

이점 대각 이차 근사화 기법과 통계적 제한조건을 적용한 강건 최적설계 기법

권용삼* · 김민수** · 김종립* · 최동훈†

(2001년 12월 28일 접수, 2002년 10월 18일 심사완료)

Robust Optimal Design Method Using Two-Point Diagonal Quadratic Approximation and Statistical Constraints

Yong-Sam Kwon, Min-Soo Kim, Jong-Rip Kim and Dong-Hoon Choi

Key Words : Robust Optimal Design(강건 최적설계), Statistical Constraints(통계적 제한조건), Approximation(근사화)

Abstract

This study presents an efficient method for robust optimal design. In order to avoid the excessive evaluations of the exact performance functions, two-point diagonal quadratic approximation method is employed for approximating them during optimization process. This approximation method is one of the two point approximation methods. Therefore, the second order sensitivity information of the approximated performance functions are calculated by an analytical method. As a result, this enables one to avoid the expensive evaluations of the exact 2nd derivatives of the performance functions unlike the conventional robust optimal design methods based on the gradient information. Finally, in order to show the numerical performance of the proposed method, one mathematical problem and two mechanical design problems are solved and their results are compared with those of the conventional methods.

1. 서론

최적설계 기법은 설계변수나 시스템 파라미터(system parameters)의 확률적 취급 유무에 따라 크게 확정적 방법(deterministic method)와 통계적 방법(stochastic method)으로 분류할 수 있다.

확정적 최적설계 방법은 설계변수나 시스템 파라미터를 확정적인 변수라고 가정하고 최적 해를 구한다. 실제로 과거의 최적설계 알고리즘과, 현재 진행되고 있는 대부분의 최적설계 연구는 이러한 확정적 방법을 기반으로 하고 있다.

그러나 실제로 설계변수는 작업환경 및 제작상

의 공차(tolerance)로 인해 어떤 확률적인 분포(probability distribution) 또는 공차 영역을 가지고 있고 시스템 파라미터 또한 설계자가 결정할 수 없는 변수로써 파라미터 선택시 불확실성이 존재할 가능성이 있다. 이러한 변동 및 불확실성의 영향을 무시한 채 제품을 설계하면 불량품이 나올 확률이 높아지고 그로 인해 제작비용의 증가를 가져올 수 있으며 더욱이 실제 시스템 응답과 설계된 시스템 응답이 일치하지 않을 경우 전체 시스템의 안전성에 큰 영향을 미칠 수 있다.

이러한 설계변수 및 시스템 파라미터의 변동과 불확실성이 시스템에 작용하는 변동 효과를 근본적으로 줄이고, 초기에 설정된 제한조건을 항상 만족시키는 최적 해를 구하는 것을 강건 최적설계라고 하며 확정적 최적설계 방법과 구분하여 통계적 최적설계 방법으로 분류할 수 있다.

성능함수의 민감도를 기반으로 하는 강건 최적설계 기법은 설계변수의 분포로 인해 생길 수 있

* 한양대학교 대학원 기계설계학과
** 회원, 한양대학교 최적설계기술연구센터
† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : dhchoi@hanyang.ac.kr
TEL : (02)2290-0443 FAX : (02)2291-4070

는 성능함수의 변동을 구하기 위해 성능함수의 일차 민감도 및 이차 민감도 정보를 필요로 하게 된다. 기존 강건 최적설계 기법은 이러한 성능함수의 민감도를 계산해야 하는 수치적 어려움을 가지고 있다.

본 연구에서는 효율적인 강건 최적설계를 위하여 통계적 관점에서 제한조건의 강건성을 확보하고 민감도 기반 근사화 기법(gradient based approximation)을 적용한 “순차적 근사화 기반 강건 최적설계 방법(Robust Optimization Based on Sequential Approximation Method, ROSAM)”을 제안하였다. 본 연구가 제시한 강건 최적설계 기법은 민감도 기반 이점 대각 이차 근사화(Two-Point Diagonal Quadratic Approximation, TDQA) 기법⁽¹⁾을 적용함으로써 최적화 과정에 소요되는 계산비용의 절감효과를 얻을 수 있었을 뿐만 아니라 각 성능함수의 이차민감도 값을 해석적으로 구함으로써 대부분의 강건 최적설계가 갖고 있는 성능함수의 이차 민감도 값을 계산해야 하는 수치적 어려움⁽²⁻⁷⁾을 극복하였다.

2 장에서는 기존의 강건 최적설계 연구에 대하여 고찰하였다. 3 장에서는 제안한 강건 최적설계 방법의 정식화와 본 연구에서 근사화 기법으로써 적용한 이점 대각 이차 근사화 기법에 대해서 설명 하겠다. 4 장에서는 본 연구에서 제안한 순차적 근사화 기반 강건 최적설계의 수치적 과정에 대하여 설명하고 5 장에서는 제안한 방법의 수치적 결과 및 효율에 대하여 논할 것이다. 본 연구에서는 수학적 예제, 용접 보 문제 및 외팔 보 문제를 적용하여 제안한 강건 최적설계 방법의 유용성을 검증하도록 하겠다. 마지막으로 6 장에서는 본 연구에 대한 결론을 기술하고자 한다.

한편 설계변수 및 시스템 파라미터가 갖는 변동과 불확실성은 설계문제의 상황 및 조건에 따라 다르지만 시스템 파라미터의 불확실성은 설계변수의 변동보다는 대부분 크지 않고 상수로 취급할 수 있으므로 본 연구에는 설계변수의 변동만을 고려하였다.

