韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2002, 11. 제 41권, 제 3호, 291-318.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2002, Vol. 41, No. 3, 291-318.

초등학생들의 형식적 추론 능력에 관한 연구[1)]

라 병 소 · 신 경 자 · 신 준 식 · 서 동 엽 (춘천대학교)

I. 서 론

추론이란 이미 알고 있는 판단으로부터 새로운 판단을 이끌어내는 사유 작용이다. 추론은 일반적인 원리에 기초하여 특수한 주장을 정당화하는 연역적 추론과 관찰된 특수한 사례의 공통성에 주목하여 일반적인 법칙을 이끌어내는 귀납추론으로 나눌 수 있으며, 수학은 귀납추론에 의해 발견되고 연역추론에 의해 정당화되어 가는 것으로 볼 수 있다(우정호, 2000). 우리 나라의 현행 제 7차 교육과정에서는 8-나 단계의 도형 영역에서 '삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형에 관한 간단한 성질을 증명할 수 있다.'고 하여 연역추론을 도입하고 있다(교육인적자원부, 1997). 그리고, 8-가 단계까지의 추론은 주로 귀납추론이나 유사성을 바탕으로 추측하는 유추로 이루어지고 있으며, 이러한 추론 방법은 발견의 맥락뿐만 아니라 정당화의 맥락에서도 이용되고 있다.

이렇듯 초등학교에서 연역추론이 다루어지지 않는 배경으로는 첫째, 피아제(Piaget)의 인지발달이론의 영향을 들 수 있다. 피아제의 연구에 의하면 연역추론의 바탕이 되는 가설-연역적 사고가 가능한 시기는 형식적 조작기로서(김응태 외, 1984), 우리 나라의 학년제로는 중학교 이후의 시기에 해당한다. 주로 초등학교의 시기에 해당하는 구체적 조작기에는 구체물 또는 구체물을 다루었던 경험에 근거한 조작만이 가능하므로, 가정으로부터 일반 원리에 의하여 결론을 입증하는 연역추론은 적절하지 않은 것으로 볼 수 있는 것이다. 둘째, 1960년대에 유럽과 미국을 중심으로 진행되었던 학교수학 현대화 운동의 실패의 영향을 들 수 있다. 학교수학 현대화 운동에서는 수학의 공리적 구조를 강조하는 엄밀한 연역적 전개 방법에 따라 초등학교를 비롯한 각 학교에서 수학교육을 실시하였으나, 결과적으로는 성공적이지 못했다는 비판을 받게 되었던 것이다. 우리 나라 교육과정에서도 현대화 운동의 영향을 받았던 제 3차 교육과정기 이후부터는 (강지형 외, 1999), 중학교 2학년 단계부터 연역추론을 도입하는 것이 관례화되었다.

각 학년에서 지도되는 각각의 내용 중에서 연역추론은 학생들이 가장 어려워하는 내용의 하나로 인식되고 있는 것으로 보인다. 우리 나라 중학교 2학년 학생들의 연역추론을 통한 증명 능력은 그리 높지 않은 것으로 여러 연구에서 드러나고 있는 바, 학생들이 교과서에서 다루었던 것과 동일한 문항에 반응할 경우에는 약 30%의 정답률을 보여 주는 반면, 다소 변형된 문항에 반응할 경우의 정답률은 10%보다 낮은 것이 일반적인 경향인 것으로 파악된다(우정호, 1994; 류성림, 1998; 서동엽, 1999). 학생들의 증명 능력이 그리 높지 않다는 것은 이미 외국의 여러 연구에서도 입증된 바 있으며, 외국의 경우에는 중학교 2학년보다 상위 학년인 10학년이나 11, 12학년 학생들조차도 30% 이상의 정답률을 보여 주지는 못하고 있다(Bell, 1976; Senk, 1985; Fischbein & Kedem, 1982). 이렇듯 여러 연구의 결과만을 놓고 본다면 중학교 2학년뿐만 아니라 학교 수학에서 연역추론은 다루기 힘든 주제라는 결론을 내릴 수도 있을 것이다. 하지만, 이러한 결론이 가능한 것은 연역추론을 도입하기 이전까지 지도되는 내용이 각 학년의 학생들에게 가장 적절한 수준에서 가장 적절한 방법으로 지도되었다는 것이 전제되었을 때이다.

