

2차원 유한요소법을 이용한 파랑의 Bragg반사 해석

Analysis of Bragg Reflection with Two-Dimensional Finite Element Method

조 용 식* / 정 우 창**

Cho, Yong-Sik / Jeong, Woo-Chang

Abstract

In this study, a finite element model is employed to simulate the diffraction of waves caused by a change of water depths. The model is firstly applied to the estimation of reflection coefficients of monochromatic waves over a sinusoidally varying topography. Predicted coefficients are compared with those of the eigenfunction expansion method and laboratory measurements. A good agreement is observed. The model is then used to investigate effects of heights of bottom topography and number of ripples on variation of reflection coefficients of monochromatic water waves.

Keywords : water wave, finite element method, Bragg reflection, eigenfunction expansion method, seabed ripple

요 지

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 수심의 변화에 의해 발생하는 파랑의 회절에 대해 수치적 모의실험을 수행하였다. 본 모형은 정현파형 지형을 통과하는 단조파의 반사율을 계산하는데 적용되었다. 계산된 반사율은 고유함수전개법에 의한 결과와 수리모형실험에 의한 관측결과와 비교하여 본 해석법을 검증하였으며, 이로부터 정현파형 지형의 진폭과 사런의 수의 변화에 대한 반사율의 변화에 적용하여 그의 특성을 조사하였다.

핵심용어 : 파랑, 유한요소법, Bragg 반사, 고유함수전개법, 사런

* 한양대학교 공과대학 토목공학과 부교수
Associate Prof., Dept. of Civil Engrg., Hanyang Univ., Seoul 133-791, Korea
(E-mail : ysc59@hanyang.ac.kr)

** 홍익대학교 공과대학 토목공학과 겸임교수
Adjunct Associate Prof., Dept. of Civil Engrg., Hongik Univ., Seoul 121-791, Korea
(E-mail : jwc1967@hanmail.net)

1. 서론

대규모 방조제 건설, 화력 및 원자력발전소 등과 같은 임해발전소 건설 및 항만개발 등과 같은 연안개발사업은 엄청난 경비가 소요될 뿐만 아니라 공사규모도 대형이므로 사업수행 후 기존의 주변환경에 미치는 영향도 매우 크다. 더욱이, 주변해역의 파랑과 조석의 특성이 변할 수 있으므로 공학적인 측면에서 효율적이고 안전한 연안개발사업을 위해서는 사업의 계획단계에서 기초이론의 응용과 정확한 현장관측자료를 기초로 수리모형실험과 수치모형실험을 수행하여 최적의 설계가 이루어지도록 해야 한다.

심해에서 발달한 파랑은 수심이 상대적으로 얇은 해안으로 전파해오면서 수심의 변화, 해안구조물과의 상호간섭 및 서로 다른 파랑간의 상호작용에 의해 여러 물리적 변화를 경험하게 된다. 다양한 물리적 변화 중에서 연구할 충분한 가치가 있고 또한 실제문제에 적용이 가능한 것중의 하나는 Bragg 반사(Bragg resonant reflection)이다. Bragg 반사는 해저지형이 정현파형을 갖는 사면형상(sinusoidally varying bottom topography)일 경우, 입사파의 파장이 사면 파장의 두 배일 때 공명현상으로 입사파 에너지의 상당량이 반사되는 현상을 말한다.

Bragg를 반사를 이용하여 수중방파제를 설계 및 시공할 경우, 항만 내 수면교란현상과 해빈의 불필요한 침식 및 퇴적현상을 최소화할 수 있을 뿐만 아니라 해안구조물을 보호할 수 있다. Bragg 반사는 또한 항만의 정온도 유지방안에 효과적으로 이용할 수도 있다. 항만의 정온도 유지는 항만의 본 기능을 발휘하는데 필요한 기본적인 요소로서 이에 대한 대책으로 항만입구의 바닥 또는 항만입구의 측벽에 Bragg 반사가 발생할 수 있는 시설을 적절히 설치할 경우 항만내로 진입하는 파랑을 감소시킴으로서 매우 효율적인 수면교란 저감방안이 될 수 있다.