2. 강건 최적설계에 대한 고찰

2.1 강건 최적설계 연구

1970년대 후반 Taguchi가 상당한 변동이 있는 제작 공정에 있어서 제품의 강건성(robustness)을 향상시키기 위하여 직교 배열(orthogonal array)에 의한 실험계획법을 통해 파라미터에 대한 영향을

최소화 시키는 설계(parameter design) 개념을 도입한 이후 많은 학자들에 의해 강건설계에 관한 연구가 진행되었다. 1980년대 초반에 이르러 기존의 최적설계 방법론과 가공 및 생산과정에서 제품의 공차나 재료의 불확실성을 고려하고자 하는 노력이 결부되어 강건 최적설계라는 설계 방법론이 등장하게 되었다.⁽⁸⁻¹⁰⁾

초기의 강건 최적설계 연구는 다구찌의 강건 설계의 개념을 기반으로 하면서 제한조건의 강건성(feasibility robustness)은 고려하지 않고 목적함수의 강건성(sensitivity robustness)만을 고려하는 설계상의 한계를 가지고 있었다.⁽¹¹⁻¹³⁾ 그러나 1990년대 초반 Parkinson⁽²⁻⁴⁾ 등이 제한조건의 강건성을 확보하기 위한 이론적 체계를 확립한 이후에는 두 가지 강건성을 동시에 확보하기 위한 연구가 주류를 이루고 있다. 여기서 목적함수의 강건성이란 설계변수의 변동에 대해서 목적함수 값의 변동이 민감하지 않는 것을 의미하며 제한조건의 강건성이란 설계변수에 대하여 설계 값이 제한조건을 위반하지 않고 가용 영역에 존재하는 것을 의미한다.

대부분의 강건 최적설계의 정식화는 설계변수의 변동으로 발생하는 각 성능 함수(performance function)의 변동 향이 성능 함수의 일차 민감도를 포함하고 있으므로 최적설계의 방향탐색 시 성능함수의 이차 민감도를 계산해야 하는 수치적 부담을 가지고 있다. 그래서 최근 강건 최적설계에 관한 연구는 목적함수의 강건성과 제한조건의 강건성을 확보함은 물론 반응표면법(response surface method),^(5,6) 자동 미분 기법(automatic differentiation technique)⁽⁷⁾ 등을 이용하여 설계의 효율을 향상시키기 위한 방법 개발 중심으로 발전하고 있다.

2.2 강건 최적설계 기법의 분류

목적함수의 강건성과 제한조건의 강건성을 동시에 확보하기 위한 강건 최적설계의 정식화는 설계변수의 변동에 대해 각 성능함수가 갖는 분포의 평균(mean value)과 분산(variance)을 고려해야 한다. 설계변수들이 서로 독립적인 확률변수라고 가정하면 성능함수의 평균 μ_f 과 분산 σ_f^2 을 기대 값과 적분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\mu_f = E[f(\mathbf{x})] \quad (1)$$

$$= \int_{x_1}^{x_1^*} \int_{x_2}^{x_2^*} \dots \int_{x_n}^{x_n^*} f(\mathbf{x}) \cdot p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot \dots \cdot p(x_n) \, dx$$

$$\sigma_f^2 = E\left[(f(\mathbf{x}) - \mu_f)^2\right] \quad (2)$$

$$= \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \dots \int_{x_n^-}^{x_n^+} (f(\mathbf{x}) - \mu_f)^2 \cdot p(x_1) \cdot p(x_2) \dots p(x_n) \, d\mathbf{x}$$

여기서 $p(x_i)$ 는 설계변수 x_i 의 확률밀도 함수(probabilistic density function)를 의미한다.

성능함수의 평균과 분산 식을 계산함에 있어 각 설계변수의 확률밀도 함수를 정의하기 어렵고 식 자체의 적분형태 값을 정확히 계산하는 것은 사실상 불가능 하기 때문에 여러 가지 간접적인 방법을 이용하게 된다.

강건 최적설계에 관한 연구는 이러한 성능함수의 평균과 분산을 구하는 방법을 기준으로 크게 실험 계획 기반 강건 최적설계(experimental design based robust optimization)와 민감도 기반 강건 최적설계(sensitivity based robust optimization)로 분류될 수 있다.

2.2.1 실험계획 기반 강건 최적설계

실험계획 기반 강건 최적설계는 통계적인 개념을 통하여 성능함수를 정의하는 방법을 취하고 있으며 다구치 방법(Taguchi's method)과 반응 표면 방법이 그 대표적인 방법이라 할 수 있다.

