韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2002, 11. 제 41권, 제 3호, 341-360.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2002, Vol. 41, No. 3, 341-360.

탐구형 소프트웨어를 활용한 고등학교 해석 기하 교육에 관한 사례 연구

황 우 형 (고려대학교)
차 순 규 (중동고등학교)

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

최근 정보 통신 분야의 발전은 사회 전반에 걸쳐 커다란 변혁의 물결을 일으키고 있다. 이러한 변혁은 교육계에서도 예외는 아니다. 몇 해 전부터 교육 환경은 컴퓨터의 도입으로 새로운 국면을 맞고 있다. 이미 초등학교나 중학교에서 다양한 소프트웨어와 인터넷 등은 학생들의 학습 동기를 유발시키고 학습의 도구로 활발히 사용되고 있다. 그러나 기술 공학을 흥미 위주의 동기 유발에만 초점을 맞추는 것은 곤란하다. 다양한 소프트웨어를 활용한 교육이 진정으로 학생들의 수학을 이해하고 문제 해결 능력을 신장시키는데 도움을 줄 수 있는지 생각해 보아야 한다.

현재 고등학교 기하 수업을 보면 공통 수학에서 해석 기하, 수학Ⅱ에서 해석 기하, 공간 기하 그리고 일차 변환과 벡터 기하를 지도하고 있다. 한편, 중학교 기하 수업에서는 직관 기하와 평면 논증 기하를 가르치고 있다. 고등학교 해석 기하 교육은 중학교에서 배운 도형에 관한 논증과 추론에 관련된 내용을 좌표를 이용하여 대수적으로 확인함으로써 수학적인 개념을 더욱 견고하게 한다. 또한 도형의 방정식과 이차곡선에 대한 개념을 이해하고 그에 관련된 문제를 대수적으로 해결하는 내용도 포함된다. 이와 같은 중등 교육과정에서의 기하 교육은 기하학적 직관력을 신장시키고, 이를 바탕으로 논리적 추론 능력을 향상시키는 두 가지 측면을 강조하고 있다. 직관이란 핵심적인 연결관계를 즉각적으로 파악하는 거의 무의식적인 매우 신속한 인지 과정으로, 특히 시각적인 요소와 밀접하게 관련되어 나타나는 경우가 많다(우정호, 1998).

시각적인 요소는 대수적인 문제 해결은 물론 기하의 교수 학습에서도 직관과 관련되어 중요한 역할을 한다. 그러므로 동적인 조작이 가능한 기하 교수 학습용 소프트웨어가 기하 교육에 많은 영향을 주는 것은 당연하다.

기하 교육에서 기술 공학의 활용은 학습 내용과 학습 과정을 시각적으로 파악할 수 있도록 도와주기 때문에 기하 개념을 지도하는데 직관적인 방법을 택할 수 있다. 컴퓨터의 그래픽 기능이나 계산 처리 능력은 학습자가 추정하거나 탐구하는 활동에 초점을 맞출 수 있고, 컴퓨터의 프로그램 자체가 논리적 추론 과정이므로 프로그래밍 활동은 논리적 사고력을 향상시킬 수 있다(류희찬, 1998).

미국 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)의 STANDARD 2000에 의하면 고등학생들은 기술 공학을 이용해서 기하학적인 관계를 동적으로 탐구하고, 기하학적인 상황들을 상세히 조사하여 시각적인 피드백이나 측정을 할 수 있다. 또한 기술 공학을 이용하여 아이디어를 탐색하고 추측을 전개하며 연역적 추론과 반례를 사용하여 이러한 추측의 타당성을 입증하거나 반박할 수 있고, 도형의 성질이나 도형간의 관계에 대한 논리적인 표현을 학생 스스로 할 수 있도록 도움을 줄 수 있다(NCTM, 1998).

요즈음 기술 공학을 활용하여 수학 교수-학습 과정에서 수학적 개념 지도의 어려움을 경감시킬 수 있는 방안에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 컴퓨터의 여러 기능 중에서 시각화 기능은 추상적인 수학적 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라, 학생들도 컴퓨터

---

* 2002년 7월 투고, 2002년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : C34
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 기하교육, 탐구형 소프트웨어, 질적연구, 수학적 연결성, 개념형성.

의 기능을 직접 통제하면서 직접적인 경험을 할 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 줄 수 있다. 개념 형성이나 대수적인 형식적 추론 · 증명의 전 단계에서 컴퓨터를 이용한 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션 등과 같은 직관적인 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시켜 줄 수 있다. 또한 단순한 계산이나 절차 위주의 교육에서 논리적인 사고력을 증진시켜 줄 수 있는 교육으로 한 단계 발전할 수 있게 해 준다.

그러나 우리나라 학교 교육에서 특히, 고등학교에서 컴퓨터를 이용하여 수학 교수-학습을 한다는 것은 과도한 입시 위주의 교육과 대치되어 현실적으로 많은 어려움이 있다. 물론 컴퓨터 활용에 관한 현장 교사의 지식과 경험의 부족, 컴퓨터와 교육용 소프트웨어의 구입에 필요한 예산이 충분하지 않은 것 등도 이유가 될 수 있다.

2. 연구의 목적

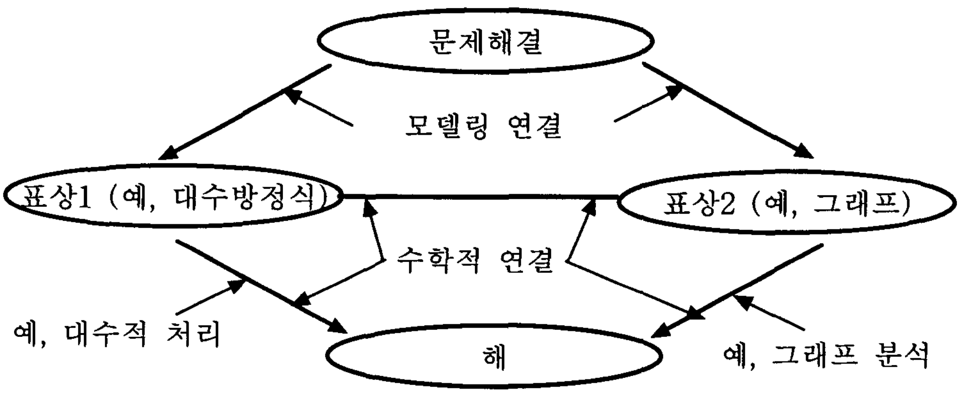
본 연구는 세 명의 고등학생들이 탐구형 소프트웨어를 활용하여 공통 수학, 수학II에서의 해석 기하(도형의 방정식, 이차곡선)를 학습 할 때 대수적인 식만을 이용하여 학습하는 것과 비교하여 기하학적 개념 형성과 기하 문제 해결 능력의 향상에 어떤 도움을 주는지, 그리고 기하학적 직관력과 추론 능력을 향상시키고 기하에 대한 긍정적인 태도를 갖게 하는데 어떤 도움을 주는지를 알아보는데 그 목적이 있다. 본 연구에서 사용하는 연구방법은 질적 연구방법으로 연구의 결과를 일반화하는데 관심이 있는 것이 아니고, 이 사례연구를 통해서 각각의 상황을 분석하여 이해하고 이를 통하여 통찰력을 얻는데 목적이 있다.

3.. 이론적 배경

수학 교육학자들은 수학 교수-학습 과정에서 보이지 않는 추상적인 수학적 개념을 직접 볼 수 있도록 어떤 형태로 만들어 제공하는 것은 수학을 효과적으로 학습하도록 도움을 준다고 믿었기 때문에 수학적 개념의 시각적인 표현에 대하여 관심을 가졌다. 또한 수학 이외의 다른 학습에서도 시각화는 학습에 결정적인 영향을 미친다고 하였다(Dwyer, 1978). 시각적 이미지는 수학적인 모델과 실제 현상 사이의 중요한 연결 고리의 역할을 한다. 시각화에 대한 일반적인 관점은 복잡하고 추상적인 수학적인 아이디어를 시각화를 통해서 쉽게 도입할 수 있으며 시각화된 수학적 아이디어에 대한 구체적이고 직관적인 조작은 그러한 아이디어의 학습을 도와준다는 것이다(이종영, 1999).

NCTM(1989)에서도 실제 세계 또는 수학 이외의 다른 학문에서 제기되는 문제 상황과 그것의 수학적 표상 사이의 모델링 연결(modeling connection)과 두 동치 표상 사이와 각각에서의 과정들 사이의 수학적 연결(mathematical connection)의 중요성을 강조하고 있다(<그림 1> 참조).

같은 문제 상황이나 수학적 개념의 서로 다른 표상 사이를 번안할 수 있는 학생들은 문제 해결을 강력한 도구를 지니고 있는 것이고 또한 수학의 일관성을 더욱 깊



<그림 1> 연결성의 두 가지 일반적 형태

이 음미할 수 있다

비형식적인 탐구의 효과는 학생들로 하여금 비형식적인 활동과 그 활동이 전달하고자 하는 수학적 아이디어 사이의 깊은 관련을 인식할 수 있는 정도에 달려 있다. 예를 들어, 탐구적인 기하 작도는 학생들이 자와 컴퍼스를 사용하는 절차와 그 절차의 형식적인 유추 사이의 관계를 파악할 수 있을 때 형식적인 기하학적 개념을 이해하는 데 도움이 된다.

시각화가 수학 교육에 미치는 영향을 정리해 보면 첫째, 뛰어난 수학자들도 시각적 이미지에 의존한다는 것이고, 둘째, 그 동안 수학 교육에서 시각적인 추론을 소홀히 하였으나, 다양한 영상 매체 속에서 자라는 아이들은 언어적 문자 정보보다 시각적 이미지를 통한 정보에 더욱 친숙하게 느낀다는 것이고, 셋째, 시각적 이미지가 학생들의 수학 학습을 도와준다는 것이다.

컴퓨터의 발달은 수학 교육에서 시각화 할 수 있는 범위를 크게 확장시키고 있으며, 수학 교실에서 컴퓨터의 존재는 시각화와 관련하여 수학 교육 분야의 새로운 연구 영역을 자극하고 있다. 수학 학습이 학생들 자신의 자발적인 구성과 탐구를 통해 이루어진다는 구성주의적 입장에서 볼 때, 학생 스스로 조작해 가면서 수학적 내용을 추론할 수 있는 컴퓨터 소프트웨어의 시각적 자료는 중요한 수학 학습 도구가 된다. 이에 관하여 류희찬(1998)은 다음과 같이 주장하고 있다.

> 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통하여 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히, 형식적인 개념 학습을 하기 전에 그래픽이나 애니매이션, 시뮬레이션을 통한 학생들의 자기 주도적인 직관적 탐구적 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다(p.33).

3. 연구 문제

본 연구의 목적은 고등학교 해석 기하 부분을 학습할 때 탐구형 소프트웨어를 사용하는 것이 전통적인 대수적 접근 방법보다 수학적인 개념 형성에 어느 정도 도움을 줄 수 있는지 알아보는데 있다. 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다.