Mei와 Liu (1993)는 미국의 오대호, 일본 근해 및 여러 나라의 해안가에 존재하는 수중 사련군(submerged multiple offshore sandbars)의 형성은 Bragg 반사와 관련이 있는 것으로 보고하였다. 일반적으로, 사련군은 해안경사가 0.005보다 작은 지형에서 주로 발견되고 있으며, 하나의 사련군은 3~17개의 사련으로 구성되어 있으며, 개개 사련간의 간격은 10~480m인 것으로 보고되었다.

Bragg 반사에 관한 기존의 연구는 크게 수리실험을

이용한 연구(Davies와 Heathershaw, 1984; Devillard 등, 1988; Guazzelli 등, 1992), 해석적인 방법을 이용한 연구(Hara와 Mei, 1987; Liu와 Cho, 1993; 조와 이, 1998; Cho와 Lee, 2000) 및 수치기법을 이용한 연구(Dalrymple와 Kirby, 1986; O'Hare와 Davies, 1992; 조 등, 1995; Lee 등, 1998, 김 등, 2000) 등으로 구분할 수 있다.

특히, 최근에는 Bragg 반사를 이용하여 불필요한 침식을 방지하는 수중방파제 또는 수중트렌치를 건설하여 해저지형을 보호하고자 하는 연구가 시도되고 있다(Bailard 등, 1992; Lamberti와 Mancinelli, 1997; Tomasicchio, 1997). 이와 같은 Bragg 반사를 수중방파제에 이용할 경우 상당한 양의 입사파 에너지를 외해로 반사할 수 있어 매우 효율적으로 해안지형 또는 해안구조물을 보호할 수 있다.

조와 이 (1998)는 고유함수진개법(eigenfunction expansion method)을 이용하여 임의로 변하는 수심을 가진 지형을 통과하는 파랑의 반사율을 계산하였다. 조와 이의 연구에서는 수심이 정현파형으로 변하는 지형을 일련의 매우 작은 계단으로 단순화하여 이를 통과하는 파랑의 반사율을 해석적으로 산정하였다. 보고된 반사율에는 소멸파(evanescent modes)의 효과를 고려하였으며, 해저지형에 평행으로 입사하는 파랑 뿐만 아니라 비스듬히 입사하는 파랑의 반사율도 계산하였다. 계산 결과는 Davies와 Heathershaw (1984)의 수리실험 관측자료와 비교하였으며, 계산결과와 수리실험 관측자료는 잘 일치하는 것으로 보고되었다.

본 논문에서는 정현파형 지형을 통과하는 파랑의 반사율을 유한요소법을 이용하여 계산한다. 제2장에서는 본 연구에서 사용된 지배방정식과 경계조건에 대하여 기술한다. 제3장에서는 유한요소법에 대해 기술하며, 제4장에서는 개발된 유한요소모형을 이용하여 정현파형 지형을 지나는 파랑의 반사율을 계산하여 기존의 수리모형실험 관측결과와 비교하며, 사련의 수와 정현파 지형의 진폭의 변화에 대한 반사율의 변화에 대해서도 조사한다. 마지막으로, 제5장에서는 결론을 기술한다.

2. 지배방정식과 경계조건

본 연구에서 유체는 비점성(invscid fluid)으로 가정되며, 흐름은 비압축성(incompressible) 및 비회전(irrotational) 흐름으로 가정된다. 따라서, 유체운동은 포텐셜흐름으로 나타낼 수 있으며, 유체의 거동은 Laplace방정식에 의해 지배된다. 미소진폭파 가정에서