다구치 방법은 직교 배열표를 근간으로 해서 계획된 실험을 통하여 제품의 강건성을 향상 시키기 위해 일련의 통계적 개념을 설계에 도입한 방법이다. 그러나 이 방법에 사용되었던 여러 통계적 방법들이 통계학적으로 효과적이지 못하다는 점과 방법론의 적용범위에 있어서 비선형성이 강한 문제에는 적합하지 않다는 문제점이 제기되었다.⁽¹⁴⁾ 더욱이 이 방법은 제한조건을 고려하지 않은 설계 개념이었기 때문에 전통적인 최적설계에 적용함에 있어 한계를 가지고 있었다.⁽¹⁴⁾ 또한 계획된 실험 자체가 직접적인 실험에 의존하였기 때문에 컴퓨터 프로그래밍을 기반으로 하는 컴퓨터 설계에는 적합하지 않았으므로 이러한 점을 보완하기 위해 다구치의 방법론을 적용함과 동시에 위에서 언급한 설계상의 한계들을 극복할 수 있는 여러 가지 강건 최적설계 방법들이 제시되어왔다.^(11,12,15)

반응 표면 방법은 통계학적 방법을 통하여 근사화 된 성능함수 모델을 생성시키는 방법으로써 일단 근사함수 모델을 생성하면 그 때 사용되었던 계수들을 이용하여 각 반응 모델의 일차 민감도 및 이차 민감도를 쉽게 구할 수 있으므로 성능함수의 민감도 계산 비용에 대한 부담을 줄일 수 있었다.^(16,17) 그러나 이 방법은 근사화 된 반응 표면 모델이 설계 변수 변동에 대한 원래 성능함수의

변동을 정확히 포착할 수 없는 가능성이 존재하기 때문에 목적함수의 강건성 확보측면에서 의문점이 제기되었다.⁽⁷⁾

2.2.2 민감도 기반 강건 최적설계

민감도 기반 강건 최적설계는 설계 변수의 변동에 대한 각 성능함수가 갖는 변동을 구하기 위해 각 성능함수의 민감도 값을 이용한 근사적인 접근 방법을 취하고 있으며 대표적인 방법으로는 최악 경우 분석(worst case analysis) 방법과 통계적 분석(statistical analysis) 방법이 있다.

최악 경우 분석 방법은 설계변수 변동에 대해 성능함수가 갖는 변동이 최악의 조합 가능형태(worst possible combination)로 동시에 발생해서 성능함수에 최악의 변동 영향을 준다고 가정하는 방법으로써 대부분 테일러 급수(Taylor's series)의 일차 항을 근간으로 하고 있으며 일반적으로 설계변수 변동에 대해 제한조건이 갖는 변동 영향을 구할 때 사용된다.⁽²⁾ 이 방법을 제한조건에 전달되는 변동량은 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta g_j = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i \quad (3)$$

제한조건이 갖는 변동의 영향을 고려할 때 최악 경우 분석 방법은 다른 제한조건의 강건성을 확보하기 위한 방법과 비교해서 전체적으로 가장 보수적(conservative)이라 할 수 있다.

통계적 분석 방법은 설계 변수 변동에 대한 성능함수의 변동을 통계학적 개념을 도입하여 근사화 하는 방법으로써 성능함수를 설계변수의 평균 값을 중심으로 테일러 급수를 통해 근사화 시킨 후 성능함수가 갖는 분포의 평균과 분산을 근사적으로 구하는 방법이다.⁽¹⁶⁾

이 방법에 준하여 근사화 된 성능함수의 기대값과 분산들은 설계변수의 변동으로 인해 목적함수 및 제한조건이 갖는 평균 및 분산을 구하는데 모두 적용될 수 있으며 그에 대한 수식은 다음과 같다.

$$\mu_f \cong f(\boldsymbol{\mu}) \quad \boldsymbol{\mu} = [\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}]^T \quad (4)$$

$$\sigma_f^2 \cong \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \quad (5)$$

여기서 $\boldsymbol{\mu}$ 는 설계변수의 분포가 갖는 평균 벡터를 의미하고 μ_j 와 σ_j^2 는 각각 성능함수의 분포가 갖는 평균과 분산을 의미한다.

3. 순차적 근사화 기반 강건 최적설계

강건 최적설계는 목적함수의 강건성과 제한조건의 강건성을 동시에 만족해야 한다. 이러한 강건 최적설계의 근본적인 요구사항을 만족시키고 강건 최적설계의 효율성을 높이기 위해서 본 연구에서는 순차적 근사화 기반 강건최적설계 방법(Robust Optimization Based on Sequential Approximation Method, ROSAM)을 제안하였다.

이 방법은 통계적 관점에서 제한조건의 강건성을 고려함과 동시에 민감도 기반 근사화 기법을 적용함으로써 강건 최적설계의 효율을 높였다. 본 장에서는 ROSAM의 정식화와 본 연구에 적용한 이점 대각 이차 근사화 기법에 대해서 설명하도록 하겠다.

3.1 강건 최적설계 정식화

본 연구에서 제안한 ROSAM의 강건 최적설계는 목적함수의 강건성과 제한조건의 강건성 확보에 있어서 가장 일반적인 강건 최적설계 과정을 따르고 있으며 그에 대한 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } \alpha \cdot \mu_{\tilde{f}} + (1 - \alpha) \cdot \sigma_{\tilde{f}} \tag{6}$$

$$\text{subject to } \mu_{\tilde{g}_j} + k_j \cdot \sigma_{\tilde{g}_j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \tag{7}$$

$$x_i^L + \Delta x_i \leq x_i \leq x_i^U - \Delta x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{where } \mu_{\tilde{f}} = \tilde{f}(\mathbf{x}), \sigma_{\tilde{f}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2}$$

$$\mu_{\tilde{g}_j} = \tilde{g}_j(\mathbf{x}), \sigma_{\tilde{g}_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2}$$

$0 \leq \alpha \leq 1$, α , Δx_i , and k_j are given.