우리 나라 중학교 2학년과 3학년 학생들의 연역추론 능력을 조사한 서동엽(1999)의 연구에서는 학생들이 증명에 대하여 가지고 있는 한 가지 흥미로운 생각을 보여

---

1) 이 논문은 2001년도 춘천교육대학교 교내 지원 연구비에 의하여 연구되었음.

* 2002년 9월 투고, 2002년 11월 심사 완료.
* ZDM분류 : E53, C33
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 형식적추론, 비형식적추론, 스킴, 일반화, 정당화.

주고 있다. 그것은, 학생들은 삼각형의 일반적인 성질을 다루는 명제에 대하여, 연역추론뿐만 아니라 몇 개의 예에 대한 측정을 통하여 주어진 명제가 참임을 확인하는 것을 증명으로 받아들이며, 진리성에 대한 확신은 연역추론보다 더 강력하게 제공하는 것으로 생각한다는 점이다. 예를 들어, '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.'는 명제가 있을 때, 꼭지각의 이등분선을 그린 후 나누어지는 두 삼각형이 합동임을 보이는 연역추론 방법과, 몇 개의 이등변삼각형의 예를 그려서 직접 각이 같은지를 확인하는 방법 모두를 학생들은 증명으로 받아들이며, 전자보다는 후자의 방법에서 더욱 강한 확신을 느낀다는 것이다.

중학교 2학년 단계에서 상당한 양의 연역추론을 다루는 경험 후에도 학생들이 이러한 반응을 보이는 이유는 그 이전까지의 학생들의 경험에서 찾을 수 있는 것으로 보인다. 학생들이 연역추론을 학습하기 이전에 약 7년 6개월의 기간 동안 학교 수학에서 경험했던 추론 방법은 전적으로 귀납추론이라고 할 수 있으며, 이를 통하여 학생들은 귀납추론을 통한 일반화 과정에서 상당한 정도의 논리적 비약이 있음에도 이러한 비약을 매우 자연스러운 것으로 또는 비약이 아닌 것으로 받아들이게 된다는 것이다. 예를 들어, 크기가 1cm인 직사각형의 모눈의 개수를 세는 방법으로부터 일반화되는 '가로의 길이 × 세로의 길이'라는 직사각형의 넓이를 구하는 공식은 가로나 세로의 길이가 유리수인 범위까지, 초등학교 이후에는 실수 범위까지 자연스럽게 확장되어 이용되고 있다. 또한, 양수와 음수의 곱셈 결과가 음수가 된다는 사실은 양수와 양수의 곱셈으로부터 감수의 크기를 1씩 줄여 나가 마침내 음수가 될 때 결과도 동일한 패턴으로 작아진다는 귀납적 외삽법에 의하여 지도되고 있다(우정호, 1998). 이 과정에 숨은 논리적 비약은 학생들에게 인식되지 않거나 인식하더라도 해결하기 매우 어려운 과제이며, 학생들은 이 정도의 논리적 비약은 자연스러운 것으로 받아들이게 된다. 그리고, 중학교를 졸업하는 단계까지 학생들은 이 정도의 논리적 비약에 의하여 정당화한 사실이 반박되는 경험을 거의 가지지 못한다(서동엽, 1999). 즉 연역추론이 필요함을 인식하기 위해서는 논리적 비약을 동반하는 귀납추론으로는 불완전하다는 인식이 선행되는 것이 보다 효과적이겠지만, 이를 인식할 경험이 제공되지 않고 있기 때문에 학생들은 연역추론을 교과서에서만 다루는 매우 난해한 '또 하나의' 추론 방법으로 인식하게 되는 것이다.

따라서, 8-가 단계까지의 귀납추론으로부터 8-나 단계부터의 연역추론으로 보다 점진적으로 이행할 수 있는 방법을 탐색해 보는 것은 중학생들이 연역추론에서 겪는 어려움을 해결하는 데 도움이 될 가능성이 있어 보인다. 본 연구는 이렇듯 학교 수학에서 귀납추론과 연역추론의 조화로운 교수·학습 방향을 탐색하기 위한 기초 연구로서, 초등학교 5학년 학생들을 중심으로 초등 학생들의 연역추론을 통한 정당화 능력을 조사해 보고자 하는 것이다. 이를 바탕으로 초등학교 5학년 정도부터 중학교 2학년에서 연역추론을 도입하는 시기까지 점진적으로 귀납추론의 논리적 비약과 오류가능성 및 이로부터 연역추론의 필요성을 인식하도록 하는 교수·학습 방법을 구현할 수 있다고 본다.