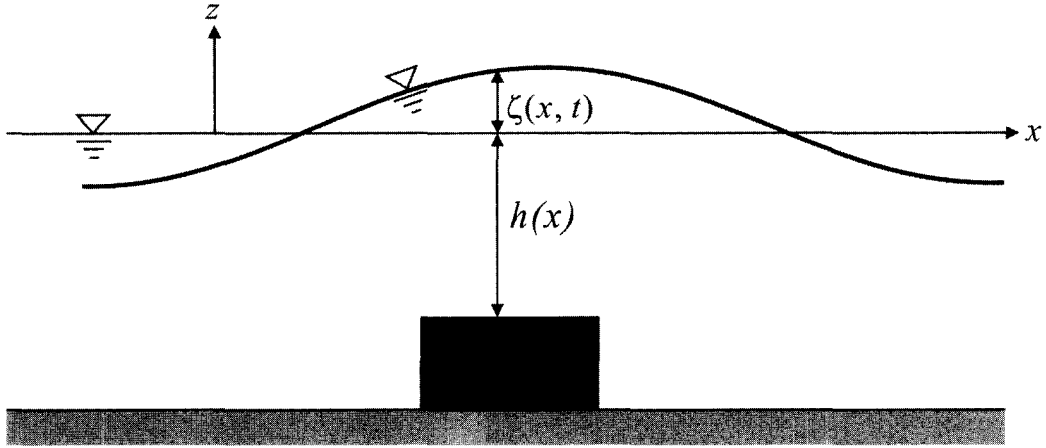


그림 1. 진행수면파에 대한 개념도

속도포텐셜 (Φ) 에 대한 2차원 Laplace방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad -h(x) \leq z \leq 0 \quad (1)$$

식 (1)에서 h 는 수심이며, ζ 는 자유수면변위이며 (그림 1), 지배방정식의 적용범위는 미소진폭파이론에 의해 선형화되었다.

자유수면에는 운동학적 경계조건(kinematic free surface boundary condition)과 동역학적 경계조건(dynamic free surface boundary condition)이 있으며, 두 조건을 미소진폭파이론에 의해 선형화한 후 합성하면 다음과 같은 자유수면에서의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \Phi = 0, \quad z = 0 \quad (2)$$

또한, 해지면 및 구조물에 대해서는 고체경계조건, 즉 불투과 조건을 고려하면 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \vec{\nu} = 0 \quad (3)$$

식 (3)에서 $\vec{\nu}$ 는 밖으로 향하는 연직단위벡터이다.

정원파형 해저지형에 입사하는 파랑과 해저지형에 의해 반사되는 반사파 및 해저지형을 통과하여 계속 진행되는 통과파를 묘사하는 지배방정식은 미소진폭파이론에 의해 결정된다. 불규칙적인 해저지형의 영향으로 인해 입사파는 그대로 진행하지 못하고 반사 및 산란을 하게 되므로 이를 해결하기 위해 Sommerfeld 경계조

건을 적용하였다(Liggett과 Liu, 1983). Sommerfeld 경계조건에 의해 분리된 통과파와 반사파의 속도포텐셜은 다음과 같이 표현된다 (조와 이, 1998).

$$\begin{aligned} \Phi^\pm = & A_0^\pm \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{\pm ikx} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cosh K_n(z+h)}{\cosh K_n h} e^{\pm K_n x} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에서 시간항과 y 축 방향에 대한 항은 생략되었으며, n 은 소멸파의 수를 나타낸다. 또한, A_0^+ 와 A_0^- 는 진행파의 통과파와 반사파의 진폭이며, A_n^+ 와 A_n^- 는 소멸파의 통과성분과 반사성분의 진폭이다. 또한, k 와 K_n 는 진행파와 소멸파의 파수이며, 다음과 같은 분산방정식으로부터 계산된다.

$$\omega^2 = gk \tanh kh, \quad \omega^2 = -gK_n \tan K_n h \quad (5)$$

식 (4)에서 진폭함수 A_0^\pm 와 A_n^\pm 를 결정하기 위해서는 수심이 변하는 지점에서 다음과 같이 두 개의 접합조건(matching conditions)이 필요하다.

$$\Phi = \Phi^\pm(x^\pm, z) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \pm \frac{\partial \Phi^\pm}{\partial x}, \quad x > x^+ \text{ or } x < x^- \quad (7)$$

식 (6)과 (7)는 물리적으로 각각 자유수면에서의 압력의 연속과 x 축 방향으로 흐름율의 연속을 의미한다.