여기서 f 는 목적함수이고 g_j 는 j 번째 제한조건을 의미하며 n 은 설계변수의 개수이고 m 은 제한조건의 개수이다. 또한 \sim 표시는 근사화 된 성능함수를 의미하며 본 연구에서 제안한 ROSAM은 민감도 기반 근사화 기법 중 이점 대각 이차 근사화 기법(Two-Point Diagonal Quadratic Approximation, TDQA)을 통해 근사화 과정이 이루어진다. 결국 $\tilde{f}(\mathbf{x})$ 와 $\tilde{g}_j(\mathbf{x})$ 는 각각 근사 목적 함수와 근사 제한조건을 의미한다. 따라서 $\mu_{\tilde{f}}$ 와 $\sigma_{\tilde{f}}$ 는 목적함수의 근사 평균 및 분산을 나타내고 $\mu_{\tilde{g}_j}$ 와 $\sigma_{\tilde{g}_j}$ 는 제한조건들의 근사 평균 및 분산을 나타낸다. 또한 Δx_i 는 각 설계 변수의 분포가 가지는 공차 영역을 의미한다.

식 (6)은 목적함수의 강건성을 확보하기 위한

정식화로써 설계자는 문제의 성질과 경험을 바탕으로 원래 목적함수의 성능 향상의 관점과 강건성향상의 관점을 고려해서 두 항에 대한 상대적인 가중치(weighting factor) α 를 부여하여 정의한다. 식 (7)은 제한조건의 강건성을 확보하기 위한 식으로써 설계변수에 대한 제한조건의 변동 항을 통계적 의미를 갖는 표준편차 지수 k_j 와 제한조건의 표준편차(standard deviation) $\sigma_{\tilde{g}_j}$ 의 곱으로써 정의하였다. 여기서 표준편차 지수 k_j 는 설계변수의 변동(fluctuation)이 가용영역에 존재할 확률을 반영해주는 상수로서 설계자가 문제 특성을 고려하여 결정한다.

결국 상기 정식화에 있어서 각 설계변수의 공차영역 Δx_i 와 가중치 α 및 표준편차 지수 k_j 는 설계자에 의해 결정되는 수치이다.

3.2 이점 대각 이차 근사화 기법

앞에서 설명했듯이 본 연구에서는 민감도 기반 근사화 기법 중 이점 대각 이차 근사화 기법(TDQA)⁽¹⁾을 제안한 강건 최적설계 정식화에 적용하였다. 그러므로 제안한 방법은 설계예산 비용의 절감 효과뿐만 아니라 강건 최적설계 수행 시 필요한 성능함수의 이차 민감도 값을 해석적으로 구함으로써 강건 최적설계의 민감도 계산에 대한 수치적 어려움을 해결할 수 있는 장점을 가질 수 있다. 이 절에서는 TDQA 기법에 관한 대략적인 내용을 설명하도록 하겠다.

TDQA 기법은 매개변수(intervening variables)를 사용하는데 그에 대한 수식은 다음과 같이 정의된다.

$$y_i = (x_i + c_i)^{p_i}, \quad i = 1, \dots, n \tag{8}$$

여기서 n 은 설계변수의 개수이고 c_i 는 i 번째 변수의 이동 상수(shifting coefficient)이다. 만약 현재 변수 x_i 가 작은 양의 실수 값 보다 작을 때, 즉, $\zeta \ll 1$ 에 대해 $x_i < \zeta$ 이면 $c_i = |x_i^L| + 1$ 이고 그 외의 경우에는 $c_i = 0$ 이다. 이 이동 상수는 근사함수의 도함수가 $x_i = 0$ 의 근처에서 특이성을 갖지 않도록 해주고 또한 음의 설계변수를 표현할 수 있게 하여 준다. 제안한 근사화는 다음과 같이 \mathbf{x}_2 에서 전개 된다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial y_i} (y_i - y_{i,2}) + \eta \sum_{i=1}^n G_i (y_i - y_{i,2})^2 \tag{9}$$

where $y_i = (x_i + c_i)^{p_i}$

$$p_i = 1 + \frac{\ln \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}_1)}{\partial x_i} / \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \right]}{\ln \left[(x_{i,1} + c_i) / (x_{i,2} + c_i) \right]}$$

$$G_i = \frac{1}{2(y_{i,1} - y_{i,2})} \left(\frac{\partial g(\mathbf{y}_1)}{\partial x_i} - \frac{\partial g(\mathbf{y}_2)}{\partial x_i} \right)$$

$$\eta = \frac{\left[g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \cdot (y_{i,1} - y_{i,2}) \right]}{\sum_{i=1}^n G_i \cdot (y_{i,1} - y_{i,2})^2}$$

여기서 \mathbf{x}_1 은 이전 설계 점이며 \mathbf{x}_2 는 현재 설계 점이다. 여기서 p_i 는 각 변수마다 다른 값을 갖는 상수로서 근사화된 함수의 이전 설계점에서의 도함수 값과 실제 도함수 값이 같다는 조건으로부터 구할 수 있다. 또한 G_i 는 i 번째 헤시언 행렬의 대각 요소이며 η 는 이전 설계 점에서 근사 함수 값을 실제 함수 값과 일치시키기 위한 보정 계수이다.

제안된 방법에서는 p_i , G_i 그리고 η 를 순차적으로 그 값을 구해 나간다. 여기서 G_i 는 매개변수 축에서의 각각의 매개 변수에 대한 실제 이차 곡면(curvature)을 나타낸다.