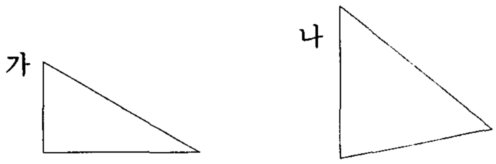
II. 초등학교에서 추론 지도의 실제

1. 도형의 성질 지도

삼각형의 내각의 합과 관련된 다음 세 가지의 설명 방법을 비교하여 보자.

<예 1>

삼각형의 세 각의 크기의 합을 각도기로 재어 알아보아라.



· 위의 삼각형의 세 각의 크기를 재어 그 합을 구하여라.

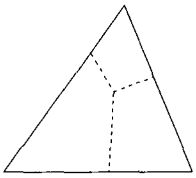
가. $90° + 30° + 60° = \boxed{}$

나. $\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

(교육인적자원부, 2001a : p.42)

<예 2> 삼각형의 세 각의 크기의 합을 종이를 잘라 알아보자.

· 삼각형 ㄱㄴㄷ을 그림과 같이 잘라서 세 각을 직선 위에 맞추어 보아라.



· 모두 직선 위에 꼭 맞추어지는가?
· 삼각형의 세 각의 크기의 합은 몇 도라고 생각하는가?
· 왜 그렇게 생각하는가?

(교육인적자원부, 2001a : p.42)

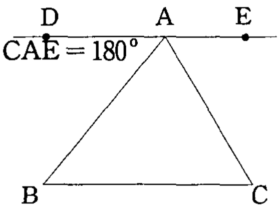
<예 3> 「삼각형은 내각의 크기의 합이 180°이다.」가 참임을, 이미 알고 있는 사실들을 근거로 하여 밝혀보자.

우선, 오른쪽 아래의 그림과 같이 △ABC의 꼭지점 A를 지나며 변 BC에 평행한 직선 DE를 그으면,

$\angle DAE = 180°$(평각)

곧 ,

$\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$



한편, $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$에서

$\angle DAB = \angle B$(엇각),

$\angle CAE = \angle C$(엇각)

그런데 $\angle BAC = \angle A$이므로,

$\angle A + \angle B + \angle C$

$= \angle BAC + \angle DAB + \angle CAE = 180°$

(김연식 외, 1994 : p.208)

<예 1>과 <예 2>는 초등학교 4-가 단계 교과서의 같은 면에서 순차적으로 지도되고 있는 내용이다. <예 1>에서 다루고 있는 내용은 일반적인 삼각형의 내각의 합에 대한 것은 아니며, 보기로 주어진 두 삼각형의 내각의 합을 측정에 의하여 구하는 것이다. 그리고, <예 2>에서 다루는 내용은 '삼각형의 세 각의 크기의 합은 몇 도라고 생각하는가?'라는 질문으로부터 일반적인 삼각형의 내각의 합에 대한 것임을 알 수 있다. <예 1>과 <예 2>를 동시에 다루는 것은 초등학생의 수준에서 귀납추론에 의한 발견과 보다 정교한 추론에 의한 정당화라는 맥락을 동시에 제공하고자 한 시도로 해석될 수도 있을 것이다. 그리고, <예 3>은 중학교 2학년의 수준에서 다루어지는 연역추론에 의한 증명이다. 여기서 <예 2>와 <예 3>의 차이는 다음과 같다.

① <예 2>의 삼각형은 ㄱㄴㄷ으로 표시되는 반면, <예 3>의 삼각형은 ABC로 표시된다. 삼각형 ㄱㄴㄷ은 특정한 하나의 삼각형을 지칭하는 것으로, 삼각형 ABC는 임의의 삼각형을 대표하는 것으로 의도된다. 하지만, 명시적으로 드러나지는 않는다.
② <예 2>에서는 삼각형을 오려붙이는 활동에 의한 방법을 쓰고 있는 반면, <예 3>에서는 보조선을 그린 다음 엇각의 성질을 이용하는 방법을 쓰고 있다.
③ <예 2>는 귀납추론인 반면, <예 3>은 연역추론이다.