3. 유한요소법

식 (6)과 (7)를 만족하는 속도포텐셜을 구하기 위해 본 연구에서는 유한요소법을 이용하였다. 유한요소법은 물리적으로 분할된 요소에 대해 정의된 특정 성질의 형상함수 (또는 기저함수, basis function)를 주어진 문제에 적합한 적분형의 원리를 이용하는 근사적인 방법이다. 유한요소법에서 지배미분방정식을 적분형으로 수식화하는 방법에는 어떤 미분방정식을 풀려는 것이 범함수라고 일컫는 상대적인 양을 최소화시키는 것과 동일하다는 사실을 이용하는 변분법(variational method) 또는 근사해와 정확해 사이의 잔차(residual)에 가중함수를 도입하여 강제적으로 잔차를 0으로 하는 가중잔여법(weighted residual method)이 주로 사용된다. 본 연구에서는 가중잔여법 중 가중함수와 형상함수를 동일한 형태로 취하는 Galerkin기법을 이용하였다.

고려된 영역을 모형화하기 위해서는 분할된 각각의 요소내의 속도포텐셜 $\hat{\phi}_i$ 를 다음과 같이 절점포텐셜 ϕ_i^e 과 형상함수 N_i^e 로써 나타낼 필요가 있다.

$$\hat{\phi}_i = \sum_{i=1}^m N_i^e \phi_i^e \quad (8)$$

여기서 m은 요소 e의 절점의 수이다.

식 (1)의 ϕ 를 식 (8)의 $\hat{\phi}_i$ 로 치환하고, 잔차를 0으로 하기 위해 가중함수 W_i^e 를 도입하면서 적분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega^e} W_i^e \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{\phi}_i^e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \hat{\phi}_i^e}{\partial z} \right) \right] d\Omega^e - \int_{\Gamma^e} N_i^e \frac{\omega^2}{g} \hat{\phi}_i^e d\Gamma^e = 0 \quad (9)$$

여기서, Ω^e 와 Γ^e 는 각각 요소 e에 대한 면적분과 경계에서의 선적분을 나타낸다.

식 (9)에 Green 정리를 적용한 후 요소 e에 대해 행렬-적분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$[K^e] \{\phi_i\} = \{F_i^e\} \quad (10)$$

여기서, $[K^e]$ 는 다음의 식 (11)로 주어지는 계수행렬, $\{\phi_i\}$ 는 미지의 속도포텐셜 벡터 그리고 $\{F_i^e\}$ 는 다음의 식 (12)로 주어지는 경계에서 정의된 유동을 (flux)를 포함하는 벡터이다.

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} \left[\left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\}^T \right] d\Omega^e - \int_{\Gamma^e} \frac{\omega^2}{g} \{N_i^e\} \{N_i^e\}^T d\Gamma^e \quad (11)$$

$$\{F_i^e\} = \int_{\Gamma^e} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \{N_i^e\} d\Gamma^e \quad (12)$$

본 모형에서 자유수면과 내부영역은 그림 2과 같이 각각 2차 형상함수를 갖는 3절점과 8절점의 등매개변수요소(isoparametric element)를 통해 분할되었다.