이점 대각 이차 근사화 기법은 G_i 가 매개변수 공간에서 각 매개변수 축에 따라 구하는 값이므로 각 변수마다 다른 부호를 가질 수 있는 장점을 가지고 있다. 또한 변수의 이동 상수를 통해 근사 함수의 도함수가 $x_i = 0$ 의 근처에서 특이성을 갖지 않도록 해주고 또한 음의 설계변수를 표현할 수 있게 하여 준다. 이 방법은 식 (9)에서 볼 수 있듯이 매개변수 공간에 대해 이차 식 형태로 표현되지만은 매개 변수가 설계 변수에 대해 p_i 지수에 대하여 다차 형태로 표현되므로 다차 형태의 성능함수도 근사화 할 수 있다.

본 연구에서는 위에서 언급한 장점에 입각하여 이점 대각 이차 근사화 기법을 적용함으로써 제안한 강건 최적설계를 구현하였다.

4. ROSAM의 수치적 절차

TDQA 방법을 이용한 순차적 근사화 기반 강건 최적설계 방법(ROSAM)의 수치적인 과정은 다음과 같다.

단계 0: 설계자는 목적함수의 강건성을 확보하기 위한 가중치 α , 목표 표준편차 지수 k'_j , $j =$

$1, \dots, m$, 제한조건을 고려한 가중치 w_j , 설계변수에 대한 공차 Δx_i , $i = 1, \dots, n$ 등을 설정한다.

초기 설계점 \mathbf{x}_0 에서 목적함수 $f(\mathbf{x})$ 와 제한조건 $g_i(\mathbf{x})$ 의 함수 값과 도함수 값을 계산하고 순차적 반복 단계로써 $r = 1$ 으로 한다.

단계 1: 만약 $r = 1$ 이면 보수 근사 기법 (conservative approximation)을 사용하여 근사함수를 생성하고 단계 2 로 간다. 그 외의 경우에는 TDQA 를 사용하여 근사함수를 생성하고 단계 2 로 간다.

단계 2: 적절한 이동제한(move limit)조건 하에서, 본 연구에서 제안한 강건 최적설계 문제를 푼다.

단계 3: 근사 최적해 $\tilde{\mathbf{x}}_r^*$ 에서의 실제 함수계산을 한다. 만약 $|f_{rb}(\tilde{\mathbf{x}}_r^*) - f(\mathbf{x}_r)| \leq \tau_1 |f_{rb}(\mathbf{x}_r)|$, (f_{rb} : robust objective)의 수렴영역에 있고, $g_{r,b,j}(\tilde{\mathbf{x}}_r^*) \leq \tau_2$, ($g_{r,b,j}$: robust constraints)가 충족되었다면, 해가 수렴을 한 것으로 판단하고 강건 최적설계 과정을 종료한다. 다른 경우라면 단계 4 로 간다.

단계 4: $\tilde{\mathbf{x}}_r^*$ 에서 목적함수와 제한조건의 실제 도함수 값을 계산한다. 그리고 설계 변수를 $\mathbf{x}_{r+1} = \tilde{\mathbf{x}}_r^*$ 로 설정한다. $r = r+1$ 로 하고, 단계 1 로 돌아간다.

단계 2 에서의 제한 조건이 있는 최적설계 문제를 위하여 본 연구에서는 DOT version 5.0⁽²⁶⁾의 MMFD(Modified Method of Feasible Directions)를 사용하였다.

5. 수치적 검증

본 연구에서 제안한 ROSAM 의 효율성을 보이기 위해서 수학적 문제와 용접 보 설계 문제 및 외팔 보 설계 문제를 검증용 예제로 선정하였다.

제안한 강건 최적설계 방법은 TDQA 를 통하여 형성한 근사 함수를 근간으로 해서 강건 최적설계 과정이 이루어지고 있다. 결국 제안한 강건 최적설계 방법론은 민감도 기반 근사화 기법을 이용했기 때문에 최적설계 과정 시 소요되는 설계비용을 절감할 수 있으며 성능함수의 이차 민감도를 해석

적으로 구할 수 있음으로써 대부분의 강건 최적설계 가지고 있는 민감도 계산에 대한 수치적 부담을 해결할 수 있다.

이러한 장점을 부각시키기 위해서 ROSAM 을 이용한 강건 최적 해와 실제함수 정보를 이용한 강건 최적 해를 비교함으로써 제안한 방법의 정확성 및 효율성을 입증하였다. 제안한 방법의 효율성을 검증함에 있어 강건 최적설계 시 필요한 함수 해석 수와 일차 민감도 해석 수 그리고 이차 민감도 해석 수를 분석하였고 최적 해의 오차를 비교함으로써 제안한 방법의 정확성 및 효율성을 입증하였다.

한편 제안한 방법은 실제 강건 최적설계 단계에서 가장 일반적으로 사용되고 있는 강건 최적설계 정식화를 사용하였으므로 강건 최적 해의 강건성 확보에 있어서는 그 검증을 생략하였다.

본 논문에서 사용한 이동제한은 보수 근사화일 경우 40%를, TDQA 근사화일 경우에는 이동제한을 두지 않았다. 또한 모든 설계 문제에 대하여 허용 오차는 $\tau_1 = \tau_2 = 1 \times 10^{-3}$ 을 사용하였다.

5.1 수학적 예제

제안한 강건 최적설계 방법인 ROSAM 의 강건성 확보 및 효율성을 검증하기 위하여 수학적 문제인 Fenton 과 Eason 의 함수를 인용하였다.⁽²⁵⁾ 목적함수 f 는 볼록한 형상을 취하고 있으며 제한조건 g 는 선형을 취하고 있다.

