl} \frac{\partial {}^t\epsilon_{kl}}{\partial \hat{u}_i} d^0V \end{aligned} \quad (14)$$

$${}^tS_{kl} = {}^tS_{kl}' - \hat{p} \frac{\partial {}^tJ_3}{\partial {}^t\epsilon_{kl}}$$

$$\begin{aligned} ({}^tF_P)_i &= \frac{\partial}{\partial \hat{p}_i} \left[\int_{\nu_V} {}^tW d^0V \right] \\ &= - \int_{\nu_V} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{p}_i} ({}^tJ_3 - 1) d^0V \end{aligned} \quad (15)$$

비슷하게 ${}^t\mathbf{K}_{UU}$, ${}^t\mathbf{K}_{UP}$, ${}^t\mathbf{K}_{PU}$, ${}^t\mathbf{K}_{PP}$ 는 강성행렬을 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} ({}^tK_{UU})_{ij} &= \frac{\partial ({}^tF_U)_i}{\partial \hat{u}_j} \\ &= \int_{\nu_V} \left[\left({}^tC_{klrs} - \hat{p} \frac{\partial^2 {}^tJ_3}{\partial {}^t\epsilon_{kl} \partial {}^t\epsilon_{rs}} \right) \frac{\partial {}^t\epsilon_{rs}}{\partial \hat{u}_j} \frac{\partial {}^t\epsilon_{kl}}{\partial \hat{u}_i} + {}^tS_{kl}' \frac{\partial^2 {}^t\epsilon_{kl}}{\partial \hat{u}_i \partial \hat{u}_j} \right] d^0V \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} ({}^tK_{UP})_{ij} &= \frac{\partial ({}^tF_U)_i}{\partial \hat{p}_j} = \frac{\partial ({}^tF_P)_i}{\partial \hat{u}_j} \\ &= ({}^tK_{PU})_{ji} \\ &= \int_{\nu_V} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{p}_j} \frac{\partial {}^tJ_3}{\partial {}^t\epsilon_{kl}} \frac{\partial {}^t\epsilon_{kl}}{\partial \hat{u}_i} d^0V \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} ({}^tK_{PP})_{ij} &= \frac{\partial ({}^tF_P)_i}{\partial \hat{p}_j} \\ &= \int_{\nu_V} - \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{p}_i \partial \hat{p}_j} ({}^tJ_3 - 1) d^0V \end{aligned} \quad (18)$$

식 (16)에서 C_{klrs} 는 $\partial {}^tS_{kl}' / \partial {}^t\epsilon_{rs}$ 를 의미하는

구성텐서(constitutive tensor)이며, 힘벡터는 변위 변분과 압력 변분의 2 부분으로 구분된다. 유사하게 강성행렬도 변위와 압력에 대한 4 부분으로 나뉘어져 있다.

거의 비압축성 조건의 경우, 변위 기준의 포텐셜 식 (10)과 압력에 관한 포텐셜 식 (6)을 고려한 전체 포텐셜 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^tW &= {}^t\bar{W} + {}^tQ = {}^tW' + \frac{1}{2} \alpha ({}^tJ - 1)^2 \\ &\quad - \hat{p} ({}^tJ_3 - {}^tJ) \end{aligned} \quad (19)$$

완전 비압축성 조건과는 독립적으로 보간되는 변수, \hat{p} 와 tJ , 두 개가 동시에 존재한다는 점에서 다르다. 이 경우 식 (20)을 이용하여 \hat{p} 항을 tJ 항으로 변환할 수 있다.

$$\hat{p} = - \frac{\partial {}^t\bar{W}}{\partial {}^tJ_3} = -\alpha ({}^tJ_3 - 1) \quad (20)$$

식 (20)은 Sussman 등⁽⁸⁾이 제안한 변위에서 계산된 압력과 포텐셜의 관계식이다. 이를 \hat{p} , tJ 에 적용하면,

$$\hat{p} = - \frac{\partial {}^t\bar{W}}{\partial {}^tJ} = -\alpha ({}^tJ - 1) \quad (21)$$