이 중에서 첫 번째 차이는 명시적이지는 않지만, 중학교부터 임의적인 대상을 나타내기 위하여 변수가 도입된다는 점에서 <예 3>에서는 주어진 삼각형의 임의적인 속성이 암묵적으로 전제되어 있다고 볼 수 있다. 그리고, 초등학교에서는 임의적인 속성을 나타내는 변수를 이용하지 않기 때문에 <예 2>의 삼각형은 임의의 삼각형을 대표하는 것으로 볼 수 없는 것이다. 즉, 첫 번째의 차이는 두 방법에서 표면적으로 드러나는 차이는 아니라는 것이다. 그러나, <예 3>에서 의도하고 있는 삼각형의 임의적인 속성을 학생들이 이해할 수 있는지는 의문이 간다. 그것은 서동엽(1999)의 연구에 참여한 중학생들은 삼각형 그림 하나를 주고서 '다음 △ABC의 내각의 합이 180°임을 증명하였다면, 모든 삼각형에 대하여 내각의 합은 180°라고 주장할 수 있다.'는 문장에 대하여 반대하는 이유로서, '그림에 나타난 하나의 삼각형에 대해서 증명한 것일 뿐이어서 모든 삼각형에 적용될 수는 없다.'는 것을 들고 있기 때문이다.

<예 2>와 <예 3>이 갖는 보다 명시적이고 근본적인

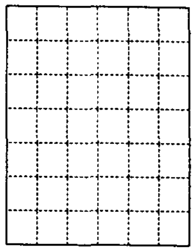
차이는 두 번째의 차이로서, <예 2>에서는 학생들의 경험에 의한 방법을 이용하고 있는 반면, <예 3>에서는 선행하여 다룬 평행선의 성질을 이용하고 있다는 점이다. 그리고, 이 점 때문에 세 번째 차이인 귀납추론인지 연역추론인지를 구분하는 기준이 되고 있다. 호일즈(Hoyles, 1996)에 의하면 학생들의 증명에 대한 이해는 어떤 계층을 따라서 조직된다고 보는 것이 일반적 입장이며, 가장 낮은 수준은 행동에 의한 경험적 '증명'이나 절차적 정당화이고, 가장 높은 수준에서는 전제와 여러 성질에 근거한 엄밀한 연역적 논증이나 관계적 정당화이다. 이러한 관점에서 본다면 <예 2>는 경험적 정당화로, <예 3>은 관계적 정당화로 볼 수 있는 것이다.

사실, <예 3>에서 삼각형 ABC가 임의적인 속성을 갖는 것은 연역추론의 구조에 의해서이다. 즉 삼각형이면 꼭지각을 지나고 밑변에 평행인 직선을 그렸을 때 두 엇각이 같고, 두 엇각이 같으면 세 각의 합은 평각이 된다는 삼단논법에 의하여 그 진리성이 보장되고 있는 것이다. 그러나, <예 2>에서 삼각형이면 세 각을 오려서 연결하였을 때 평각이 된다는 사실은 결과적으로 참이지만 그 방법 자체가 참임을 보장하는 것은 아니다. <예 2>에서 이용한 방법은, 이등변삼각형에 포함되는 정삼각형의 세 변의 길이를 재어서 같다는 사실을 확인한 후에 '이등변삼각형의 세 변의 길이는 같다'고 주장하는 것과 비슷한 유형의 것이기 때문이다. 그러나, 학생들이 이러한 차이를 인식하는 것은 매우 어려운 것으로 보이며, 그 원인 중 하나로서 서론에서 밝힌 바와 같이 논리적 비약을 수반하는 귀납추론에서 실패한 경험이 없다는 점을 들 수 있을 것이다.

2. 넓이 지도

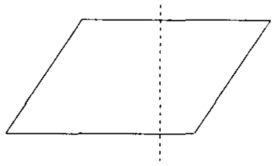
다음으로 5-가 단계의 측정 영역 내용 중에서 평면도형의 넓이를 지도하면서 이용되는 추론 과정을 분석해 보기로 한다.

<예 4> 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 알아보아라.
- 가로가 3cm이고 세로가 5cm인 직사각형을 모눈종이에 그려 보아라.
- 이 직사각형에는 모눈이 가로로 몇 칸 놓여 있는가?
- 이 직사각형에는 모눈이 세로로 몇 줄 놓여 있는가?
- 이 직사각형의 넓이는 얼마라고 생각하는가?
- 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 말하여 보아라.



(직사각형의 넓이)=(가로)×(세로)
(교육인적자원부, 2001b : p.87).