강건 최적설계를 수행함에 있어 설계변수 분포가 갖는 공차 영역 Δx_i 는 모두 0.02 로 취하였고 목적함수와 목적함수가 갖는 분산 사이의 상대적인 가중치 α 는 0.5 로 설정하였다. 또한 각 제한조건에 대한 가중치는 동등하게 부여하였으며 제한조건의 표준편차 지수 k 는 5 로 설정하였다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(\mathbf{x}) &= 12 + x_1^2 + \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2 x_2^2 + 100}{(x_1 x_2)^4} \\ \text{subject to } g(\mathbf{x}) &= -\frac{5}{3}x_1 - x_2 + 5 \leq 0 \\ &0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10 \end{aligned}$$

Table 1 에서 볼 수 있듯이 ROSAM 에 의한 강건 해와 실제함수에 의한 강건 해의 차이가 거의 존재하지 않으면서 함수 해석 수(NF), 일차 민감도 해석 수(NG), 이차 민감도 해석 수(NH)의 효율은 증가하였음을 알 수 있다. 결국 ROSAM 을 통해 전체적인 근사화 효율이 향상되었고 그만큼 강건 최적설계의 효율이 향상되었다.

Table 1 Comparisons of robust optimization results for Fenton & Eason problem

	Initial Design	Robust Optimum	
		with ROSAM	with Exact Functions
x_1	2.0	1.8079	1.8154
x_2	2.0	2.1811	2.1685
f	17.7031	17.5078	17.5069
g_{\max}	-0.3333	-0.1943	-0.1943
NF	-	5	7
NG	-	5	10
NH	-	-	3

여기서 민감도 기반 근사화 기법인 이점 대각 이차 근사화 기법을 이용하면 이차 민감도를 해석적으로 구할 수 있으므로 ROSAM 을 이용한 강건 최적설계에서는 이차 민감도 해석 수는 무시 할 수 있다.

5.2 용접 보 설계 문제

본 용접 보 설계 문제는 Reklatis⁽²⁵⁾ 등이 소개한 문제로서 기계 시스템 예제로서 많이 사용되고 있는 문제이다. 실제 현장에서 많이 사용되는 용접 구조물은 Fig. 1 에 보이는 바와 같이 보 요소가 구조물에 용접된 구조 형태를 취하고 있고 설계변수는 각 용접 재료의 두께(x_1)와 길이(x_2), 보 요소의 폭(x_3)과 두께(x_4)이다.

목적함수 f 는 용접 재료의 가격과 보 요소 가격의 합으로써 용접비용을 나타낸다. 용접비용은 보 구조물의 중량에 비례하기 때문에 결국 보 구조물의 중량을 최소화 하는 것이 이 문제의 목적이라고 할 수 있다. 제한조건으로는 용접부위의 전단 응력, 보 요소의 굽힘 응력, 보 요소의 변위와 임계응력에 대하여 설정하였다. 즉, 제한조건은 용접시의 최대 전단 응력(g_1)접 두께와 보 두께의 기하학적 조건(g_2) 보의 최대 굽힘 응력(g_3), 보 끝 단의 최소 변위(g_4), 보의 좌굴 하중(g_5)등 이다. 본 문제에 대한 정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(\mathbf{x}) &= 1.10471x_1^2 x_2 + 0.0481x_3 x_4 (14 + x_2) \\ \text{subject to } g_1(\mathbf{x}) &= \tau(\mathbf{x}) - \tau_d \leq 0 \\ g_2(\mathbf{x}) &= x_1 - x_4 \leq 0 \\ g_3(\mathbf{x}) &= s(\mathbf{x}) - s_d \leq 0 \\ g_4(\mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x}) - \delta_f \leq 0 \\ g_5(\mathbf{x}) &= F - P_c(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned}$$

$$0.125 \leq x_1 \leq 10, 0.1 \leq x_i \leq 10, \text{ for } i = 2, 3, 4$$

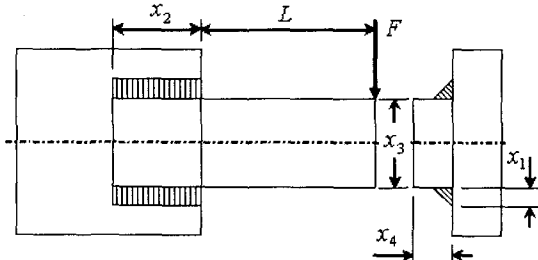


Fig. 1 Welded beam design problem

Table 2 Comparisons of robust optimization results for welded beam design problem

	Initial Design	Robust Optimum	
		with ROSAM	with Exact Functions
x_1	1.0	0.2376	0.2369
x_2	7.0	6.7676	6.7566
x_3	4.0	8.5991	8.5985
x_4	2.0	0.2529	0.2528
f	15.8138	2.5909	2.5893
g_{max}	-0.9047	-0.0162	-0.0158
NF	-	9	72
NG	-	9	80
NH	-	-	8

본 문제에 대한 확정적 최적 해 \mathbf{x}^* 는 $[0.2444, 6.2181, 8.2915, 0.2444]^T$ 로써 최적 치 f^* 는 2.3811 이다. 본 문제를 제안한 강건 최적설계 정식화로 계산하되 근사화 방법에 의한 결과 값과 실제함수에 의한 결과 값을 Table 2 에 나타내었다. 설계변수 분포가 갖는 공차 영역 Δx_i 는 $[0.002, 0.06, 0.08, 0.02]^T$ 로 취하였고 목적함수와 목적함수가 갖는 분산 사이에 상대적인 가중치 α 는 0.5 로 설정하였다. 또한 각 제한조건들의 표준편차 지수 k_j 는 모두 5.0 으로 설정하였다.