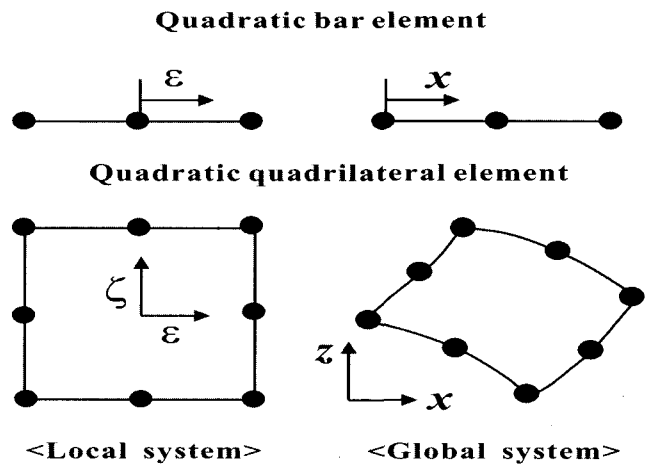


그림 2. 국부와 전역 좌표계에서 2차 3절점 요소와 8절점 요소의 정의

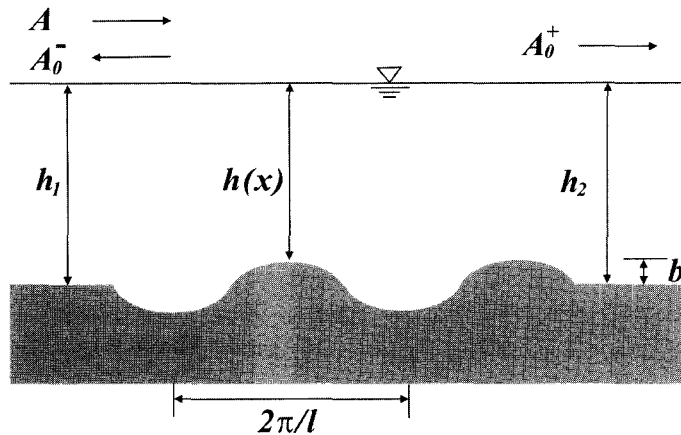


그림 3. 단일 정현파형 지형 ($m=2$)

이러한 두 가지 요소에 대한 형상함수는 많은 유소요소 법과 관련된 참고문헌에 주어져 있다(Zienkiewicz와 Taylor, 1989).

식 (11)과 (12)에서 각각의 계수행렬은 Gauss 수치 적분공식을 사용하여 구성되었다. 개별적인 요소에 대한 계수행렬이 구성된 후, 요소 전체에 대한 전역계수 행렬은 조립과정(assembly procedure)을 통해 다음의 식과 같이 얻어진다.

$$\sum_{\epsilon} [K^{\epsilon}] \{\phi_j\} - \{F_j^{\epsilon}\} = 0 \quad (13)$$

식 (13)을 통해 선형방정식이 유도되며, 이를 풀기 위해 본 연구에서는 LU 분해법을 사용하였다(Press 등, 1992). 이러한 과정을 통해 얻어진 해로부터 반사율(R)과 통과율(T)은 각각 다음과 같이 계산된다.

$$R = \frac{|A_0^-|}{A} \frac{\omega}{g}, \quad T = \frac{\cosh k_j h_j}{\cosh k_1 h_1} \frac{|A_0^+|}{A} \frac{\omega}{g} \quad (14)$$

식 (14)에서 A 는 입사파의 진폭을 의미하며, j 는 통과율을 계산하는 영역을 나타낸다. 만약 해저지형이 구조물을 중심으로 대칭이라면, 식 (14)은 다음과 같이 간단히 나타내어 진다.

$$R = \frac{|A_0^-|}{A} \frac{\omega}{g}, \quad T = \frac{|A_0^+|}{A} \frac{\omega}{g} \quad (15)$$

4. 단일 정현파형 지형을 통과하는 파랑

본 절에서는 정현파형 지형을 통과하는 파랑의 반사율을 계산한다. 본 연구에서 정현파형 지형은 다음과

같이 정의된다.