식 (21)을 이용해 포텐셜 tW 를 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} {}^tW &= {}^tW' + \frac{1}{2} \alpha ({}^tJ - 1)^2 \\ &\quad + \alpha ({}^tJ - 1) ({}^tJ_3 - {}^tJ) \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)를 이용하여 지배 방정식을 유도할 수 있다. 완전 비압축성 조건에서는 힘벡터와 강성행렬을 변위와 압력에 관하여 유도하였지만 거의 비압축성 조건인 경우는 변위와 절점 변수 $\hat{\mathbf{j}}$ 에 관하여 유도한다. $\hat{\mathbf{j}}$ 는 완전 비압축성 조건의 절점 압력 변수 \hat{p} 와 같은 성격을 가지며, tJ_i 는 다음과 같다.

Table 1 Applied hyperelastic model

Mooney -Rivlin	$\bar{W} = C_1 (\overset{\circ}{I}_1 - 3) + C_2 (\overset{\circ}{I}_2 - 3)$ $\overset{\circ}{I}_3 = 1$
James -Green -Simpson	$\bar{W} = C_{10} (\overset{\circ}{I}_1 - 3) + C_{01} (\overset{\circ}{I}_2 - 3)$ $+ C_{11} (\overset{\circ}{I}_1 - 3)(\overset{\circ}{I}_2 - 3)$ $+ C_{20} (\overset{\circ}{I}_1 - 3)^2 + C_{30} (\overset{\circ}{I}_1 - 3)^3$ $\overset{\circ}{I}_3 = 1$
Ogden N terms	$\bar{W} = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3)$ $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$

$$\overset{\circ}{J} = \overset{\circ}{J}_0 \quad (1 \text{ variable})$$

$$\overset{\circ}{J} = \overset{\circ}{J}_0 + r \overset{\circ}{J}_1 + s \overset{\circ}{J}_2 \quad (3 \text{ variables}) \quad (23)$$

이하의 과정은 완전 비압축성 조건의 유도 과정과 동일하므로 생략하기로 한다. 본 논문에서 검증으로 사용한 4절점 요소, 1 압력변수, 완전 비압축성 조건의 경우에는 변수 \hat{p} 가 1개이므로 $\overset{\circ}{p}$ 는 상수이다. 따라서 위의 식들에서 압력에 관한 1차 미분항은 '1'의 값을 가지며, 2차 미분항은 모두 '0'이 됨을 알 수 있다. 9절점 요소, 3 압력변수, 거의 비압축성의 경우에는 $\overset{\circ}{J}$ 가 상수가 아니고, 압력 변수도 역시 상수가 아니므로 더욱 많은 항이 존재하게 된다.

3. 초탄성 모델

초탄성 재료의 거동은 변형률 에너지식에 의해 표현이 되며, 이를 위해 잘 알려진 몇 가지의 에너지식을 정식화 과정에 포함시켰다. 재료식으로는 Mooney-Rivlin, James-Green-Simpson,⁽¹⁵⁾ Ogden 식이 있으며, Sussman등이 제안한 비압축성 재료에 대한 유한요소 정식화 과정을 적용하였다.

3.1 초탄성 모델

Table 1에 본 논문에서 사용된 초탄성 에너지식을 나타내었다. Table 1의 식에서 $C_1, C_2, \mu_n, \alpha_n$ 은 실험데이터로부터 결정되는 재료상수이며, $\overset{\circ}{I}_i$ 는 변형률 불변량(strain invariant)에 해당한다.