Table 2 에서 볼 수 있듯이 ROSAM 에 의한 강건 해와 실제함수에 의한 강건 해의 차이가 거의 존재하지 않으면서 함수 해석 수와 일차 민감도 해석 수에 있어서는 ROSAM 을 통한 강건 최적설계가 각각 약 1/8 과 1/9 만큼 감소 함을 알 수 있다. 즉 본 문제에 대한 제안한 방법의 효율성 및 정확성이 우수함을 알 수 있다.

5.3 외팔 보 설계 문제

본 문제는 상용 최적설계 프로그램인 DOT⁽²⁶⁾에 수록되어 있는 외팔 보 설계 문제이다.

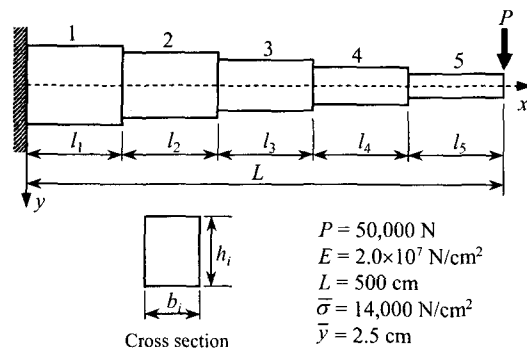


Fig. 2 Cantilevered beam design problem

구조문제에서 많이 사용되는 외팔보 구조물은 Fig. 2 에 보이는 바와 같이 각 단편의 폭(b_i)과 높이(h_i)에 따른 구조 형태를 취하고 있고 설계변수는 각 단편의 폭과 높이로써 설정된다. 그러므로 설계변수의 개수는 단편 개수의 2 배로써 정해진다.

목적함수는 재료 부피를 최소화 하는 것이고 제한조건은 각 단편의 왼쪽 끝에서의 응력에 대한 한계, 주어진 하중 하에서의 y 축 변위(deflection), 그리고 각 단편의 높이가 폭의 20 배를 넘어서지 않아야 한다는 기하학적인 요구 조건이다.

본 문제에 대한 목적함수 최적 치 f^* 는 65,368 이고 최적설계 정식화는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } V = \sum_{i=1}^N b_i h_i l_i \\ & \text{subject to } \frac{\sigma_i}{\bar{\sigma}} - 1 \leq 0, \quad i = 1, \dots, N \\ & \quad h_i - 20b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, N \\ & \quad \frac{y_N}{\bar{y}} - 1 \leq 0 \\ & \quad b_i \geq 1.0, \quad h_i \geq 5.0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

본 문제를 제안한 강건 최적설계 정식화로 계산하되 근사화 방법에 의한 결과 값과 실제함수에 의한 결과 값을 Table 3 에 나타내었다. 설계변수 분포가 갖는 공차 영역 Δx_i 는 모두 0.001 로 취하였고 목적함수와 목적함수가 갖는 분산 사이에 상대적인 가중치 α 는 0.5 로 설정하였다. 또한 각 제한조건들의 표준편차 지수 k_j 는 모두 6.0 으로 설정하였다.

Table 3 에서 볼 수 있듯이 ROSAM 에 의한 강건 해와 실제함수에 의한 강건 해의 차이가 거의 존재하지 않으면서 함수 해석 수와 일차 민감도 해

Table 3 Comparisons of robust optimization results for cantilevered beam design problem

	Initial Design	Robust Optimum	
		with ROSAM	with Exact Functions
x_1	5.0	3.0887	3.1385
x_2	5.0	2.8217	2.8880
x_3	5.0	2.7067	2.5849
x_4	5.0	2.2105	2.2105
x_5	5.0	1.7557	1.7553
x_6	40.0	61.6544	62.6514
x_7	40.0	56.3142	57.6405
x_8	40.0	54.0141	51.5795
x_9	40.0	44.0911	44.0911
x_{10}	40.0	34.9951	34.9957
f	100,000	65,444	66,533
g_{\max}	0.5625	-0.0098	-0.0011
NF	-	8	83
NG	-	8	93
NH	-	-	10

석 수에 있어서는 ROSAM 을 통한 강건 최적설계가 각각 약 1/10 과 1/12 만큼 감소 함을 알 수 있다. 즉 본 문제에 대한 ROSAM 의 근사화 효율성 및 정확성이 우수함을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 통계적 해석을 기반으로 한 순차적 근사 강건 최적설계 기법(ROSAM)을 제안하였다.

본 방법은 민감도 기반 이점 대각 이차 근사화 기법을 적용함으로써 최적화 과정에 소요되는 계산비용의 절감효과를 얻을 수 있었으며 각 성능함수의 이차민감도 값을 해석적으로 구함으로써 대부분의 강건 최적설계가 갖고 있는 성능함수의 이차 민감도 값을 구하는 계산상의 어려움을 극복하였다. 또한 설계변수 변동에 대해 제한조건이 갖는 분포의 변동을 통계적 관점에서 고려하고 표준편차 지수 개념을 통해 제한조건의 강건성을 확보하였다.