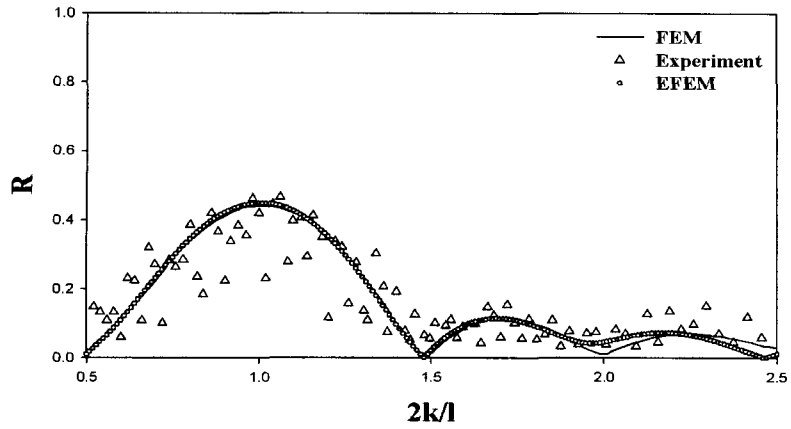
$$\begin{aligned} h(x) &= h_1, & x < 0 \\ h(x) &= h_1 - b \sin(lx), & 0 < x < 2\pi m/l \\ h(x) &= h_1, & x > 2\pi m/l \end{aligned} \quad (16)$$

위의 식에서 정현파형 지형의 양끝은 일정하며, 즉 $h_1 = h_2$ 이며, l 은 정현파형 지형의 파수, b 는 지형의 진폭 그리고 m 은 사면의 수를 나타낸다. 그림 3은 사면의 수가 2개($m=2$)인 경우에 대한 예이다.

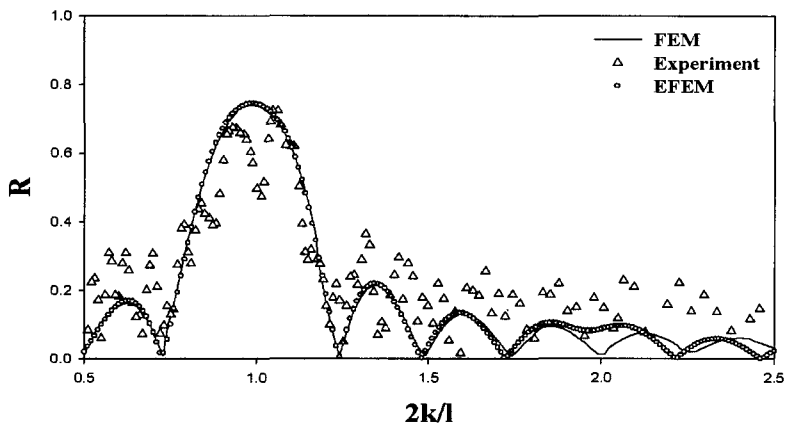
그림 4는 (a) $m=2$ 와 $b/h_1=0.32$, (b) $m=4$ 와 $b/h_1=0.32$, 그리고 (c) $m=10$ 과 $b/h_1=0.16$

인 경우에 대해 유한요소모형으로부터 얻어진 반사율의 계산결과와 Davies와 Heathershaw (1984)의 수리모형실험에 의한 관측결과 및 Cho와 Lee (2000)의 고유함수전개법에 의한 결과를 비교한 것이다. 세 경우 모두 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 특히, 세 경우 모두 파랑의 파수가 해저지형의 파수에 대해 2배인 $2k/l \approx 1.0$ 부근에서 Bragg반사가 발생하여 반사율이 최대가 됨을 예측하고 있다.