$$\overset{\circ}{I}_1 = \overset{\circ}{C}_{ii}$$

$$\overset{\circ}{I}_2 = \frac{1}{2} \{ (\overset{\circ}{I}_1)^2 - \overset{\circ}{C}_{ii} \overset{\circ}{C}_{jj} \} \quad (24)$$

$$\overset{\circ}{I}_3 = \det \overset{\circ}{C}$$

λ_i 는 주방향 신장률(principal stretch ratio)로서 신장텐서(stretch tensor) $\overset{\circ}{U} = (\overset{\circ}{C})^{1/2}$ 의 주방향(principal direction) 성분이다. Table 1의 에너지식들은 모두 고무가 완전 비압축성이라는 가정을 바탕으로 정수압항이 제거되고 편차항만으로 나타낸 식들이다. 그러나 고무의 체적계수는 전단계수의 수 천배 이기 때문에 거의 비압축성이라고 보는 것이 타당하므로⁽¹⁶⁻¹⁸⁾ Mooney-Rivlin의 경우, $\overset{\circ}{I}_3 = 1$ 의 완전비압축성에 대한 제한 조건을 제거하고 다음과 같이 정수압에 의한 에너지 항 $\overset{\circ}{W}^m$ 를 추가한다.

$$\bar{W} = C_1 (\overset{\circ}{I}_1 - 3) + C_2 (\overset{\circ}{I}_2 - 3) + \overset{\circ}{W}^m (\overset{\circ}{I}_3) \quad (25)$$

고무의 압력은 정수압에 의한 에너지 항에서 계산이 되어야 하며, 나머지 항에서는 압력과 무관해야 한다. 식 (25)에서 $\overset{\circ}{I}_1, \overset{\circ}{I}_2$ 가 모두 코시-그린 변형텐서(right Cauchy-Green deformation tensor) $\overset{\circ}{C}$ 의 함수이기 때문에 체적비에 민감하여 압력과 관계가 있다. 이로 인해 식 (25)를 비압축성인 고무 재료의 정식화에 직접 사용할 수는 없으며, $\overset{\circ}{I}_1, \overset{\circ}{I}_2$ 를 각각 수정된 불변량⁽¹⁷⁾으로 대체한다.

$$\overset{\circ}{J}_1 = \overset{\circ}{I}_1 \overset{\circ}{I}_3^{1/3} \quad (26)$$

$$\overset{\circ}{J}_2 = \overset{\circ}{I}_2 \overset{\circ}{I}_3^{2/3} \quad (27)$$

그리고, 정수압항의 $\overset{\circ}{I}_3 = \det \overset{\circ}{C}$ 대신 변형구배텐서의 행렬식인 $\det \overset{\circ}{X}$ 를 사용하는 것이 편리하므로, 다음과 같이 수정된 불변량을 사용한다.

$$\overset{\circ}{J}_3 = \det \overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{I}_3^{1/2} \quad (28)$$

식 (26), (27), (28)의 수정된 불변량들을 이용하여 식 (25)의 초탄성 에너지식을 다시 쓰면

$$\begin{aligned} {}_0\bar{W} &= C_1({}'J_1 - 3) + C_2({}'J_2 - 3) \\ &+ {}_0W^m({}'J_3) \end{aligned} \quad (29)$$

$${}_0W^m({}'J_3) = \frac{1}{2} \alpha ({}'J_3 - 1)^2$$

위 식에서 정수압에 의한 에너지 항 ${}_0W^m({}'J_3)$ 은 Sussman 등이 제안한 재료식에 대한 제반사항을 만족하는 에너지 항을 이용하였다. 식 (29)는 식 (10)의 일반적인 변위기준 유한요소식의 포텐셜을 대체한다.

Ogden 재료식의 경우도 완전 비압축성에 대하여 고려된 식이므로 정수압에 의한 에너지 항을 추가해야 한다. 신장텐서의 주방향 성분 λ_i 대신에 ${}_0C$ 의 주방향 성분, L_i 를 사용하면

$$\begin{aligned} {}_0\bar{W} &= \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (L_1^{\alpha_n/2} + L_2^{\alpha_n/2} + L_3^{\alpha_n/2} - 3) \\ L_1 L_2 L_3 &= 1 \end{aligned} \quad (30)$$

위의 식에서 완전 비압축성에 대한 구속조건을 제거하고 정수압에 의한 에너지 항을 추가하면

$$\begin{aligned} {}_0\bar{W} &= \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (L_1^{\alpha_n/2} + L_2^{\alpha_n/2} + L_3^{\alpha_n/2} - 3) \\ &+ {}_0W^m({}'J_3) \end{aligned} \quad (31)$$