1) 학생들이 도형의 방정식, 이차곡선에 관한 문제를 해결할 때 기하적인 접근 과정과 대수적인 접근 과정 사이의 수학적 연결성을 어느 정도 발견할 수 있고 이해할 수 있는가?

2) 탐구형 소프트웨어를 활용한 탐구 학습 과정에서 학생들이 직면하게 되는 어려움은 어떤 것이 있는가?

3) 연구자가 순서대로 제시한 탐구형 소프트웨어를 활용한 작도는 학생들이 수학적 개념을 이해하는데 어느 정도 도움이 되는가?

4) 탐구형 소프트웨어의 특성이 학생들의 해석 기하 영역의 개념 형성에 어떤 영향을 주는가?

5) 대수식이 의미하는 개념에 대한 이미지는 어느 정도 형성되어 있는가?

Ⅱ. 관련된 연구

현재 중학교 1학년에서의 직관 기하는 2학년과 3학년에서 배우게 되는 평면 논증 기하를 위한 수단으로 다루어지고 있다. 평면 논증 기하는 연역적 체계의 재발견 과정이 생략된 채, 추상화되고 형식화된 증명 자체를 암기하도록 강요한다. 따라서 학생들은 기하학은 뛰어난 사람만이 할 수 있는 학문이라는 인식을 하게 되고, 현실과 전혀 별개인 증명 위주의 학문이라는 잘못된 인식을 갖게 된다. 그리고 이러한 교육을 받은 학생들이 고등학교에 올라와서 해석 기하를 접하게 된다. 해석 기하는 대수적인 식을 이용하여 개념을 설명하고 원리를 이해시키려고 하며 이에 관한 계산 능력만을 요구한다. 결국 학생들은 단순한 계산식을 이용한 문제 풀이에 급급하게 된다. 따라서 학교 수학에서 기하 과목은 그 중요성에도 불구하고 가장 어렵고 흥미 없으며 부담스러운 과목으로 인식된다.

이러한 문제점을 개선하기 위해서는 형식 기하의 연역적 증명 활동과 더불어 가설을 설정하고 추측하고 탐구하는 비형식적인 활동도 병행되어야 한다. 이러한 활동은 통합되어서 균형 있게 실시되어야 하고, 그러한 활동을 통해서 학생들이 스스로 발견하는 귀납적인 활동이 연역적 증명의 과정에 앞서 강조되어야 한다(류희찬 외,

1999). 그러나 지필 환경에서는 이와 같은 귀납적인 활동을 하는데 방법적으로 한계가 있다. 이를 극복하기 위해서 다양한 활동과 새로운 문제를 제시하여 기하 교육을 의미 있고 흥미 있는 과목으로 만들어야 하는데, 시행 가능한 방법 중 하나가 컴퓨터의 활용이다(신동선 · 류희찬, 1998). 특히, 탐구형 소프트웨어는 유클리드 기하학을 학습하는 데 학생들이 보다 적극적으로 참여하도록 유도하고, 기하학적 지식을 형성해 나가는데 있어서 귀납적 접근 방법을 제공한다.

이정열(1999)은 GSP(Geometer's Sketchpad)를 활용하여 중학교 평면 기하에 관한 기하 학습 자료를 개발하여 수업에 이용하였을 때 효과가 있었다고 발표하였다. 또한 이와 같은 GSP를 활용한 학습 자료를 성취 수준별 집단의 특성에 맞게 적용하면 평면도형에 대한 어려움을 완화시켜 주고 기하 학습에 흥미를 갖게 하여 수학적 소양을 기르는 데 도움을 줄 수 있다고 주장했다.

전영국과 주미(1998)는 기하 문제 해결에서 GSP를 활용한 새로운 탐구 학습 모델을 제시하는 데 있어서 기존의 교육과정과 맞지 않는 부분이 많기 때문에 기존의 교육과정에 따라 탐구형 소프트웨어를 활용할 경우 해결해야 할 문제점이 많다고 지적하였다. 또한 소프트웨어를 활용하게 되면 현행 교과서에서 다루는 많은 문제들이 쓸모 없게 되고 지필 환경에서는 다루어지기 어려운 다양한 탐구 활동과 추론에 관한 문제들을 접해 볼 수 있게 된다. 그러므로 기하 영역에서 교육과정의 구성 자체가 연구의 대상이 되고 있다. 국내에서도 컴퓨터의 활용이 통합된 수학 교육 과정의 개발이 필수적이며 현행 수학 교육 과정의 내용들이 대폭 정선될 필요가 있고 컴퓨터를 활용함으로써 불필요한 내용, 강화될 내용, 약화될 내용에 대한 체계적인 논의가 시급히 이루어져야 함을 강조하고 있다(류희찬 · 이기석 · 정보나, 1999).

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 대상자

본 연구의 연구대상자로 대도시에 위치하고 있는 인문계 고등학교 자연 계열 3학년 학생 3명이 선정되었는데 선정 기준은 수학적인 수준이었다. 질적 연구에서는 연구대상자를 목적을 가지고 선발한다(Merriam, 1988). 다시 말하면, 연구문제에 대한 가장 적절한 답을 말해줄 수 있는 대상자를 찾는 것이다. 본 연구는 질적 연구방법을 사용했으므로 목적 상 연구 대상자는 1, 2학년 때의 수학 성적이 상위권인 학생들을 의도적으로 선발했다. 그 이유는 수학적인 수준이 낮은 학생은 대수적인 접근도 쉽게 할 수 없는 상황이므로, 탐구형 소프트웨어를 사용하는 것이 전통적인 대수적 접근 방법보다 수학적인 개념 형성에 어느 정도 도움을 줄 수 있는지를 알아보는 데 적절하지 않을 수 있기 때문이다. A 학생은 수학 성적 뿐 만 아니라 전 교과목에서 최 상위권의 성적을 나타냈다. 교내 수학 경시반에서 적극적으로 활동하고 있으며, 대학에서 수학을 전공할 것을 고려하고 있다. B 학생은 물리 분야에 관심이 많고 수학적 사고력이 뛰어나다. 특히 수학 퍼즐과 같이 수학적 논리력과 기발한 아이디어에 관심이 많다. C학생은 1학년 때까지는 다소 성적이 부진했으나, 2학년 때부터 수학을 비롯한 교과목 전반에 걸쳐 성적이 많이 향상되었다. 이 학생은 성격이 차분하고 문제를 진지하게 접근하는 경향이 있으며, 열심히 하는 노력형의 학생이다.

2. 연구 절차

본 연구에서는 연구 문제에 대한 결과를 얻기 위해서 반 구조화된 면접 방법을 사용했으며, 학생들이 지필 과제를 해결하는 과정과 탐구형 소프트웨어를 통한 탐구 활동과 문제 해결 과정을 관찰했다. 1월 중순경에 연구 대상자를 선발하였으며 그 기준은 지난 2년 동안에 학생들의 학습 태도, 수학에 관한 논리적 사고력, 수학 성적이었다. 이러한 자료는 전학년 학급 담임교사와 수학 담당 교사 그리고 각종 학생 관련 서류 등을 통해서 수집할 수 있었다. 겨울방학이 끝난 후에 연구 대상자 3명을 1차 소집하여 연구 전반에 걸친 사항에 대해서 알려주었다. 새 학년이 시작되는 3월 초부터 매주 수요일 방과 후 1시간씩 교내 컴퓨터 실습실에서 GSP의 기본적인 활용법에 대한 교육을 3회 실시하였다.

4월 4일 오후 5시부터 6시 30분까지 약 90분 동안 3명의 학생을 대상으로 지필 과제 테스트를 실시하였다. 지필 과제는 고등학교 공통수학과 수학Ⅱ에서 해석기하 단원인 도형의 방정식과 이차곡선에 관한 6문제를 제시하였다(지필 과제 문제는 부록 참조). 이 문제들은 대부

분 도형과 곡선의 정의에 관한 개념을 이용하여 해결하는 문제였다. 학생들이 문제를 해결하는 과정 중간에 개별적인 질문을 통해서 학생들이 이끌어 낸 결과에 대한 생각을 알아보았으며 그 내용은 녹음하였다.

4월 11일 오후 5시부터 6시 30분까지 약 90분 동안 연구 대상자 3명을 대상으로 컴퓨터실에서 지난번 지필 과제와 동일한 문제를 GSP를 이용하여 해결해 가는 과정을 비디오로 녹화하였다. 그 후 연구 대상자 각각에 대해서 마지막으로 개별적인 면담을 실시하였고, 이 내용도 녹음하였다.

Ⅳ. 연구결과

본 연구의 결과는 학생들이 주어진 과제를 해결하는 과정에서 이루어지는 활동과 반응을 관찰한 결과로 다음과 같다.

1. 학생들이 도형의 방정식, 이차곡선에 관한 문제를 해결할 때 기하적인 접근 과정과 대수적인 접근 과정 사이의 수학적 연결성을 어느 정도 발견할 수 있고 이해할 수 있는가?

학생들이 도형의 방정식과 이차곡선에 관한 문제를 해결할 때 기하적인 접근 방법과 대수적인 접근 방법을 모두 사용하도록 지시하였다. 그 후에 그들이 생각하는 두 방법의 차이나 연관성, 그리고 그 과정에서 발생하는 사고의 변화를 알아보았다.

1) 기하적인 접근 방법

탐구형 소프트웨어를 사용하기 전 도형의 방정식과 이차곡선의 개념에 관련된 자취 방정식에 관한 문제를 처음 접했을 때 세 명의 학생들 모두 그림을 먼저 그리면서 동점의 자취를 추측해 보았다.

A학생은 동점이 움직이는 경로를 일단 머리 속으로 생각을 하였다. 그런데 그것이 여의치 않게 되자 그림을 그리기 시작했다. 한편 B학생과 C학생은 문제를 읽자마자 그림을 그리면서 추론을 시작했다.

[연구자] 지필로 도형의 방정식과 이차곡선 문제를 해결하는 과정에서 이를 추측하기 위해서 어떤 방법을 사용했니?
[A 학생] 저는 이차곡선 부분에서 단순하게 동점이 움직이는 경로가 어떤 모양이 될까 머리 속으로 생각했는데요.
[연구자] 주어진 문제가 주는 자료나 힌트를 활용하지 않았다는 이야기인가? 문제에서 "중점 P가 움직인다", "선분의 길이가 변화가 없다." 등의 조건을 이용하지 않았다는 이야기냐?
[A 학생] 그게 아니라, "일정한 길이는 이렇게 변할 것이다. 중점은 이렇게 움직일 것이다" 와 같이 단순하게 그림만을 가지고 생각했어요.

[B 학생] 주로 손으로 그림을 직접 그려가면서 추측을 했습니다.

[C 학생] 처음에는 그림을 그려서 추측을 했어요.