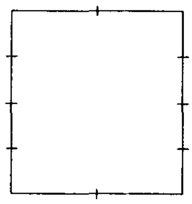
<예 5> 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 알아보아라.
- 종이에 밑변이 4cm이고 높이가 3cm인 평행사변형을 그린 후, 오려 보아라.
- 이 평행사변형을 다음과 같이 자른 다음, 직사각형 모양이 되게 다시 붙여 보아라.



- 만들어진 직사각형의 넓이는 얼마인가?
- 처음 평행사변형의 넓이는 얼마라고 생각하는가?
- 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 말하여 보아라.

(평행사변형의 넓이)=(직사각형의 넓이)
=(가로)×(세로)=(밑변)×(높이)
(교육인적자원부, 2001b : p.94).

<예 6> $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$은 얼마인지 알아보아라.



- 직사각형에서 $\frac{1}{4}$만큼 파란색을 칠하여 보아라.
- 빗금 친 부분 중에서 다시 $\frac{1}{2}$만큼 빨간색을 칠하여 보아라.
- 겹쳐서 색칠한 부분은 전체의 몇 분의 몇이 되는가?
- $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$은 얼마라고 생각하는가?

· 왜 그렇게 생각하는가?
(교육인적자원부, 2001b, p.115)

<예 4>에서는 가로가 3cm이고 세로가 5cm인 직사각형을 모눈종이에 그려본 다음, 단위넓이 $1cm^2$의 개수를 세는 방법으로부터 직사각형의 넓이를 구하는 공식을 정당화하고 있다. 이 방법은 특수한 직사각형의 예를 들어 설명하고 있기는 하지만, 앞의 <예 2>에서 삼각형의 꼭지각을 오려붙인 것만큼 학생들에게 논리적 설득력이 있을 것으로 예상된다. 다만, 이러한 논의가 적어도 가로와 세로가 유한한 자연수 값인 모든 직사각형에 대하여 성립함을 보일 수 있는 일반적인 것이 되기 위해서는 'a와 b가 자연수일 때, 가로가 a이고 세로가 b인 직사각형은 눈금의 간격이 1cm인 모눈종이에서 $a \times b$ 칸을 차지한다.'는 사실이 미리 전제되어야 할 것이다.

<예 5>는 지금까지 살펴본 예와는 다른 연역적 구조를 일부 포함하고 있다. 평행사변형의 넓이 공식을 유도하는 위의 과정은 다음과 같은 삼단논법적 구조를 지니고 있다.

· 밑변과 높이가 주어진 평행사변형은 가로가 밑변이고 세로가 높이인 직사각형과 넓이가 같다.
· 직사각형의 넓이는 가로×세로이다.
· 따라서, 평행사변형의 넓이는 밑변×높이이다.

그러나, <예 5> 역시 밑변이 4cm이고 높이가 3cm인 특수한 평행사변형의 예를 이용하고 있으며, '모든 평행사변형은 가로가 밑변이고 세로가 높이인 직사각형과 넓이가 같다.'는 사실을 암묵적으로 전제하고 있다는 점에서 중학교 수준의 연역적 추론과는 거리가 있는 것으로 보인다.

<예 6>은 두 단위분수의 곱셈을 통하여 두 분수의 곱셈 원리를 설명함과 동시에 가로와 세로가 분수로 주어진 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 동시에 설명하고 있는 것으로 보인다. <예 6>의 방법은 교과서에서 단위분수가 아닌 두 진분수의 곱셈과 두 대분수의 곱셈으로 확장되면서 계속하여 이용되고 있다. 그러나, <예 4>에서 설명되었던 가로와 세로가 자연수인 경우의 직사각형의 넓이 공식과의 관계는 명확히 설명되지 않을 뿐만 아니라 설명되기 어렵다는 점에서, 앞서 살펴본 호일즈의 용어로는 '경험적 정당화'의 수준에 머물러 있는 것으로 볼 수 있다. 사실, 직사각형의 넓이는 'f가 $D=[a, b]\times[c, d]$에서 연속이면

$$\int\int_D f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx\text{'}$$

라는 푸비니 정리(Fubini's Theorem)의 초등학교 번역판으로서(황혜정 외, 2001), 적분 개념을 이용하지 않고서는 직사각형에서 가로와 세로가 자연수인 경우와 분수인 경우의 방법적 연관을 설명하기는 매우 난해한 것으로 보인다.