또한 L_i 역시 ${}_0C$ 의 구성요소이므로 체적비에 민감하기 때문에 압력계산과 관계 있어, 위의 식을 직접 정식화에 사용할 수는 없다. L_i 를 $L_i(L_1 L_2 L_3)^{-1/3}$ 로 대체하고 수정된 Mooney-Rivlin 에너지식의 정수압에 의한 에너지 항과 동일한 ${}_0W^m$ 을 사용함으로써 해결할 수 있다.

$$\begin{aligned} {}_0\bar{W} &= \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\mu_n}{\alpha_n} [(L_1^{\alpha_n/2} + L_2^{\alpha_n/2} + L_3^{\alpha_n/2}) \right. \\ &\left. (L_1 L_2 L_3)^{-\frac{\alpha_n}{6}} - 3] \right\} + {}_0W^m({}'J_3) \end{aligned} \quad (32)$$

응력과 구성텐서는 식 (29), 식 (32)을 이용한 식 (3)의 에너지 항으로부터 계산되며

$${}_0S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}_0\bar{W}}{\partial {}_0\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial {}_0W}{\partial {}_0\varepsilon_{ij}} \right) \quad (33)$$

$${}_0C_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}_0S_{ij}}{\partial {}_0\varepsilon_{kl}} + \frac{\partial {}_0S_{kl}}{\partial {}_0\varepsilon_{ij}} \right) \quad (34)$$

식 (33)과 식 (34)에 대한 컴퓨터를 이용한 실제적인 계산은 변형률에 대한 미분식을 사용하지 않고 코시-그린 변형텐서 ${}_0C$ 를 사용한다.

$$(\cdot)_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \cdot}{\partial {}_0\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \cdot}{\partial {}_0\varepsilon_{ji}} \right) \quad (35)$$

$${}_0\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (36)$$

$$(\cdot)_{ij}^* = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial {}_0C_{ij}} + \frac{\partial \cdot}{\partial {}_0C_{ji}} \right) \quad (37)$$

식 (37)을 이용하면 ${}_0J_i$ 의 변형률에 대한 1차, 2차 미분식의 계산을 비교적 용이하게 구현이 가능하다. 적용된 초탄성 에너지 포텐셜의 계수값을 계산하기 위하여 Mooney-Rivlin과 James-Green-Simpson 모델에서는 표준 시험 결과에 대해 일반 최소 자승법을 적용하였고, Ogden 모델에 대해서는 Levenberg-Marquardt⁽¹⁹⁾의 반복(iteration)법을 적용하였다.

3.2 단위 요소를 이용한 초탄성 모델 검증

Treloar⁽²⁰⁾의 인장 시험 데이터를 이용하여 초탄성 재료식의 계수를 계산하였으며, 결정된 재료식 곡선과 시험 데이터를 비교하였다. Fig. 1과 Fig. 2는 Treloar 단축 인장 시험데이터를 각각 Mooney-Rivlin과 Ogden 2차항 에너지식으로 근사한 그래프이다. Mooney-Rivlin의 경우 식의 형태가 단순하여 거동을 정확히 표현하지 못하였으나, Ogden 2차항의 결과는 변형률이 큰 구간에서도 실험 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

계산된 각 초탄성식의 계수를 이용해 확대칭 단위 요소에 대한 해석을 수행하였다. 완전 비압

축성 조건을 사용하였으며, 단축 인장 방향으로 400% 신장을 가하였다. 전체 증분의 수는 오차를 최소화하기 위해 200단계로 하였다. Fig. 3에 해석 모델을 나타내었다.