2) 대수적인 접근 방법

A학생은 문제를 해결하기 위해서 대수적인 접근 방법을 사용할 때 관계식을 두 개 세우고, 그 관계식간의 관계를 정리해야 하는데 그 과정이 어려웠다고 했다. B학생은 대수적인 식이 너무 복잡하게 나와서 이를 정리하기가 어려웠다고 했고, C학생은 도형의 방정식과 이차곡선에 대한 전체적인 내용을 많이 잊었기 때문에 추측 과정에서 그림이 정확하게 그려지지 않았고, 대수적으로 문제를 해결하기가 어려웠다고 하였다. 일부 문제에서는 A, B, C 세 학생 모두가 정확한 답을 내는데는 실패하였다.

[연구자] 식을 이용해서 문제를 풀 때 어려운 점은 없었니?
[A 학생] 제 생각은, 음. 자취의 방정식을 구하는데 있어서 저는 아직까지도 식을 많이 사용하기 때문에 동점을 x, y라고 하면 식이 두 개가 나와야 된다고 생각을 해요. 판에 박혀있는 방법일 수도 있는데, 꼭 그렇게 하거든요. 그런데 이번 문제는 거의 대부분 식을 하나밖에 세울 수 없어서 다른 하나의 식을 찾으려고 노력했는데 그게 잘 안돼서 어려웠어요.

[B 학생] 식이 복잡해서 정리하는데 상당히 힘들었어요.

[C 학생] (힘없는 목소리로) 첫 번째에서 도형이 확실하게 안 나오면 아래 문제를 해결하기가 어려웠어요. 그리고 앞에서 내가 제대로 추측했나 하는 의문이 많이 들어서 힘들었어요.
[연구자] 처음에 그림이 정확하게 생각이 된다면, 문제를 해결하기 쉽다는 이야기 같은데, 그렇다면 너는 식보다 그림을 더 믿는다는 이야기이니?
[C 학생] 아니, 그런 것은 아닌데요. 원래는 식으로 해야 되는데 그렇게 하면 시간도 오래 걸리니까 우선 그림을 이용해서 간단한 것은 해결하고, 그리고 복잡한 문제들은 식을 적용해서

여러 가지 도형의 정의를 생각해서 풀어봐야지요.
[연구자] 그러면 지난 번에는 어떻게 했지?
[C 학생] 지난 번에는 경황이 없어서 추측해 보다가 답이 안 나오면 다음 문제로 넘어가고 해서 제대로 풀지 못 했어요.

3) 기하적인 접근과 대수적인 접근 사이의 연관성

A학생은 기하 문제를 그림을 사용하여 해결하는 것에 대해서 부정적이라고 하였는데, 그 이유는 기하적인 그림이 정확하게 그려지지 않으면 엉뚱한 결과가 나오기 때문이라고 하였다. 따라서 이 학생은 그림보다는 대수적인 식을 더 신뢰하는 것으로 나타났다. 문제를 해결할 때 먼저 도형의 방정식과 이차곡선에 대한 개념의 원리를 이용하여 대수적인 접근을 시도하고, 그 방법이 여의치 않을 때 마지막으로 그림을 그려본다고 하였다.

B학생은 도형의 방정식이나 이차곡선에 관한 문제를 해결할 때 우선 기하적인 접근으로 해결하려고 시도하고, 이 방법으로 해결 할 수 없으면 대수적인 접근을 시도한다고 하였다. 또한 시간이 충분할 경우에는 두 가지 방법을 모두 사용한다고 하였다. B학생은 기하적인 접근과 대수적인 접근에서 결과에 차이가 있으면 대수적인 접근과정을 다시 검토하고 이상이 없으면 그림을 이용한 추측이 틀린 것으로 간주한다고 하였다. 이 학생 역시 대수적인 접근에 의해서 나온 결과를 더 신뢰했다.

C학생은 기하문제 해결을 위해서 먼저 기하적인 접근을 한다고 하였다. 정확히 그린 도형에서 나온 식이라면 그 식을 신뢰할 수 있지만 그렇지 않으면 신뢰할 수 없다고 하였다. 그러나 GSP를 이용한 작도 결과에 대해서는 신뢰한다고 하였고, 그 이유는 컴퓨터를 이용했기 때문이라고 하였으며 B학생도 같은 생각을 하고 있었다.

[A 학생] 저는 수학 문제를 풀 때 그림을 사용해서 나온 것을 안 믿거든요. 시험 문제에서도 예를 들면 삼각형에서 한 각이 실제로 재면 45도 정도인데 30도라고 하는 경우가 있잖아요. 저는 제가 직접 그린 그림일지라도 저는 별로 신빙성이 없다고 생각하는데 이번 문제의 경우에는 아무 생각이 안 들어서 거의 마지막 보루라고 생각하면서 이용했거든요. 제가 생각해도 이것은 너무 타당하지 않다고 생각이 들거든요.
[연구자] 그런데 그림에 논리적인 모순이 없다면 타당하지 않을까?
[A 학생] 컴퓨터는 모순이 없겠죠. 인간이잖아요. 사람인데.
[연구자] 그런데, 예를 들면 피타고라스의 정리를 증명하는데 있어서 그림을 정확하게 안 그려도 논리적으로 설명이 가능하잖아. 중점 연결 정리도 논리적으로 증명을 하잖아. 삼각형의 무게중심, 내심, 외심 등에서도 그림을 대충 그려도 논리적으로 설명을 하잖아. (잠시 침묵) 중학교에서 배운 평면도형에 관한 문제에서 그림이 조금 엉터리라고 하더라도 논리적으로 설명을 하면서 답을 찾아가잖아.
[A 학생] 예, 그런데 그것은 기본적인 것을 알고 시작하는 것인데 이것은 그냥 자취를 찾는 것이잖아요. 자기가 그려서, 한마디로 정확하게 그린 사람은 맞추겠지요. 하지만 조금만 잘못 그려도 엉뚱하게 나오잖아요.
[연구자] 그럼 결국엔 그림보다는 대수적인 식에 더욱 믿음을 가지고 있다는 이야기인가?
[A 학생] 예.
[연구자] 아까 평면도형에 관한 문제에서는 기본적인 지식이 있으니까 그림을 대충 그려도 된다고 했었지. (학생: 예) 그렇다면 문제에서 등장하는 직선, 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 등의 개념을 가지고 있다면 그 원리를 한 번쯤 사용해 보았어야 하는 게 아닌가? 지나치게 그림에 의존했던 것은 아닌가?
[A 학생] 아하, 사실 처음에 추측할 때는 타원은 두 초점에서의 거리의 합이 일정하고, 쌍곡선은 두 초점에서의 거리의 차가 일정 등 이런 것을 이용해 보려고 했었는데, 그림에서 발견 할 수 가 없었어요. 그림을 그려보는 것은 마지막에 사용한 방법이거든요. 그때는 워낙에 다른 것이 생각이 나지 않았어요.
[연구자] 여하튼 그 원리들을 적용해 보려면 그림을 그려보아야 하지 않나?
[A 학생] 저는 사실 수학에서 그림을 사용하는 것에 대하여 부정적으로 생각을 합니다. 충분한 시간을 준 후에 자와 컴퍼스 등을 사용하면 모를까.

2. 탐구형 소프트웨어를 활용한 탐구 학습 과정에서 학생들이 직면하게 되는 어려움은 어떤 것이 있는가?

세 명의 학생들은 모두 GSP의 사용법에 대해서는 큰 어려움을 느끼지 않는 것 같았다. B학생은 작도 과정 자체가 각각의 단계에서 기하적인 정의와 개념을 이용하는 것 같았는데, 왜 그런 식으로 해야 하는지가 잘 이해되지 않아서 어려웠다고 하였다. C학생은 먼저 프로그램에 익숙하지 못해서 어렵다고 하였다. 또한 GSP는 도형의 개념과 원리를 가지고 작도하는 것인데, 개념과 원리에 대한 이해가 부족해서 어려움을 느꼈다고 하였다. 이것은 B학생의 경우도 마찬가지였다.

[연구자] 그렇다면 컴퓨터를 가지고 과제를 해결했을 때 어려웠던 점은?

[B 학생] 일단은 작도과정 자체가 잘 이해가 안되어서 그것 자체를 이해하는 데에도 힘들었고, 그리는 것은 그냥 제시된 순서대로 하기 때문에 힘들지 않았어요. 하지만 그 작도 과정대로 하면 왜 그렇게 나오는지, 왜 이런 작도 방법을 사용하는지를 이해하는 것이 어려웠어요.
[연구자] 그것은 GSP의 사용법에 관련된 문제가 아닌가?
[B 학생] 그렇다고 말씀드리기 어려운 게요, 작도 과정 자체가 각각의 단계에서 기하적인 정의와 개념이 꼬리에 꼬리를 물고 사용된 것이기 때문에 어느 한 단계에서 왜 그런 정의가 나오고, 정리가 나오는지에 대한 이해가 부족하고 구멍이 생기면 그 다음부터 문제와 답이 이어지지 않는 것이잖아요.
[연구자] 뭔가 잘못되었다면 금방 수정이 가능하지 않은가? 작도법을 정확히 안다면.
[B 학생] 그렇죠. 그런 것은 있겠죠. 작도법을 안다는 것 자체가 힘드니까 문제죠.
[연구자] 많은 연습을 하지 않았기 때문에 힘들었던 것은 아닌가? 선생님이 생각할 때, 몇 시간만 투자하면 너희들은 충분한 능력이 있기 때문에 그렇게 작도법이 어려운 것은 아니라고 생각이 드는데.
[B 학생] 작도법이 어렵다는 것은 그리는 것이 어렵다는 것이 아니고 왜 그런 식으로 작도하는지를 이해하기가 어렵다는 것 이예요. 작도는 할 수 있는데요, 왜 이런 작도를 하면 그런 결과가 나오는지를 이해하기가 어려워요. 예를 들면, 지필 과제에서 자취를 구하면 무슨 도형이 나올까라는 문제에서 제시된 작도 과정대로 했더니 원이 나왔거든요 그래서 답이 원이라고 하면. 그런데 왜 이 문제에서 이런 과정을 사용하면 원이 나오는지를 이해하지 못한다는 것입니다.

[C 학생] 먼저 그 프로그램에 익숙하지 않았고, 두 번째는 GSP가 아무래도 도형의 개념의 원리를 이용하는 것이잖아요, 하나 하나 도형의 개념을 확실하게 모르기 때문에 그 개념을 이용하면서 그림을 그린다는 것이 좀 어려웠어요. 그러나 도움은 많이 된다고 생각을 해요, 그것을 하면 한 점에서 같은 거리에 있는 집합이 원이라는 것을 정확하게 알 수가 있었고, 수직 이등분선 이런 것 같은 정의도 정확히 알 수 있었고, 게다가 영어로 되어 있었기 때문에 영어 실력까지 늘 수 있었어요.(하하하)

3. 연구자가 순서대로 제시한 탐구형 소프트웨어를 활용한 작도는 학생들이 수학적 개념을 이해하는데 어느 정도 도움이 되는가?