3. 초등학교 추론 지도 방법의 분석

앞의 두 절에서 살펴본 우리 나라 초등학교 수학교육에서 일반 원리를 정당화하기 위한 추론 지도 방법의 특징은 구체물이나 반구체물을 이용한 학생들의 조작 활동에 바탕하고 있다는 점과 한 가지 특수한 사례를 통하여 일반적인 방법을 정당화하려 하고 있다는 두 가지 점을 들 수 있을 것이다. 구체물이나 반구체물을 소재로 이용하고 있다는 점은 피아제의 이론에 바탕한 것으로 보인다. 피아제의 이론으로 구체적 조작기에 해당하는 학생들은 구체물을 다루는 직접적인 경험을 갖거나 그러한 경험에 바탕한 조작만이 가능하므로 순수히 언어적이거나 논리적인 조작은 다루지 않고 있는 것으로 볼 수 있다. 또한, 초등학교 시기에서는 아직 변수 개념을 학습하지 않고 있기 때문에 변수를 통하여 서술하고자 하는 일반적인 대상을 포괄하기는 어렵다는 점 때문에 한 가지 사례만을 다룰 수밖에 없는 것으로 보인다.

그러나, 이러한 추론 지도 방법에서는 예가 되는 한 가지 사례로부터 일반적인 원리를 유도하기 위한 명시적인 과정이 포함되어 있지 않기 때문에, 수업에서 다루는 한 가지 사례로부터 일반성을 파악하는 일은 교사의 재량이나 학생의 재량에 의존할 수밖에 없게 된다. 또한, 이러한 경험으로부터 일반성을 파악하는 것이 교육적으로 바람직한 것인지는 논의의 대상이 되는 내용인 것으로 보인다. 이러한 지도 방법을 세마데니(Semadeni, 1984)가 제안하는 '활동 증명'에 비추어 해석해 보자. 세마데니는 다음과 같이 '활동 증명'의 단계를 제안하고 있다.

1단계 : S의 특별한 경우를 선택하여라. 그 경우는 (특별한 특징이 없다는 점에서) 포괄적이어야 하며, 너무 복잡해도 너무 단순해도 안 된다(자명한 예는 나중에 일반화시키기가 특히 어렵다.). 그 경우에 대한 활동적이거나 영상적인 표현이나 범례적인 예를 선택하여라. 어떤 구체적이고 신체적인 활동(대상을 조작해보고 그림을 그리고 몸을 움직이는 것 등)을 수행하여 주어진 경우에 그 진술을 입증하여라.

2단계 : 일반적인 양식은 불변인 체 보존되지만 관련된 상수를 바꾸어가면서 다른 여러 가지 예를 선택하여라. 각 경우에 1단계에서와 같은 방법을 이용하면서 그 명제를 입증하여라.

3단계 : 더 이상 신체적인 활동을 필요로 하지 않을 때, 다른 많은 예에 대해서도 똑같은 것을 하는 방법을 안다는 확신이 들 때까지 그 방법을 계속해서 마음 속에서 수행하여라.

4단계 : 그러한 방법이 적용되는 경우를 분류해 보려고 시도하여라.

이러한 4단계에 비추어 본다면, 현재 우리 나라 초등학교에서 다루는 추론 지도 방법은 1단계에 머물러 있는 것으로 볼 수 있으며, 2단계 이후의 내용은 다루어지지 않고 있는 것으로 볼 수 있다. 따라서, 3단계에서 언급하고 있는 '다른 많은 예에 대해서도 똑같은 것을 하는 방법을 안다는 확신'을 가질 수 있는지의 문제는 교사나 학생의 재량으로 남겨지게 된다는 것이다. 앞서 언급한 바와 같이 이러한 확신을 가지는 것이 교육적으로 바람직한지는 논의의 대상이 될 것이나, 활동을 통한 경험적 수준의 추론을 통한 정당화 경험으로부터 자연스럽게 연역적 수준의 추론으로 이행할 수 있다면 그것이 더욱 바람직할 것으로 생각된다.