Fig. 4는 Fig. 1의 Mooney-Rivlin 초탄성식을 이용하여 근사된(Fitted) 결과와 이를 이용하여 Fig. 3의 단위요소를 해석한 결과를 비교한 그래프이다. Fig. 5는 Fig. 2의 Ogden 2항 초탄성식을 이용하여 근사된(Fitted) 결과와 이를 이용하여 Fig. 3의 단위요소를 해석한 결과를 비교한 그래프이다. 두 해석 결과 모두 Fig 2, 3의 근사결과(Fitted result) 곡선을 정확히 따르는 결과를 보여주었으며 정식화 및 개발된 프로그램에 대한 검증으로 사용되었다.

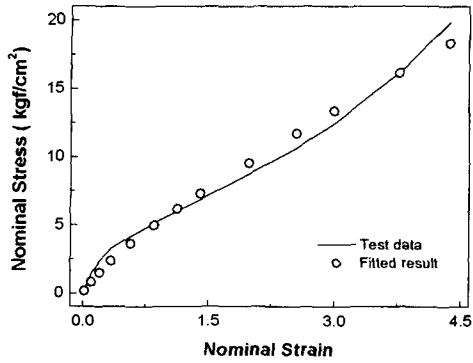


Fig. 1 Curve fitting result of Mooney-Rivlin

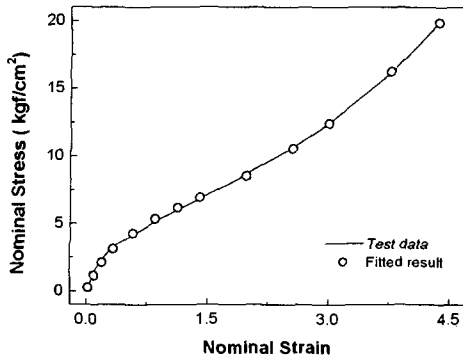


Fig. 2 Curve fitting result of Ogden 2 terms

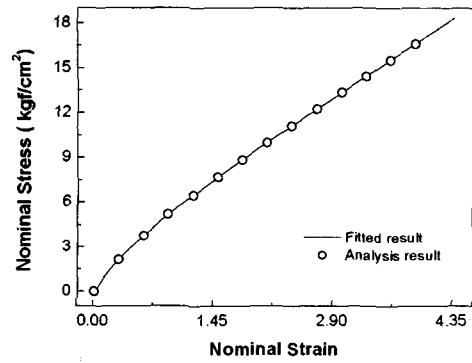


Fig. 4 Fitted data and analysis result using Mooney-Rivlin

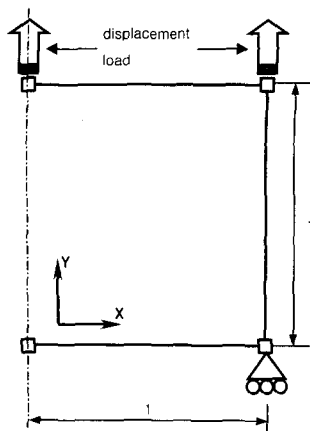


Fig. 3 One element model with unit length

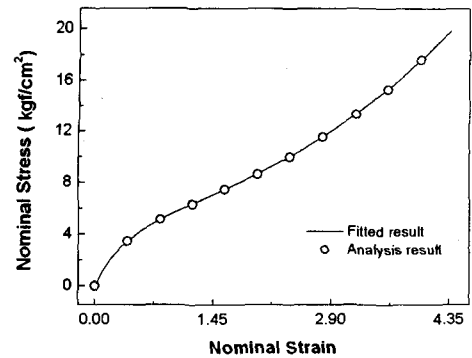


Fig. 5 Fitted data and analysis result using Ogden 2 terms

4. 엔진마운트 변형해석

고무 재료의 제품은 대개 방진이나 불순물을 제품 내부로 유입하지 못하게 하는 목적으로 사용되기 때문에 단독적으로 사용되어지는 경우는 드물며, 다른 재료로 제작된 제품과의 접촉 상황이 필연적이다. 현재까지 유한요소법을 이용한 접촉 문제의 처리에 대한 많은 수의 연구^(21~24)가 있었다. 개발된 프로그램에서는 접촉 조건에 대한 해석을 고려하여 Bathe⁽²⁵⁾의 평면변형과 축대칭 조건에서 적용 가능한 2차원 접촉에 관한 정식화를 사용하였다.