1) GSP를 사용해 본 느낌

A학생은 GSP를 사용해 본 느낌으로 이것은 사람의 머리로는 도저히 표현할 수 없는 것이라고 하며 신기해 하였고, B학생은 컴퓨터를 이용하여 수학을 한다는 것이 생소했는데 원하는 결과가 나오니까 재미있었다고 하였다. C학생은 지필 과정에서 무척이나 고생했던 문제들, 특히 머리 속으로 구상하기 어려웠던 결과를 GSP가 확실하게 보여주니까 그 결과에 대한 확신을 가질 수 있었고, 화면상에 cm까지 나오니까 점이 이동하면서 길이가 변화하는 등 GSP의 특성을 발견하고 재미있었다고 하였다. 세 명의 학생들은 모두 GSP를 이용한 탐구 과정 내내 화면상의 결과에 대해서 신기함과 놀라움을 금치 못하였다.

[연구자] 그렇다면, GSP를 이용하여 작도한 후에 생기는 결과에 대해서는 신뢰할 수 있었니?
[A 학생] 예. (연구자: 왜?) 보이니까요.
[연구자] 그래. 그때 GSP를 사용해 보니까 느낌이 어땠니?
[A 학생] 저는 그때 이것은 사람의 머리로는 도저히 표현할 수 없는 것이라고 표현을 했었지요. 정말 신기했어요. 제가 풀지 못했던 문제를 주어진 작도 과정을 이용하여 작도한 후에 animate를 이용했더니 도형이 나오더라구요.

[B 학생] 전체적으로 상당히 재미있었어요. 이것을 사용하는 자체가요. 컴퓨터로 수학을 한다는 과정이 생소했는데요, 일단 맞아떨어지니까, 음, 원했던 결과가 나오고 하니까 상당히 재미있었고, 계속적으로 말씀드린 것처럼 너무 그림 그리는데 급급해서 과정에 대한 이해가 부족했던 것이 아닌가 싶은데요. 작도 과정에서 단순히 과정을 따라하기에 급급해서 이 과정을 어떻게 하면 실행 할 수 있을까 하는 생각밖에 안 하지, 이 과정을 하면 왜 그런 답이 나올까 하는 생각은 별로 안 해봤거든요. 그림을 그리면서도. 그런 것만 보완이 되었다면 머리 속에 개념이 확실하게 형성되었을 것 같습니다.

[연구자] 그래, 그럼. 지난번에 GSP를 이용하여 작도한 후에 생긴 결과에 대해서는 신뢰할 수 있었니?
[C 학생] 예, 그것은 컴퓨터를 이용해서 나온 결과이기 때문에 신뢰할 수 있다고 생각이 되는데요.

2) 작도 과정을 이해한다면 수학적 개념 형성에 도움을 준다.

작도 과정을 이해한다면 수학적 개념 형성에 도움이 된다는 것이 세 명의 공통된 의견이었다. A학생은 일방적인 작도 과정의 제시는 수학적 개념 형성에 도움을 주지 않는다고 하였고, B학생은 시각적인 효과가 주는 장점으로 인해 수학적 개념 형성에 도움을 주었다고 하였다. C학생은 전에는 머리 속에서 추상적으로 생각했었는

데 실제로 보여주기 때문에 이해가 빨랐다고 하였다. 작도 과정을 이해한다면 수학적 개념 형성에 도움이 된다는 것이 세 명의 공통된 의견이었다.

[연구자] 지난번 탐구 과정에서 대부분의 학생들이 왜 이렇게 작도해야 되는지의 이유를 발견하지 못하는 것 같더라?
[A 학생] 작도 과정에서 타원의 개념이 이렇게 이용되었다고 알려주면 이해하는데 도움이 되었을 것 같습니다. 그 과정의 제시만으로는 이해하기가 힘들 것 같습니다.
[연구자] 선생님이 제시한 순서대로 GSP를 이용한 작도만으로는 수학적 개념을 이해하는데는….
[A 학생] 너무 어려워요.

[연구자] 선생님이 제시한 순서대로 GSP를 이용하여 작도할 때, 작도 과정을 이해한다면 수학적인 개념을 이해하는데 어느 정도 도움이 될까?
[B 학생] 도움이 되겠지요. 특히, 저 같은 경우에는 지금도 기억에 남거든요. 그때 동점이 어떻게 움직였는지요, 그렇게 계속해서 기억이 오래 남으니까요. 직접 지필로 풀어 보는 것보다 눈으로 보는 것이 더 오래 남겠죠. 그런 효과가 있겠지요.

[C 학생] 많이 되었다고 보는데요.
[연구자] 어떤 점에서
[C 학생] GSP에서는 원을 그리는데 있어서 정의를 이용해서 그리고 있잖아요. 그리고 원 밖의 한 점에서 원에 접선을 그을 때 접선이 두 개 나온다는 것이 전에는 머리 속에서 추상적으로 생각했었는데 실제로 직접 보이기 때문에 이해가 빨라진다고 생각합니다.

4. 탐구형 소프트웨어의 특성이 학생들의 해석기하 영역의 개념 형성에 어떤 영향을 주는가?

GSP를 이용한 작도 과정을 관찰 및 녹화하여 분석한 결과에 의하면 세 학생 모두 수학적인 내용에 대한 관심보다는 애니메이션, 화면 크기 조정, 동점이 움직이는 속도가 달라지는 이유, 배경 화면을 바꾸는 방법등 컴퓨터의 특성에 관련된 내용에 더 많은 관심을 보였다.

▶ GSP를 이용한 작도 과정 비디오 녹화

[A 학생] (막대의 변화를 보면서)천천히 돌릴 수는 없나요(막대의 변화)
[A 학생] (신기하다는 표정을 지으면서) 사람의 머리로는 절대로 못 풀 것 같아요. 어떻게 생각을 할 까?
[C 학생] 이것을 조금 크게 펼치려면 어떻게 해야 하나요?
[연구자] 점을 고정했기 때문에 확대가 안 돼지, 좌표축의 단위를 늘이고 줄여 봐라.

[A 학생] 에~. 아 화려했어요.
관찰 : 큰 웃음을 지으면서 A학생과 B학생은 서로 하이파이브를 한다.

[A 학생] 움직이는 속도가 달라지는 이유는 무엇인가요? 올라갈 때와 내려갈 때.
[연구자] 컴퓨터 그래픽 상의 문제이지.
[B 학생] 배경화면을 다르게 깔 수 없나요.
관찰 : 선 굵기 색깔은 이미 변경하여 사용하고 있음. 여전히 C 학생은 신기해서 몸둘 바를 모르고 있다. 새로운 것을 발견하고는 서로에게 알려주는 모습. 하지만 아직까지도 수학적인 내용에 대한 것보다는 프로그램 작도 원리에 관한 의견 교환일 뿐이다.

세 명의 학생들은 수업시간에 GSP를 사용할 때 교사가 일방적으로 보여주는 것은 전혀 학생들에게 도움이 되지 않는다고 하였다. A학생은 몇 해 전부터 도입한 파워포인트를 이용한 수업의 문제점까지 지적하면서 학생들이 개인적으로 컴퓨터를 사용 할 수 있다면 도움이 되지만 교사가 시범만 보이는 수업은 전혀 도움이 되지 않는다고 생각했다.

B학생은 GSP를 활용하여 도형을 작도하면서 지침에 제시되어 있는 순서와 방법으로 작도해야 하는 이유를 이해한다면 도움이 되지만, 이를 이해하지 못하고 어떤 결과를 얻었다면 이것은 별로 도움이 되지 않을 것이라고 했다. 하지만, GSP를 사용하는 장점으로는 직접 보고 확인 할 수 있다는 것과 계산의 오류가 없다는 것을 지적했다. 작도과정을 정확하게 설명해 주면 굳이 컴퓨터를 사용할 필요가 없지 않느냐고 반문도 했지만, 연구자가 이 소프트웨어의 동적인 기능에 대해서 상기시켰을 때 GSP를 활용하는 것이 수학적 개념 형성에 도움이 된다는 데 동의했다. B학생은 지필 과정으로부터 얻은 결과와 GSP를 이용해서 얻은 결과가 다르게 나온 것이 몇 개 있었다. 이 학생은 이를 통해서 주어진 문제를 대수적인 방법으로 풀려면 개념을 정확하게 알아야 하는데 그것이 부족하다는 것을 느꼈다고 하였다.

C학생은 현재 이루어지고 있는 전형적인 수업은 학생들이 수학적 개념의 관계를 머리 속으로 상상하여 형상

화하는 것에 중점을 두고 있고 교사가 칠판에 그리는 그림도 정확하지 않지만, 이 소프트웨어는 길이를 정확하게 나타내면서 정확한 그림을 보여주기 때문에 도형에 대한 이해를 쉽게 할 수 있다고 하였다. 현행 고등학교 수업에 탐구형 소프트웨어를 적용하는 방법으로는 고등학교 1학년 때부터 별도로 수업 시간을 확보하여 도형의 원리를 이용하여 작도하는 과정을 통하여 도형에 대한 정확한 정의와 특성을 이해한 후, 고3 과정이 되면 이해하고 있는 특성을 활용하여 답을 찾아내는 것이 이상적이라고 하였다.

B학생은 아직까지는 학생들이 학교 수업에서 컴퓨터를 활용하는 것이 새로운 것이므로 컴퓨터를 활용하면 집중력이 높아질 것으로 예상했고, 학생들이 컴퓨터를 직접 다룰 수 있는 환경에서 적절한 통제가 이루어진다면 자신도 모르는 사이에 어떤 도형의 특성을 익힐 수 있으며 수학능력 시험에도 도움이 될 것으로 믿고 있었다.

[연구자] GSP는 좀 다르지 않니? 너희가 직접 활용하잖아.
[A 학생] 아 그럼, 수업에 이용한다는 것이 학생들에게 개인 컴퓨터를 다 주고 한다는 것인가요?
[연구자] 그렇지.
[A 학생] 자기가 직접 한다면, 선을 그린다든지 이렇게 한다면 도움이 되지만, 마냥 보고만 하는 수업은 절대 도움이 되지 않는다고 생각하는데요.
[연구자] 본인이 직접 해 봐야 한다.
[A 학생] 예, 먹여주는 것은 수학에서는 별로 …

....

[연구자] 그렇다면 GSP와 같은 탐구형 소프트웨어를 수업시간에 이용하면 도형의 방정식이나 이차곡선에 대한 개념 형성에 도움을 줄 수 있을까?
[B 학생] 힘들 것이라고 생각이 됩니다.
[연구자] 이유는?
[B 학생] 지난번 탐구 과정에서는 작도 과정이 다 제시되었잖아요. 그래서 과정대로 똑같이 했으면 되는데요. 그런데 수업시간에 활용한다는 것 자체는 문제가 주어지면 그 문제의 조건에 맞게 자기가 스스로 만들어야 되는데, 그런 과정 자체가 어떤 식을 세워야 하는 것이기 때문에 정의 같은 것을 많이 이용해야 하는데, 그런 것 자체를 하기가 어려울 것 같습니다. 정의 같은 것을 이용해서 프로그램을 짜는 것 자체가.

....