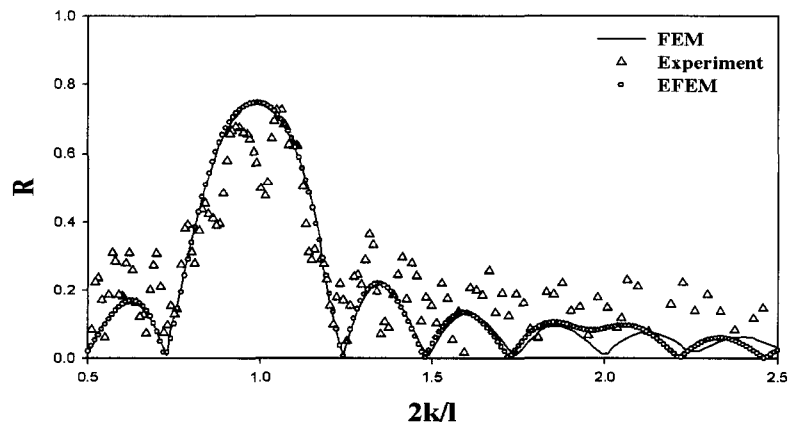
또한, 사면의 수가 증가할수록 반사율의 크기는 증가함을 알 수 있다. 그림 5는 $m=4$ 일 때 상대진폭 (b/h_1)이 0.08, 0.16, 0.24 그리고 0.32로 증가할 때의 반사율의 변화를 나타낸 것이다. 여기서는 최대반사율 즉, Bragg반사가 발생하는 지점($2k/l \approx 1.0$)에서의 반사율을 비교하였다. 그림 4와 같이 상대진폭이 증가함에 따라 반사율이 증가함을 알 수 있으며, 상대진폭과 반사율은 거의 선형의 관계가 됨을 알 수 있다(그림 6).



(a) $m=2$, $b/h_1=0.32$



(b) $m=4$, $b/h_1=0.32$



(c) $m=10$, $b/h_1=0.32$

그림 4. 정현파형 지형에서 사런의 수(m)에 따른 반사율

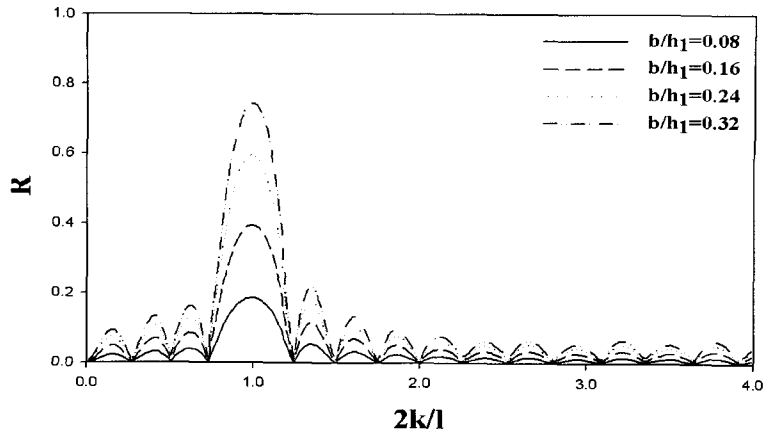


그림 5. 단일 정현파형 지형에서 상대진폭에 따른 반사율의 변화($m=4$)

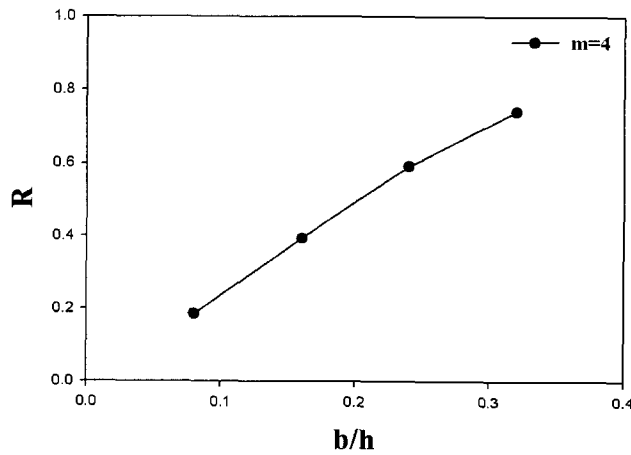


그림 6. 상대진폭과 최대반사율의 관계($m=4$)