Fig. 6의 부쉬(Bush)형 엔진마운트 해석 모델⁽²⁶⁾을 이용하여 상용 해석 프로그램인 MARC의 결과를 개발 프로그램과 비교하였다.

같은 조건으로 두 프로그램 모두 4절점 사각형

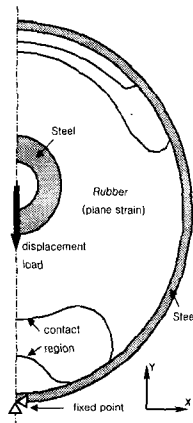


Fig. 6 Boundary condition of B-type engine mount

Table 2 Analysis specification of engine mount

Condition	Value
number of elements	74 elements without pressure variable 379 elements with pressure variable
type of elements	plane strain
total increment	100
total time	1.0
displacement (mm)	-10.0
hyperelastic model	Ogden 4 terms
friction model	no friction

요소를 사용하였으며, MARC의 경우 Hermann의 4변위 1압력 요소를 사용하였고 HANd의 경우 4개의 변위변수와 1개의 라그랑지 승수를 이용하였다. 두 가지 경우에 대한 해석 결과를 변위와 응력값 관점에서 비교하였다. 동일한 시험데이터와 동일한 메쉬를 사용하였으며, 초탄성 모델은 Ogden 4차항을 사용하였다. Table 2에 해석 조건을 명시하였다.

Fig. 7, 8은 개발 프로그램과 MARC에서의 변형 양상과 x축 방향의 그린-라그랑지 변형률 분포를 각각 나타낸 그림이다. 유사한 변형과 변형률 분포 양상을 보여주었다.

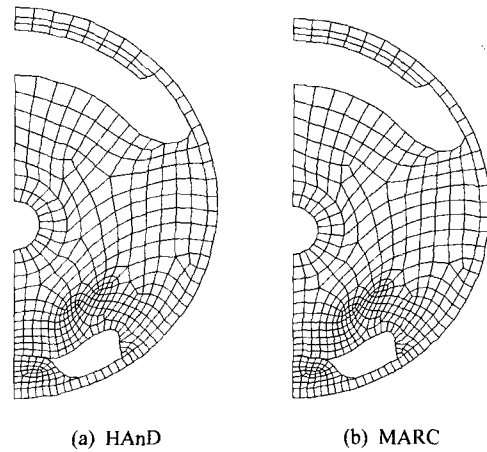


Fig. 7 Comparison of deformed shape

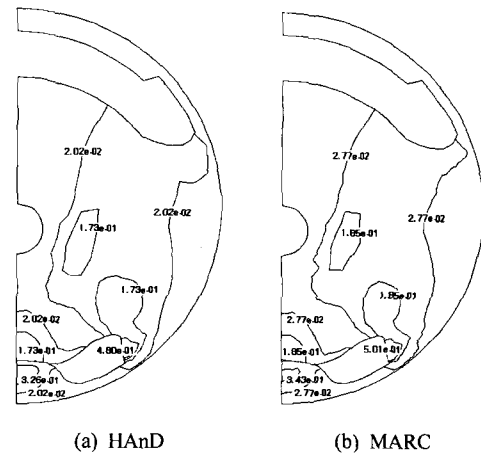


Fig. 8 Comparison of the Green-Lagrangian strain

Table 3 Comparison of Max. and Min. Cauchy stress between HAnD and MARC

	HAnD		MARC		Diff. (%)
	min ($\times 10$)	max ($\times 10$)	min ($\times 10$)	max ($\times 10$)	
S11	-20.43	10.53	-18.65	9.61	8.7
S22	-9.54	8.00	-8.72	7.41	8.6
S12	-4.88	2.50	-4.50	2.30	7.8