[연구자] GSP를 수업 시간에 이용한다면 도형의 방정식이나 이차곡선에 대한 개념을 형성하는데 도움이 될 것 같니?
[C 학생] 예, 그럴 것 같은데요. (연구자: 왜) 교실에서 수업하는 것은 머리 속에서 다 상상을 해야 하니까 막연하잖아요. 그리고 선생님이 칠판에 그림을 그리시는 것도 확실하게 신뢰가 안 되는데, 컴퓨터는 길이를 완벽하게 나타내면서 도형을 나타내기 때문에 그 도형에 대한 확실한 이해가 될 것 같은데요.

[연구자] 그렇다면 수업 시간에 GSP를 사용하는 것에 대해서 어떻게 생각하니? 또 사용한다면 어느 영역에서 사용하면 좋겠니?
[C 학생] 그럼, 이것은 수학에서 사용하는 것이 가장 알맞다고 생각되고, 수업 시간에 사용한다면 물론 좋지만 시간상으로 어렵잖아요. 따로 시간을 확보해서 고등학교 1학년 때부터 수업시간에 도형의 원리를 이용하여 하나하나 그려보는 시간을 가져서 자기가 도형에 대한 확실한 정의와 특성을 알아서 고3과정이 되면 그 특성을 알기 때문에 그 식에 대입하여 답을 찾아내는 것이 이상적이라고 생각합니다.

5. 대수식이 의미하는 개념에 대한 이미지는 어느 정도 형성되어 있는가?

A학생은 대부분의 학생들이 개념에 대해서 취약함을 느낀다고 하였고 그 이유로는 학교에서 개념을 배우기는 하지만 개념을 이용한 문제를 다루어 보지 않는 것을 지적했다.

B학생도 대수식에 대한 기하적 이미지가 제대로 형성되어 있지 않았다고 하였다. 그 이유로는 개념에 대해서 집중적으로 다루어 본 경험이 없었고, 시험 준비에만 급급하여 시험문제를 풀기 위한 공부에만 집중하기 때문에 개념이 확실하게 정립되어 있지 않다고 하였다. 또한 수학을 개념 위주의 학습을 하기에는 시간이 부족하고, 과목 수가 많다는 것도 이유가 된다고 하였다. 그러나 탐구형 스프트웨어의 시각적이고 동적인 효과와 학생이 직접 실행해 볼 수 있다는 특성들은 학생들이 개념을 형성하는데 도움을 줄 수 있다고 하였다.

C학생도 대수식이 의미하는 개념에 대한 이미지가 제대로 형성되어 있지 않다고 하였다. 자신의 상황을 다음과 같은 예를 들어서 설명하였다. 이 학생은 원의 방정식하면 무조건 공식 $x^2+y^2=a^2$이 떠오르고 이것이 좌표 평면상에서 어떤 그림이 나오는지는 생각하지 않는다고 했고, 원에서 접선의 방정식을 구하라 하는 문제를 풀 때 무조건 공식에다가 수식을 대입하여 해결하기 때

문에 수학은 단순 암기식 과목으로 인식하고 있다고 했다. 즉, 도형의 방정식이나 이차곡선에 관한 문제를 만나면 무조건 공식만을 떠올리고 어떻게 대입할까만 생각한다는 것이다. 마지막으로, $x^2+y^2=a^2$에서 중심, 반지름을 알아서 그냥 원을 그리는데, 그것이 왜 그렇게 되야 되는지 이게 왜 이게 중심점인지 이게 왜 반지름이 되는지 지금도 잘 모르고 있다고 설명했다.

[연구자] 마지막으로 하나만 더 물어 볼께. 선생님이 학생들의 지필 과정과 GSP 탐구 과정 전체적인 것을 살펴보았는데, 이차곡선에 대한 개념을 학생들이 형식적으로 알고 있는 듯한 느낌을 많이 받았고, 구체적인 활용과 대수식을 보고 그것의 기하적 이미지가 형성되어 있다고 보기에는 미흡한 것이 많다는 느낌을 받았다. 너 스스로 이차곡선에 대해 알고 있는 정도에 대해서 솔직한 평가를 내려볼래?
[A 학생] 맨 처음 공부할 때, 음, 처음에 학교에서 개념을 배우고, 대부분의 선생님들도 그렇고, 개념을 제대로 이용한 문제를 풀어 보는 경우가 적잖아요. 개념을 가르쳐 주시고 개념을 이용한 문제는 이런 것이 있다라고 가르쳐 주신다면 많이 생각을 해 볼 수 있을 것 같은데요, 사실 아이들 대부분이 개념에 대해서 좀 약한 것 같아요. 아니 약해요.

[B 학생] 그런 것은, 확실히 그 부분만 집중적으로 다루어 본적도 없고요. 결국 저희는 시험 보는 데에만 급급하고, 시험 문제를 풀 수 있을 정도로만 공부를 하기 때문에 개념이 확실하게 머리 속에 잡혀 있다고 보기에는 어렵죠. 개념이 머리 속에 완전히 형성이 되어 있을 만큼 집중적으로 공부하지 않으니까요. 그렇게 공부를 해 본 적이 없으니까요.
[연구자] 원인이 무엇일까? 왜 그런 식의 공부를 하지 않았을까?
[B 학생] 모든 것을 그렇게 집중적으로 하기가 어렵잖아요. 시간도 없고요. 사실 저희들은 수학뿐만 아니라 다른 과목도 해야 할 것이 많잖아요. 수학만 하더라도 그런 식으로 하나하나 다 따진다면 시간이 모자랄 것 같은데요.

....

[C 학생] 그것은 단순 암기식 교육의 문제 같은데요. 저는 원의 방정식 하면 무조건 떠오르는 게 공식 $x^2+y^2=a^2$이고 이것이 좌표평면 상에서 어떤 그림이 나오는지 생각해 보지 않거든요. 그러니까 원의 방정식 하면 이 공식인데 어떻게 해서 원의 방정식이 이렇게 나오는지 잘 모르고, 또 다른 예를 들면 적분을 할 때에도 아이들이 가장 힘들어하는 것이 구분구적법이거든요, 구간을 작게 잘라서 하는 것인데 그것에 대한 전반적인 이해는 하고 있는데 계산을 하는 것에 대해서는 꺼려하고, 어려워하고 시험에 나오면 어떻게 하나 걱정을 합니다. 또한, 원에서 접선의 방정식을 구하라 하는 문제를 풀 때 무조건 공식이 떠오르고 공식에 맞는 수식을 대입하여 뭔지도 정확히 모르면서 답을 구해요, 그래서 수학은 단순 암기식 교육처럼 된 것 같거든요. 저희 3명도 다 그런 것 같은데 저도 어쩔 수 없이 그렇지만 도형의 방정식, 포물선의 방정식 하면 무조건 공식부터 떠오르거든요. 접선하면 어떤 공식 세 개중에서 하나 골라서 풀어야겠다 하는 이런 생각밖에 안 들어서요, 창의성이나 이런 좀….

V. 연구결과 분석

기하 문제를 접한 후에 기하적인 접근과 대수적인 접근 사이에서 A학생은 대수적인 접근 방법을 B, C학생은 기하적인 접근 방법을 우선적으로 선택하였다. 그러나 그림의 정확성에 대한 신뢰가 떨어지기 때문에 모든 학생들이 대수적인 접근에 의한 결과를 더 신뢰하였다. 이것은 현재 고등학교 해석 기하 단원에 대한 교육이 대수적인 방법에만 많은 의존을 하고 있다는 것을 반영한다. 하지만 학생들은 어떤 접근을 더 우선시 하는 것과는 관계없이 기하 문제 해결에 있어서 상당 부분 그림에 의존하는 것이 분명했다. 더욱이 대수적인 접근이 용이하지 않을 때는 이러한 경향이 특히 심화되었다. 기하적인 접근 방법에 의한 결과와 대수적인 접근 방법에 의한 결과가 다르게 나타났을 때, 문제의 풀이 과정을 다시 한번 검토하면서 문제를 재검토하기도 하였는데, 이것을 볼 때 문제를 해결 할 때 수학적 연결성은 중요한 역할을 하고 있다는 것을 알 수 있다.

컴퓨터를 활용한 탐구학습 과정에서 학생들이 직면하는 어려운 점을 살펴본 결과는 다음과 같다. 세 명의 학생들 모두 GSP의 사용법에 대해서 처음에는 생소하여 다소 어려움을 호소했지만 큰 문제는 아니었다. 그러나 작도 과정에서 도형의 개념과 원리를 이용하여 작도한 것에 대한 이해가 부족해서 어려움을 느꼈다고 하였다. 이는 학생들이 단순히 컴퓨터 화면상에 화려한 그림이 나타나는 것에 대해서 만족하는 것이 아니라 그것이 갖고 있는 수학적인 개념의 원리에 관심이 많다는 것을 말한다. 그들을 가장 힘들게 만들었던 것은 GSP의 사용 방법이 아니라 수학적 이해 없이 주어진 지시에 따라 무작정 따라서 작도 할 때 그 방법대로 해야 하는지에 대한 궁금증의 해소되지 않는 것이었다.

연구자가 순서대로 제시한 탐구형 소프트웨어 작도를 실시하면서 학생들은 GSP의 능력을 보고 놀라움을 금치 못했고, 탐구 과정 내내 신기함과 흥미를 가지고 접근하였다. GSP가 보여주는 역동적인 화면의 변화는 학생들의 관심을 사로잡기에 충분하였다. 특히 지필 과정에서 학생들을 괴롭혔던 까다로운 문제들이 GSP의 작도 과정에서 자연스럽게 결과를 보여주는 모습은 그들을 놀라게 하였다.

일방적인 작도 과정의 제시는 별로 학생들에게 도움을 주지 않았으며, 작도 과정을 이해한다면 수학적 개념 형성에 도움이 된다는 것이 세 명의 공통된 의견이었는데, 특히 B학생과 C학생의 경우 컴퓨터의 시각적인 특성이 주는 효과는 수학적 개념 형성에 큰 도움이 되어서 머리 속에서 추상적으로 생각하는 것보다 훨씬 이해가 빨랐다고 하였다. 전반적으로 GSP에 대해서 긍정적인 평가를 갖고 있음을 알 수 있었다.

탐구형 소프트웨어의 특성들이 고등학생들에게 해석 기하 분야의 개념 형성에 GSP가 개념 형성에 미치는 영향을 살펴보았는데, 놀랍게도 연구 과정의 초기에는 컴퓨터를 이용하여 수학을 학습한다는 새로운 환경 때문인지 수학 본질적인 주제에 벗어나서 컴퓨터의 특성에 관련된 내용에 더 많은 관심을 보였다. 세 명의 학생들은 컴퓨터의 활용에 관한 방법론적인 면에서 교사가 일방적으로 보여주는 방법은 전혀 학생들에게 도움이 되지 않는다고 하였고, 학생들이 직접 컴퓨터를 사용한다면 도움이 될 것이라고 하였다. 그것에 대한 이유로는 컴퓨터에 대한 막연한 믿음이 강했고, 무엇보다 시각적인 면과 GSP의 역동적인 모습이 수학적 개념 형성에 도움을 줄 수 있다고 생각했다. 탐구형 소프트웨어가 수학적 개념 형성에 미치는 영향으로 중요한 것은 지필 과정과 GSP 탐구 과정의 결과가 다르게 나타났을 때 자신이 가지고 있는 수학적 개념에 대한 부족함을 느끼고 개념 중심의 학습 동기를 유발시켜 준다는 것이다.