5. 결 론

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 Bragg 반사 해석을 위한 수치모형을 개발하였으며, 단일 정현파형 지형에서의 반사율을 계산하였다. 본 연구에서 개발한 수치모형의 검증을 위해 기존의 수치실험 및 수리실험 관측자료와 비교하였다. 단일 정현파형 지형에 대한 반사율은 Cho와 Lee (2000)의 고유함수전개법에 의한 수치실험결과와 Davies와 Heathershaw (1984)에 의해 수행된 수리실험결과와 잘 일치하는 결과를 얻었다. 또한 단일 정현파형 지형을 통과하는 파랑의 최대반사율은 상대진폭이 커짐에 따라 선형으로 증가하고 파랑

의 파수가 정현파 지형의 파수에 2배가 되는 지점에서 정확하게 Bragg 반사가 발생함을 알 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업(한양대학교 해안공학연구실)으로 수행되었기에 이에 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

김영택, 조용식, 이정규 (2000). "2차원 경계요소법을 이용한 Bragg 반사 해석." 한국수자원학회논문집, 한국수자원학회, 제33권, 제6호, pp. 805-814.

- 조용식, 이종인, 이정규, 윤태훈 (1995). "Bragg reflection of shallow-water waves." *대한토목학회논문집*, 대한토목학회, 제15권, 제6호, pp. 1823-1832.
- 조용식, 이창훈 (1998). "수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율 산정." *대한토목학회논문집*, 대한토목학회, 제18권, 제II-4호, pp. 351~358.
- Bailard, J., DeVries, J.W., and Kirby, J.T. (1992). "Considerations in using Bragg reflection for storm erosion protection." *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 118, pp. 62-74.
- Cho, Y.-S. and Lee, C.H. (2000). "Resonant reflection of waves over sinusoidally varying topographies." *Journal of Coastal Research*, Vol. 16, No. 3, pp. 870-876.
- Dalrymple R.A. and Kirby, J.T. (1986). "Water waves over ripples." *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 112, pp. 309-319.
- Davies, A.G. and Heathershaw, A.D. (1984). "Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 144, pp. 419-443.
- Devillard, P., Dunlop, F. and Souillard, B. (1988). "Localization of gravity waves on a channel with a random bottom." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 186, pp. 521-538.
- Guazzelli, E., Rey, V. and Belzons, M. (1992). "Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 245, pp. 301-317.
- Hara, T. and Mei, C.C. (1987). "Bragg reflection of surface waves by periodic bars: theory and experiment." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 178, pp. 221-241.
- Lamberti, A. and Mancinelli, A. (1997). "Italian experience on submerged as beach defence structures." *Proceedings of 25th International Conference on Coastal Engineering*, Orlando, USA, pp. 2352-2365.
- Lee, C.H., Park, W.-S., Cho, Y.-S. and Suh, K.D. (1998). "Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography." *Coastal Engineering*, Vol. 34, pp. 243-257.
- Liu, P.L.-F. and Cho, Y.-S. (1993). "Bragg reflection of infragravity waves by sandbars." *Journal of Geophysical Research*, Vol. 98, pp. 22733-22741.
- Mei, C.C. and Liu, P.L.-F. (1993). "Surface waves and coastal dynamics." *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 25, pp. 215-240.
- O'Hare, T.J. and Davies, A.G. (1992). "A new model for surface-wave propagation over undulating topography." *Coastal Engineering*, Vol. 18, pp. 251-266.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T. (1992). *Numerical Recipes in Fortran*. 2nd edition, Cambridge University Press.
- Tomasicchio, U. (1997). "Submerged breakwaters for the defence of the shoreline at Ostia field experiences, comparison." *Proceedings of 25th International Conference on Coastal Engineering*, Orlando, USA, pp. 2404-2417.
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1989). *The Finite Element Method*. McGraw-Hill International Editions.

(논문번호:02-45/접수:2002.07.26/심사완료:2002.10.08)