본 연구에서는 수학적 문제, 용접 보 설계 문제, 외팔 보 설계 문제를 통해 제안된 강건 최적설계 방법의 효율성을 검증하였다. 특히 외팔 보 설계 문제에 대해서 본 연구에서 제안한 ROSAM 의 효율성이 우수함을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 과학기술부·한국과학재단 지정 우수 연구센터인 최적설계신기술연구센터(iDOT)의 연구비 지원과 국방과학연구소(No. ADD-00-05-08)의 지원으로 수행되었습니다. 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Min-Soo Kim, Jong-Rip Kim, Jae-Young Jeon and Dong-Hoon Choi, 2001, "Design Optimization Using Two-Point Diagonal Quadratic Approximation," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 25, No. 9, pp. 1423~431.
- (2) Parkinson, A., Sorensen, C. and Pourhassan, N., 1993, "A General Approach for Robust Optimal Design," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 74~80.
- (3) Parkinson, A. and Emch, G., 1993, "Using Engineering Models to Control Variability: Feasibility Robustness for Worst-Case Tolerances," *ASME Advances in Design Automation*, DE-Vol. 65-1, pp. 411~418.
- (4) Parkinson, A. and Emch, G., 1994, "Robust Optimal Design for Worst-Case Tolerances," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, pp. 1019~1025.
- (5) Chen, W., Tsui, K. Allen, J. K. and Mistree, F., 1995, "Integration of the Response Surface Methodology with the Compromise Decision Support Problem in Developing a General Robust Design Procedure," *Advances in Design Automation*, ASME DE-Vol. 82.
- (6) Chen, W., Tsui, K. Allen, J. K. and Mistree, F., 1996, "A Procedure for Robust Design: Minimizing Variations Caused by Noise Factors and Control Factors," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 118, pp. 478~485.
- (7) Su, J. and Renaud, J. E., 1996, "Automatic Differentiation in Robust Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 6, pp. 201~215.
- (8) Sobieski, J. S., Barthelemy, J. F. and Riley, K. M., 1982, "Sensitivity of Optimum Solution of Problem Parameters," *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 9, pp. 1291~1299.
- (9) Chen, J. S. -C., Wang, S. and Zug, P., 1984, "Optimal Tolerance Design of Printer Actuator," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 106, pp. 510~517.
- (10) Balling, R. J., Free, J. C. and Parkinson, A. R., 1986, "Consideration of Worst-Case Manufacturing Tolerances in Design Optimization," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 108, No. 4, pp. 438~441.
- (11) d'Entrenont, K. L. and Ragsdell, K. M., 1988, "Design for Latitude Using TOPT," *Proceedings of*

- ASME Advances in Design Automation*, DE-Vol. 14, pp. 265~272.
- (12) Box, G., and Fung, C., 1986, "Studies in Quality Improvement," *University of Wisconsin, Feb. Journal of Quality Technology*.
- (13) Sundaresan, S., Ishii, K. and Houser, D. R., 1989, "A Procedure Using Manufacturing Variance to Design Gears with Minimum Transmission Error," *ASME Advances in Design Automation, Design Automation and Design Optimization*, DE-Vol. 19-2, pp. 145~151.
- (14) Nair, V. N., 1992, "Taguchi's Parameter Design: A Panel Discussion," *Technometrics*, Vol. 34, No. 2, pp. 127~161.
- (15) Ramakrishnan, B. and Rao, S. S., 1991, "A Robust Optimization Approach Using Taguchi's Loss Function for Solving Nonlinear Optimization Problems," *ASME Advances in Design Automation*, DE-Vol. 32-1, pp. 241~248.
- (16) Rao, S. S., 1992, "Reliability Based Design," McGraw Hill, pp. 127~133.
- (17) Otto, J. N., and Antonsson, E. K., 1991, "Extensions to the Taguchi Method of Product Design," *ASME Design Theory and Methodology*, DE-Vol. 3, pp. 21~30.
- (18) Belegundu, A. D. and Zhang, S., 1992, "Robustness of Design through Minimum Sensitivity," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 213~220.
- (19) Tsui, K. -L., 1992, "An Overview of Taguchi Method and Newly Developed Statistical Methods for Robust Design," *IIE Transactions*, Vol. 24, No. 5, pp. 44~57.
- (20) Ramakrishnan, B. and Rao, S. S., 1994, "An Efficient Strategy for the Robust Optimization of Large Scale Nonlinear Design Problems," *ASME Advances in Design Automation*, DE-Vol. 69-2, pp. 25~35.
- (21) Chen, W., Wiecek, M. M. and Zhang, J., 1999, "Quality Utility - A Compromise Programming Approach to Robust Design," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, pp. 179~187.
- (22) Sundaresan, S., Ishii, K. and Houser, D., 1995, "A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints," *Engineering Optimization*, Vol. 24, pp. 101~117.
- (23) Messac, A. and Sundararaj, G. J., 2000, "A Robust Design Approach Using Physical Programming," *AIAA Journal*.
- (24) Kwon-Hee Lee and Gyung-Jin Park, 1997, "Robust Structural Optimization Considering the Tolerances of Design Variables," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 21, No. 1, pp. 112~123.
- (25) Reklatis, G. V., Ravindran, A. and Ragsdell, K. M., 1983, "Engineering Optimization Methods and Applications," John Wiley&Sons, pp. 11~15.
- (26) Vanderplaats, G. N., 1999, "DOT(Design Optimization Tools) User's Manual: Version 5.0," Vanderplaats Research & Development Inc., Colorado Springs.