마지막으로 대수식이 의미하는 개념에 대한 개념 이미지는 어느 정도 형성되어 있는가? 하는 연구 문제에 대해서는 다음과 같은 결과를 얻었다. 관찰과 마지막 면담에 의해서 세 명의 학생들 모두 대수식이 의미하는 개념에 대한 개념 이미지, 여기서는 주로 기하학적인 의미가 무엇인지를 모르고 있다는 사실을 발견할 수 있었다. 그것에 관한 이유로는 첫째, 학교에서 개념을 배우기는 하지만 그것에 관련된 문제를 다루어 보지 않는다. 둘째, 개념에 대한 공부보다는 시험 성적에 초점을 맞춘 단편적인 공부만 한다. 즉, 단순히 공식을 암기하여 해답만 찾으면 된다는 식이기 때문에 개념 위주의 학습을 소홀히 한다는 것이다.

학생들은 고교 과정에서 해석 기하에 관한 내용과 의미에 있어서 그냥 수식적인 면을 강조하여 학습해 왔으며 단순히 공식을 암기하여 시험에 출제되는 유형의 문제를 반복적으로 해결하여 나름대로의 기능을 가지고 있는 수준에 있다. 이것은 대학 입시라는 문제 때문에 기하가 갖는 수학 본연의 학습 목표 내지는 목적을 전혀 발견할 수 없었기 때문으로, 학생 개개인의 문제가 아니라 현재 학교 수학의 문제이자 고교 교육의 전반적인 문제라고 볼 수 있다.

Ⅵ. 결론 및 제언

우리 나라의 현실을 보면, 수학 시간이 의미 없고 재미없는 암기 시간으로 굳어져 가고 있다. 그 이유는 여러 가지로 분석될 수 있겠으나 가장 근본적인 원인은 의미 있는 수학교육이 이루어지고 있지 않기 때문이다. Skemp(1987)는 이 의미 있는 수학을 관계적 이해에 바탕을 둔 스키마의 확장으로 보았고, Bruner(1974)는 구조를 파악하는 것으로 생각했다.

이제는 정보화 사회의 가운데로 들어서면서 모든 분야에 기술 공학이 도입되어서 사용되고 있고 이를 통해서 빠른 속도로 사회의 각 분야가 발전하고 있다. 그러나 수학 교육을 포함하는 교육 분야는 이에 적극 부응하고 있지 못하고 있는 실정이다.

수학 교육 분야의 경우 수년 전부터 기술 공학의 수학 교육에 활용에 대한 연구가 시작되었고 지금도 나름대로 진행되고 있으나 아직도 이러한 연구 결과가 교실에서 활성화 되고있지 못하다. 또한 아직도 많은 수학 교사와 일부 수학 교육 학자들은 기술 공학을 수학 교육에 도입하는데 주저하고 있는 것이 사실이다. 이러한 우려는 나름대로의 이유가 있다고 판단된다. 그러나 본 연구의 결과를 보면 탐구형 소프트웨어가 의미 있는 수학을 학습하는데 도움을 줄 수 있고 의미 있는 학습의 동

기를 제공할 수 있으며 수학적 연결성을 이해하는데도 일조 할 수 있음을 보여주고 있다.

수학을 의미 있게 가르치는 방법을 여러 가지 가 있겠으나, 본 연구의 결과는 기술 공학을 활용해서 어떻게 이 목적을 이룰 수 있는지 가능성을 제시하고 있다. 다시 말하면 수학적 연결성을 통해서 스키마를 확장시킬 수 있다는 가능성이다. 본 연구에서 학생들은 대수적인 접근을 신뢰하였으나 기하 문제 해결에서는 그림에 많이 의존하는 모습을 보였고 대수적인 접근이 용이하지 않을 때는 더욱 그랬다. 또한 연구 대상자들은 대부분 대수식이 의미하는 개념에 대한 개념 이미지가 매우 부족한 단계라는 것을 확인할 수 있었다. 이에 대한 대안으로 수학적 연결성을 강조하는 것이 될 수 있다. 학생들이 기술 공학을 통해서 대수적인 식을 기하적으로 표현하고, 또 그 반대로 하는 과정에서 자연스럽게 수학적 개념의 연결이 생기게 될 수 있다. 수학적 연결성은 문제 해결로서의 수학, 의사 소통으로서의 수학, 추론으로서의 수학과 함께 NCTM(1989)에서 강조하는 4대 주요 영역 중 하나로 스키마를 성장시키는데 연결 고리와 같은 역할을 한다. 이러한 연결성을 촉진하기 위해서는 어떤 종류의 시각적 도구도 적절할 것으로 생각되며 가장 간단한 교구로는 그래핑 계산기부터 고려해 볼 수 있다.

이 연구의 결과는 또한 탐구형 소프트웨어가 학생들에게 얼마나 의미 있는 학습을 추구하도록 내적 동기를 부여하는지 보여주고 있다. 예를 들어, 아무런 의미 없이 교사가 지시하는 대로 작도하는 과정을 거치면서 학생들은 답답하게 되고 이를 극복하기 위해서 더욱 의미를 추구하게 된 경우를 볼 수 있다. 또 다른 예로는 주어진 과제를 수행하는 과정에서 수학적 개념을 모르면 더 이상 진전이 안되는 경우가 있었다. 이러한 과정을 통해서 학생들은 수학에서 개념이 얼마나 중요한지 깨닫게 되었는데 이는 탐구형 소프트웨어를 사용한 학습 활동이 아니었으면 깨닫기 어려운 내용이었다.

수학 교육에서 기술 공학 사용을 적극적으로 수용하지 못하는 교사들의 의식 속에는 기술 공학을 사용하는 것은 의미는 알지 못하고 답만을 쉽게 얻을 수 있다는 생각을 가지고 있기 때문인 경우가 많다. 그러나 본 연구에서 살펴보면 치밀하게 사전에 계획된 학습 활동에서는 그러한 관점은 단지 우려일 뿐이라는 것을 환기시킨다.

본 연구의 다른 결과는 수학적 개념 이해의 중요성을 탐구형 소프트웨어를 활용한 학습 활동을 통해서 학생 스스로 깨달을 수 있었던 것이다. 교사가 일방적으로 지시하는 순서대로 작도를 하는 과정에서 학생들은 그런 식으로 작도해야 하는 이유를 알지 못한 경우가 있었는데 이를 통해서 이해를 바탕으로 하는 수학적 개념의 중요성을 학생 스스로 깨닫게 되었다. 이는 교사가 수학을 이해하면서 학습해야 한다고 강조하는 것만으로는 전달할 수 없는 귀중한 메시지로 평가할 수 있다.

수학 교육의 궁극적인 목적은 기술 공학을 사용하고 안 하는 것과는 무관하다고 볼 수 있다. 학생들에게 의미 있는 수학, 즉 이해에 바탕을 둔 수학을 가르칠 수 있을 때 기술 공학의 사용과 관계없이 학생들은 수학의 유용성을 깨닫고 활용할 수 있게 되고 계속해서 수학을 학습하고자 하는 의욕을 갖게 된다. 이 연구의 결과를 통해서 알게 된 가장 중요한 내용은 탐구적 소프트웨어를 가지고 의미 있는 수학을 학습할 수 있도록 동기를 제공할 수 있는 가능성을 발견했다는 것이다.

이상과 같은 분석과 고찰을 통하여 실제로 고등학교 기하 교육을 하는데 탐구형 소프트웨어를 활용하는 것에 대하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 이해를 바탕으로 하는 개념 학습이 가능하려면 수학 교사의 역할이 중요하다. 기술 공학을 활용했을 경우 개념을 이해하는 학습이 될 수 있고 동기를 제공할 수 있다는 가능성은 확인했으나 이런 식으로 학습을 계획하고 유도하는 것은 전적으로 교사의 몫이다. 그러므로 어떤 식의 접근과 마찬가지로 탐구형 소프트웨어를 사용하는 수업의 성패는 전적으로 교사에게 달려 있다고 할 수 있다.

둘째, 교육 환경으로 모든 학생들에게 개별적인 탐구 활동이 가능한 환경이 우선적으로 마련되어야 한다. 칠판과 설명으로만 이루어지는 일방적인 교사 중심의 수업 방법에 대한 문제점은 지금까지 여러 연구를 통해서 많이 지적되었다. 이제는 학생들이 스스로의 지식을 구성해 가는 자주적이고 활동적인 학습이 이루어져야 한다. 교사와 학생이 수학적 아이디어에 대해서 토론하고, 수학 문제를 해결하기 위해 도와주고 노력하는 모습이 가

득한 역동적인 교실을 만들기 위해서는 기본적인 시설이 갖추어져야 한다.

셋째, 탐구형 소프트웨어 및 기술 공학이 포함된 다양한 학습 내용과 문제들이 수록된 교재 개발이 활발하게 이루어져야 한다. 현행 교과서를 가지고는 다양한 탐구 활동을 실시하는 것이 많은 제한점과 한계를 가지고 있다. 교재 개발 과정에서 중점을 두어야 하는 것은 학생들이 이해에 기초한 개념을 이해하는 것이고, 기하 적인 직관과 논리적인 추론 능력, 그리고 탐구 능력을 향상시킬 수 있는 것이어야 한다.

넷째, 기술공학을 사용함에 있어서 본질 적이지 않은 것에 학생들이 관심을 빼앗기지 않도록 지도하는 것이 필요하다. Dienes(1960)의 수학적 다양성의 원리나 지각적 다양성의 원리는 수학적 내용의 본질적인 부분은 그대로 둔 채 지도 방법과 환경을 다양하게 변화시키는 경험을 제공하여야 하고 수학적 개념 학습에서 가능한 한 그 개념에 대한 다양한 표현을 제공하여야 한다는 것이다. 그런데 이와 같은 원리를 기술 공학 이용한 학습에 적용하는 과정에서 지나치게 화려한 색상, 조잡한 사운드, 복잡한 애니메이션 등은 학생들이 의미 있는 수학적 개념 형성에 소음으로 작용할 수 있다.