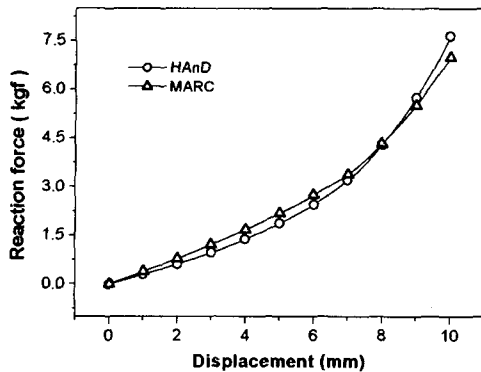


Fig. 9 Comparison of reaction force

두 프로그램의 응력에 대한 오차율을 계산하여 Table 3를 작성하였다. Table 3에서 S11, S22는 각각 x, y 방향의 응력, S12는 xy 방향의 전단응력을 나타낸다. 응력의 단위는 kgf/mm^2 이며 대략 8% 정도의 오차를 나타내었다. Fig. 9에 구속 부분의 반력값 추이를 그래프로 나타내었다. 각 프로그램의 변위에 대한 반력값이 3~6 mm 변위의 범위에서 근소한 차이를 보이고 있으며 전체적으로는 두 프로그램의 결과가 거의 동일한 양상을 보이는 결과를 얻을 수 있었다.

5. 결론

본 논문에서는 라그랑지 승수법을 이용한 압력 포텐셜을 정의하여 비압축성 재료에 대한 유한요소 정식화를 수행하였다. 압력 포텐셜은 체적 변화율을 사용한 완전 비압축성 또는 거의 비압축성 구속조건에 대하여 구성되었으며 라그랑지 승수는 압력변수로 사용되었다. 고무 재료는 거의

비압축성인 재료이나, 체적 시험의 어려움으로 인하여 일반적인 해석작업에서는 체적계수를 고려하지 않고 인장시험데이터만을 사용하기 때문에 완전 비압축성에 대한 정식화를 수행하게 되었다. 압력 포텐셜은 고무 초탄성 에너지식에 추가되어 변위와 압력이 고려된 포텐셜을 구성하였고, 이 포텐셜을 이용한 정식화를 수행함으로써 안정적인 응력의 계산이 가능한 고무 재료의 초탄성 지배 방정식을 유도하였다. 초탄성 에너지 식으로는 다항식 형태의 Mooney-Rivlin식과 James-Green-Simpson식이 사용되었고 Ogden 형태의 Ogden 2항, 3항, 4항식 모델을 이용하였다.

FORTTRAN 언어를 이용하여 알고리즘을 구현하였고, PC의 플랫폼에서 컴파일을 수행하여 PC상에서 수행이 가능한 고무전용 해석 프로그램, HAnD를 개발하였다. 개발된 프로그램의 검증으로 단위 요소를 이용한 단축인장 해석과 엔진마운트에 대한 변형해석을 실시하였다. 단위 요소를 이용한 검증해석에서는 해석 결과 데이터를 인장 시험 데이터와 비교하여 고무의 실제 거동과 일치하였다. 엔진마운트에 대한 변형해석에서는 기존의 변위-압력 유한요소를 사용한 상용프로그램인 MARC와의 엔진마운트 변형해석결과를 비교대상으로 하였다. 최종 변형형상과 응력상태를 비교한 결과 적은 오차의 범위로 수행된 정식화에 대한 신뢰성을 얻을 수 있었다.

참고문헌

- (1) Rivlin, R. S., 1948, "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials IV, Further Developments of the General Theory," *Phil. Trans. A*, Vol. 241, pp. 379~397.
- (2) Ogden, R. W., 1972, "Large Deformation Isotropic Elasticity on the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubber-Like Solids," *Proc. R. Soc. Lond.*, A326, pp. 565~584.
- (3) Kakavas, P. A., 2000, "A New Development of the Strain Energy Function for Hyperelastic Materials Using a Logarithmic Strain Approach," *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 77, pp. 660~672.
- (4) Bonet, J., Burton, A. J., 1998, "A Simple