마지막으로 가장 중요한 것은 수학 교사 및 수학 교육 관련자들의 의식 변화이다. 수학 교육에 기술 공학을 사용하는 것은 필수적인 요소는 아니다. 다만 수학을 의미있게 가르치고 배울 수 있는 하나의 도구로 생각할 수 있다. 그러나 앞으로는 점점 그 위치가 확고해 질 것이라는 것은 쉽게 예측을 할 수 있다. 이미 기술 공학은 우리 주위를 둘러싸고 있고 이를 사용할 것인가에 대한 선택의 여지는 없는지도 모른다. 다만 시간 문제 일 수 있다. 앞으로 우리가 할 수 있는 선택은 이를 어떻게 이를 의미 있게 활용하느냐 하는 것이다. 지금 일본에서는 대학 입시에서 수학 시험을 보지 않는 대학이 늘고 있고, 우리나라의 경우 제 7차 교육과정부터 수학이 약화되고 있다. 대학에서 높은 수준의 수학을 요구하지 않는 한 고등학교 수학은 붕괴 위기에 있다고 해도 과언이 아니다. 이러한 결과는 그동안 우리가 수학을 잘 못 가르쳐 왔다는 것과 무관하지 않다. 수학을 가르칠 때 반드시 기술 공학을 사용할 필요는 없다. 그러나 의미 있는 수학을 가르치는 데 중요한 도구로 활용할 수 있다는 가능성을 배제해서도 안된다. 밀물과 같이 우리 앞으로 밀려오는 기술 공학에 대한 우리의 태도가 수학 교육의 앞날을 결정하는 주요한 요인이 될 수 있다는 생각을 우리 모두가 가져야 한다.

참 고 문 헌

류희찬 (1998). 컴퓨터를 활용한 수학 교육의 이론과 실제, 대한수학교육학회 수학교육학 연구발표대회논문집, pp.29-43.

류희찬 · 이기석 · 정보나 (1999). 탐구형 소프트웨어의 활용에 따른 중학교 기하 영역의 지도계열에 관한 연구, 대한수학교육학회 연구발표대회논문집. pp.359-404.

신동선 · 류희찬 (1998) 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교출판부.

이정열 (1999). Geometer's skechpad 활용 학습 자료 적용을 통한 평면기하학습의 효과: 중학교 2학년을 중심으로, 한국교원대학교 대학원석사학위논문.

이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석, 서울대학교대학원 박사학위논문.

전영국 · 주미 (1998). 기하문제해결에서의 GSP를 활용한 탐구학습신장, 대한수학교육학회논문집, pp.413-427.

Bruner, J (1974). *Toward a Theory of Instruction* Harvard University Press

Dienes, Z.P (1960). *Dienes Building up Mathematics*, pp.43-45, New York: Hutchinson Educational Ltd, .

Dwyer, F.M. (1978). *Strategies for Improving Visual Learning*, State College, Pennsylvania: Learning Services.

Merriam, S.B. (1988). *Case Study Research in Education-A Qualitative Approach*-Jossey-Bass Inc., Publishers.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* Reston, VA

NCTM (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft.* http://www.nctm.org.

Skemp, R.R. (1987) *The Psychlogy of Learning Mathematics*, pp.119-143, Hillsdale, NJ: Lawrence

Erlbaum Associates, Publisher.

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press.

A Study on the Effectiveness of Dynamic Geometry Software in Solving High School Analytic Geometry Problems.

Whang, Woo-Hyung
Department of Mathematics Education,College of Education, Korea University, Seoul, 136-701, Korea
E-mail: wwhang@korea.ac.kr

Cha, Soon Gyu
Chung Dong High School, 618, Ilwon-dong, Kangnam-ku, Seoul, 135-230, Korea

The purpose of the study was to investigate the effectiveness of dynamic software in solving high school analytic geometry problems compared with traditional algebraic approach. Three high school students who have revealed high performance in mathematics were involved in this study. It was considered that they mastered the basic concepts of equations of plane figure and curves of secondary degree. The research questions for the study were the followings: 1) In what degree students understand relationship between geometric approach and algebraic approach in solving geometry problems? 2) What are the difficulties students encounter in the process of using the dynamic software? 3) In what degree the constructions of geometric figures help students to understand the mathematical concepts? 4) What are the effects of dynamic software in constructing analytic geometry concepts? 5) In what degree students have developed the images of algebraic concepts?

According to the results of the study, it was revealed that mathematical connections between geometric approach and algebraic approach was complementary. And the students revealed more rely on the algebraic expression over geometric figures in the process of solving geometry problems. The conceptual images of algebraic expression were not developed fully, and they blamed it upon the current college entrance examination system.

* ZDM classification : C34
* MSC2000 classification : 97C30
* key word : geometry education, dynamic software, qualitative research, mathematical connection, concept development.

평가 과제(지필)

이 름: ______

Ⅰ.점과 원

1. 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 원은 몇 개 있습니까?
   ① 없다
   ② 1개
   ③ 2개
   ④ 3개
   ⑤ 무수히 많다

2. 두 점 A(-4, 2), B(2, -6)을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

3. 평면 위의 일직선 위에 있지 않은 세 점을 지나는 원은 몇 개 있습니까?
   ① 없다
   ② 1개
   ③ 2개
   ④ 3개
   ⑤ 무수히 많다

4. 평면 위의 세 점 (0, 0), (3, 4), (-1, 2)를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

Ⅱ. 점과 직선 사이의 거리

다음 그림에서 점 C, D를 지나는 직선의 방정식은 $3x+4y-24=0$이다.
이 때 아래의 질문에 답하시오.

1. 원점과 이 직선 사이의 거리를 구하시오.

2. x가 $0 \le x \le 8$일 때, 원점 0(0, 0)에서 이 직선 위의 임의의 점 P까지의 거리를 l이라 할 때 l의 값이 자연수가 되는 점 P의 개수는?
   ① 2개
   ② 3개
   ③ 4개
   ④ 5개
   ⑤ 6개

Ⅲ. 원의 방정식

다음 그림에서 원 C1의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$이다. 그리고 점P는 원 C1위를 움 직이고 있다. 이 때, 다음 질문에 답하시오.

1. 원점 0(0, 0)에서 이 원 위의 임의의 점 P까지의 거리를 l이라 할 때 l의 값이 자연수가 되는 점 P의 개수는?
   ① 2개
   ② 5개
   ③ 7개
   ④ 8개
   ⑤ 10개

2. 원점 0(0, 0)에서 이 원에 접선을 그릴 때, 원점과 접점 사이의 거리를 l_1이라 하자. 그리고 원점 0(0, 0)에서 원 위의 임의의 점 P까지의 거리를 l_2이라 할 때, l_1보다 큰 l_2 의 값이 자연수가 되는 점P의 개수는?
   ① 1개
   ② 3개
   ③ 5개
   ④ 6개
   ⑤ 8개

3. 원 C1 위의 점P와 원 밖의 한 점 0를 연결한 선분의 중점의 자취를 구하시오.

Ⅳ. 자취의 방정식(문제해결력)-1

1. 아래 그림에서 선분 AB가 벽을 따라 미끄러지면서 점 A가 바닥에 이를 때, 선분 AB의 중점 P가 움직이면

서 생기는 자취는 어떤 도형의 일부인가?(단, 선분 AB의 길이는 변화가 없음)

① 직선
② 원
③ 포물선
④ 타원
⑤ 쌍곡선

2. 위의 그림에서 점 O를 원점으로 하고 벽과 바닥을 각각 좌표평면의 x축과 y축으로 하고, 선분 AB의 길이를 6이라고 할 때, 점 P의 자취를 구하시오.

V. 자취의 방정식-2

1. 아래 그림에서 선분 CD의 수직 이등분선과 두 점 A, D를 잇는 직선의 교점을 X라 하자. 이 때, 점 D가 점 A를 중심으로 하고 반지름이 4인 원 C1위를 움직일 때, 점 X의 자취는 어떤 도형이 되는가?

① 직선
② 원
③ 포물선
④ 타원
⑤ 쌍곡선

2. 위의 그림에서 점 A의 좌표를 (0, 0), 점 C의 좌표를 (10, 0)이라 할 때, 점 X의 자취의 방정식을 구하시오.

VI. 자취의 방정식-3

1. 원 C1과 원의 내부에 한 점 A가 주어졌을 때, 점 A를 지나고 원 C1에 내접하는 원의 중심의 자취는?

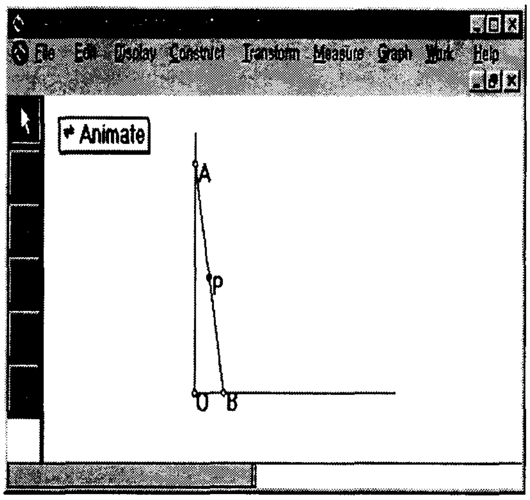
① 직선
② 원
③ 포물선
④ 타원
⑤ 쌍곡선

2. 점 O와 점 A의 좌표를 각각 (0, 0), (4, 0)이라 하고 원 C1의 반지름을 6이라 할 때, 점 A를 지나고 원 C1에 내접하는 원의 중심의 자취의 방정식을 구하시오.

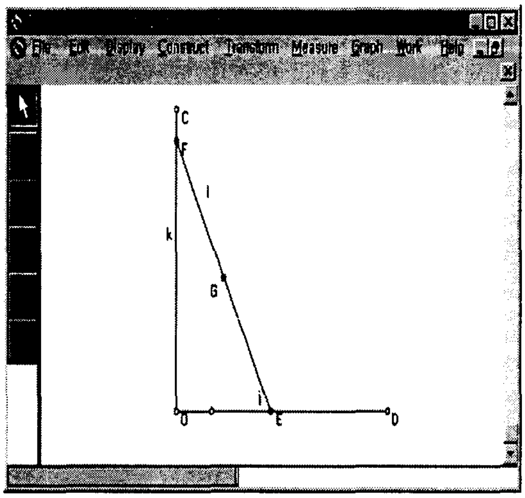
1. 자취의 방정식(문제해결력)-1

▶ 학습 문제

아래 그림에서 선분 AB가 벽을 따라 미끄러지면서 점 A가 바닥에 이를 때, 선분 AB의 중점 P가 움직이면서 생기는 자취는 어떤 도형의 일부인가? (단, 선분 AB의 길이는 변화가 없음.)



▶ 작도 과정

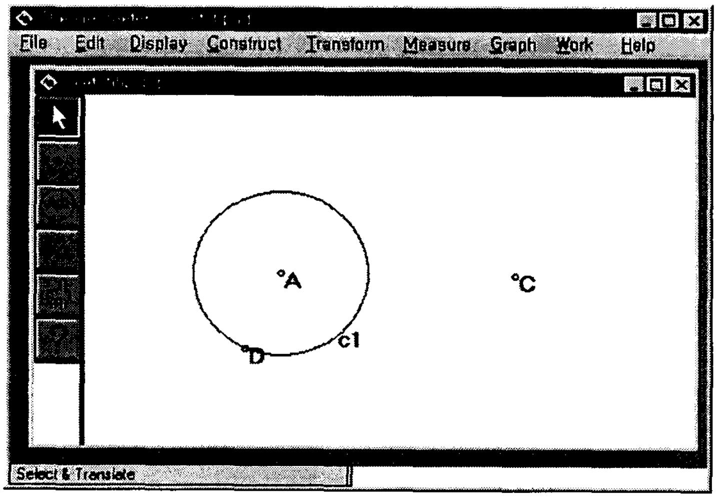


1.1. Graph 메뉴의 Create Axes 선택하여 좌표평면을 작도한다.
1.2. Graph 메뉴에서 Plot Points를 선택하면 대화상자가 나타난다. 그 대화 상자에 x, y에 0, 6 과 6, 0을 대입시키면 점 C(0, 6), D(6, 0)가 나타난다.
1.3. 원점과 점 D를 Shift를 누른 상태에서 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Segment를 선택하면 선분 j가 생긴다. 마찬가지 방법으로 원점과 점 C를 잇는 선분 k를 작도한다.
1.4. 중심이 원점이고 점 D를 지나는 원을 작도하기 위하여 원점을 먼저 선택하고 난 후에 Shift를 누른 상태에서 점 D를 선택하고 Construct 메뉴에서 Circle By Center And Point를 선택하여 원을 작도한다.
1.5. Graph 메뉴에서 Hide Axes를 선택하여 그래프의 축을 없앤다.
1.6. 선분 j를 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Point On Object를 선택하여 선분 위를 움직이는 점 E를 만든다.
1.7. 점 E를 선택한 후에 Shift를 누른 상태에서 선분 k를 선택하고 Construct 메뉴에서 Circle By Center And Radius를 선택하여 원을 작도한다.
1.8. 7에서 생긴 원과 선분 k를 동시에 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Point At Intersection을 선택하여 교점 F를 만든다.
1.9. Shift를 누른 상태에서 점 E와 F를 동시에 선택한 후 Construct 메뉴에서 Segment를 선택하여 선분 l 을 만든다.
1.10. 선분 l 을 선택한 후에 Construct 메뉴의 Point At Midpoint를 클릭한다. 그 중점의 이름을 G라고 한다.
1.11. 점 E와 선분 j를 동시에 선택한 후에 Edit 메뉴에서 Action Button의 Animation을 선택하면, Animation 버튼이 화면에 생긴다.
1.12. 4 와 7에서 작도한 원을 Shift를 이용하여 동시에 선택한 후에 Display 메뉴에서 Hide를 선택한다.
1.13. 중점 G가 선택되어진 상태에서 Display 메뉴의 Trace Midpoint를 클릭하면 된다. 'Animation'버튼을 더블 클릭 할 때마다 점 G가 움직인 흔적이 역동적으로 나타난다. 그러나 마우스를 아무 곳이나 클릭 하면 흔적은 사라진다. 흔적이 사라지지 않은 상태에서는 그 흔적을 복사할 수 있다.
1.14. 점 G와 E 그리고 선분 j를 동시에 선택하여 Construct 메뉴에서 Locus를 선택하면 점 G의 자취가 나타난다.

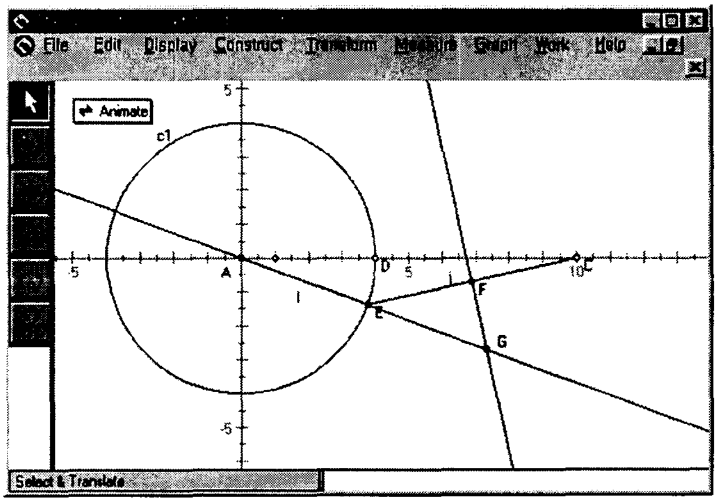
2. 자취의 방정식-2

▶ 학습 문제

아래 그림에서 선분 CD의 수직이등분선과 두 점 A, D를 잇는 직선의 교점을 X라 하자. 이 때, 점 D가 점 A를 중심으로 하고 반지름이 4인 원 c1위를 움직일 때, 점 X의 자취는 어떤 도형이 되는가?



▶ 작도과정



2.1. Graph 메뉴의 Create Axes 선택하여 좌표평면을 작도한다.

2.2. Graph 메뉴에서 Plot Points를 선택하면 대화상자가 나타난다. 그 대화 상자에 x, y에 10, 0과 4, 0을 대입시키면 점 C(10, 0)과 점 D(4, 0)이 나타난다.

2.3. 원점을 선택하고 Shift를 누른 상태에서 점 D를 선택하고 Construct 메뉴에서 Circle By Center And Point를 선택하여 원을 작도한다.

2.4. 원 c1을 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Point On Object를 선택하여 원 위를 움직이는 점 E를 만든다.

2.5. Shift를 이용하여 점 C와 E를 동시에 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Segment를 선택하여 선분 j를 만든다.

2.6. 선분 j를 선택한 후에 Construct 메뉴의 Point At Midpoint를 클릭한다. 그 중점의 이름을 F라 한다

2.7. 선분 j와 점 F를 Shift를 이용하여 동시에 선택하고 Construct 메뉴의 Perpendicular Line을 선택하여 선분의 수직이등분선을 만든다.

2.8. 점 E와 원 c1을 동시에 선택한 후에 Edit 메뉴에서 Action Button의 Animation을 선택하면, Animation 버튼이 화면에 생긴다.

2.9. Shift를 이용하여 원점과 점 E를 동시에 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Segment를 선택하여 선분을 만든다.

2.10. Shift를 이용하여 원점과 선분 l 을 동시에 선택한 후에 Construct 메뉴의 Parallel Line을 선택하여 직선을 만든다.

2.11. 7과 10에서의 직선들을 동시에 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Point At Intersection을 선택하여 교점 G를 만든다.

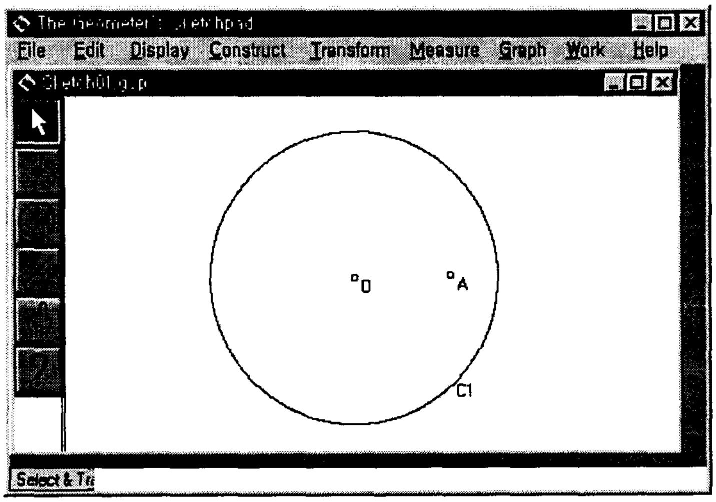
2.12. 중점 G가 선택되어진 상태에서 Display 메뉴의 Trace를 클릭하면 된다. 'Animation'버튼을 더블 클릭 할 때마다 점 G가 움직인 흔적이 역동적으로 나타난다. 그러나 마우스를 아무 곳이나 클릭 하면 흔적은 사라진다. 흔적이 사라지지 않은 상태에서는 그 흔적을 복사할 수 있다.

2.13. 점 G와 E 그리고 원 c1을 동시에 선택하여 Construct 메뉴에서 Locus를 선택하면 점 G의 자취가 나타난다.

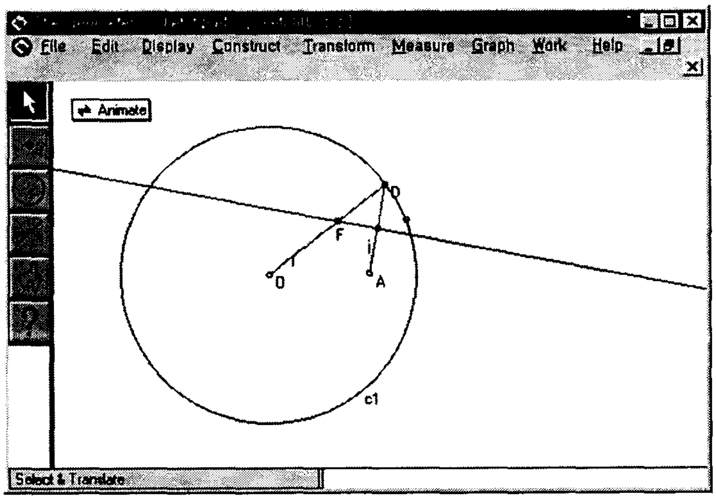
3. 자취의 방정식-3

▶ 학습문제

원 C1과 원의 내부에 한 점 A가 주어졌을 때, 점 A를 지나고 원 C1에 내접하는 원의 중심의 자취는?



▶ 작도과정



3.1. 중심이 O인 원 C1을 작도한다. 원의 내부에 임의의 점 A를 작도한다.

3.2. 원 C1을 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Point On Object를 선택하여 원 위를 움직이는 점 D를 만든다.

3.3. 원 위의 임의의 점 D를 선택하고 동시에 원 C1을 선택하여 Edit 메뉴의 Action Burton을 클릭하며 Animation이 나타난다. 클릭하여 속도를 조절하는 대화상자가 나타나면 속도 조절한 후에 OK를 클릭하면 된다.

3.4. Shift를 이용하여 점 D와 점 A를 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Segment를 선택하여 선분을 작도한다.

3.5. 선분 j를 선택한 후에 Construct 메뉴의 Point At Midpoint를 클릭한다. 그 중점의 이름을 F라 한다.

3.6. 선분 j를 선택한 후에 Shift를 누른 상태에서 점

F를 선택하고 Construct 메뉴의 Perpendicular Line을 선택하여 선분의 수직이등분선을 만든다.

3.7. Shift를 이용하여 점 O와 점 D를 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Segment를 선택하여 선분 l 을 작도한다.

3.8. Shift를 이용하여 선분 l 과 6에서 만든 수직이등분선을 동시에 선택한 후에 Construct 메뉴에서 Point At Intersection을 선택하여 교점 F를 만든다.

3.9. 교점 F가 선택되어진 상태에서 Display 메뉴의 Trace Point를 클릭하면 된다. 'Animation' 버튼을 더블 클릭 할 때마다 점 F가 움직인 흔적이 역동적으로 나타난다. 그러나 마우스를 아무 곳이나 클릭하면 흔적은 사라진다. 흔적이 사라지지 않은 상태에서는 그 흔적을 복사할 수 있다

3.10. 점 D와 원 C1, 교점F를 동시에 선택하여 Construct 메뉴의 Locus를 클릭하면 교점 F의 자취가 나타난다.

▶ 탐구과제

점 A를 조금씩 움직여 봄으로써 자취의 모양이 어떻게 변화하는지 살펴 볼 수 있다.