- Orthotropic, Transversely Isotropic Hyperelastic Constitutive Equation for Large Strain Computations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 162, pp. 151~164.
- (5) Herrmann, L. R., 1965, "Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem," *ALAA, Jnl* 3, pp. 1896~1900.
- (6) Oden, J. T. and Key, J. E., 1970, "Numerical Analysis of Finite Axisymmetric Deformations of Incompressible Elastic Solids of Revolution," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 6, pp. 497~518.
- (7) Crouzeix, M. and Raviart, P. A., 1973, "Conforming and Non-Conforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations," *I. R.A.I.R.O.*, Vol 7, R-3, pp. 33~76.
- (8) Sussman, T. and Bathe, K. J., 1987, "A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis," *Comput. Struct.*, Vol. 26, pp. 357~409.
- (9) Shin, S., J. Lee, T. S. and Oh, S. I., 1998, "Three-Dimensional Finite Element Analysis of Rubber Pad Deformation - Part 1 : Development of Implicit and Explicit Methods -," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 22, No. 1, pp. 111~120.
- (10) Shin, S. J., Lee, T. S. and Oh, S. I., 1998, "Three-Dimensional Finite Element Analysis of Rubber Pad Deformation - Part 2 : Applications -," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 22, No. 1, pp. 121~131.
- (11) Joun, M. S., Moon, H. K. and Kim, S. J., 1997, "A Simple Finite Element Method to Determination of Deformed Shape and Load-Displacement Curve of Elastomers," *Transactions of the KSME, A*, Vol 21, No. 2, pp. 217~222.
- (12) Yang, K. J., Kang, K. J. and Park, S. S., 2000, "Crack Length Estimation for Large Deformable Non-Linear Elastic Material," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 24, No. 1, pp. 103~109.
- (13) Bathe, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall International., Upper saddle river, New Jersey.
- (14) ABAQUS THEORY MANUAL, "4.6.1 Hyperelastic Material Behavior."
- (15) James, A. G., Green, A. and Simpson, G. M., 1975, "Strain Energy Functions of Rubber I," *J. Appl. Ploymer Sci.*, Vol. 19, pp. 2033~2058.
- (16) Penn, R. W., 1970, "Volume Changes Accompanying the Extension of Rubber," *Trans. Soc. Rheology*, Vol. 14, pp. 509~517.
- (17) Ogden, R. W., 1976, "Volume Changes Associated with the Deformation of Rubber-Like Solids," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 24, pp. 323~338.
- (18) Treloar, L. R. G., 1978, "Dilation of Rubber on Extension," *Polymer*, Vol. 19, pp. 1414~1420.
- (19) Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., 1986, *Numerical recipes*, Cambridge University Press, p. 523.
- (20) Treloar, L. R. G., 1944, "Stress-Strain Data for Vulcanized Rubber under Various Types of Deformation," *Trans. Faraday Soc.*, Vol. 40, pp. 59~70.
- (21) Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. and Kanoknukulchai, W., 1977, "A Finite Element Method for Large Displacement Contact and Impact Problems," in *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis* (Bathe, K. J. et al., Eds.), M.I.T. Press.
- (22) Okamoto, N. and Nakazawa, M., 1979, "Finite Element Incremental Contact Analysis with Various Frictional Conditions," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 14, pp. 337~357.
- (23) Kalker, J. J., Allaert, H. J. C. and de Mul, J., 1981, "The Numerical Calculation of Contact Problems in the Theory of Elasticity," in *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (W. Wunderlich et al., Eds.), Springer-Verlag.
- (24) Lee, C. Y., 1996, "A Solution of Variational Inequalities and a Priori Error Estimations in Contact Problem with Finite Element Method," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 20, No. 9, pp. 2887~2893.
- (25) Bathe, K. J. and Chaudhary, A., 1985, "A Solution Method for Planar and Axisymmetric

- Contact Problems," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, pp. 65~88.
- (26) Kim, J. J. and Kim, H. Y., 1993, "Analysis of Large Deformation of Bush Type Engine Mount using Finite Element Method," *Journal of the Korean Institute of Metals and Materials*, Vol. 31, No. 10, pp. 1324~1330.