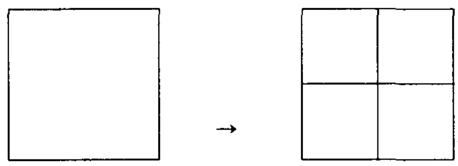
또한, 미야자키(Miyazaki, 1991)는 '예에 의한 설명'을 제안하고 있는 바, 실제적인 설명과 연역적인 설명의 중간 단계로서 기능하는 것이다. '예에 의한 설명'은 구체적인 행위에 의존하면서 어떤 추측의 일반성을 함께 보여주는 설명으로서, 추측의 구성, 경험적 방법에 의한 추측의 정당화, 일련의 해석 및 조작을 하나의 대응하는 스키마로서 확인하는 것, 그 스키마의 불변성에 대한 확신이라는 4단계로 이루어진다. 우리 나라 초등학교에서의 추론 지도를 이에 비추어 해석해 보더라도, 앞에서 살펴본 삼각형의 내각의 합이나 직사각형의 넓이 공식에 대한 스키마를 학생들에게 구성하고자 하는 명시적인 시도는 없는 것으로 볼 수 있을 것이다. 세마데니가 주장하는 방법적 확신을 가진다는 것은 바로 미야자키의 주장으로는 일반적인 스키마의 구성에 해당되는 것으로 볼 수 있을 것이며, 적어도 이를 위한 명시적인 시도는 없다고 볼 수 있는 것이다.

III. 연구 방법 및 내용

본 연구에서 조사하고자 하는 문제는 초등학교 5학년 학생들의 추론 능력은 어떠한가라는 것이며, 나아가 학생들 나름의 추론 방식을 통하여 일반적인 것을 발견할 수 있는가라는 것이다. 이 문제에 대한 조사 연구를 수행하기 위하여 무엇보다도 학생들이 받고 있는 사교육의 영향을 최소화하기 위하여 학생들이 접해 본 적이 거의 없을 것으로 생각되는 세 가지 주제를 선정하였다. 이 세 가지 주제와 각각의 주제에 대한 설명은 다음과 같다.

주제 1 : 정사각형 나누기

이 주제는 하나의 큰 정사각형을 주어진 개수만큼의 정사각형으로 분할하는 문제이다.



위의 그림에서 보는 바와 같이 정사각형 안에 두 개의 선분을 그림으로써 '언제나' 하나의 정사각형을 4개의 정사각형으로 나누는 것이 가능하다. 위의 그림은 하나에서 출발하여 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수만큼 분할하는 것이 가능함을 보여 주고 있으며, 9개의 정사각형으로 분할한 다음 위의 방법을 적용하면 9 이상의 3의 배수만큼 분할하는 것도 가능함을 알 수 있다. 그리고, 6

개와 8개로 분할하는 것이 가능하며, 8개로부터 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수만큼 분할하는 것도 가능함을 보일 수 있으므로, 결과적으로 2, 3, 5를 제외한 모든 자연수만큼의 정사각형으로 분할하는 것이 가능하게 된다. 이러한 과정을 순차적으로 학생들이 따라 가게 하면서, 위의 그림과 같은 일반적인 방법을 이용하여 추론할 수 있는지, 그리고, 분할할 수 있는 경우를 어느 정도까지 일반적으로 파악할 수 있는지를 조사하였다.

주제 2 : 점판 이야기

이 주제는 라병소(2000)의 연구에 기초한 것으로, 학생들이 접해 보지 못한 새로운 용어를 정의하고 이에 기초하여 추론하고 일반화할 수 있는 능력을 조사하고자 한 것이다. 이를 위하여 두 가지 용어를 도입하였다. 첫째로 도입한 용어는 '☆×◇ 점판'이라는 것으로, 평면에 가로로 ☆개의 점을 세로로 ◇ 줄만큼 같은 간격으로 배열한 점판을 의미한다. 둘째로 도입한 용어는 '완전색점판'과 '불완전색점판'이라는 것으로 점판에 검은색이나 흰색이 칠해진 네 점을 연결하여 직사각형이 되는 것이 하나라도 있을 때 완전색점판 이라고 하며, 점판에 검은색이나 흰색이 칠해진 네 점을 연결하여 직사각형을 하나도 만들 수 없을 때 불완전색점판 이라고 한다. 다음은 3×2 완전색점판과 3×2 불완전색점판의 예이다.

● ○ ● ● ○ ●	○ ● ○ ● ○ ○
3×2 완전색점판	3×2 불완전색점판

여기서 문제가 되는 것은 일반적인 ☆×◇ 점판 중에서 불완전색점판을 만들 수 없고 항상 완전색점판이 되는 것은 무엇인가라는 것이다. 라병소(2000)의 연구로부터 다음과 같은 일반적인 사실이 성립함을 알 수 있다.

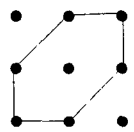
첫째, $n\times 3$(또는 $n\times 4$) 점판이 완전색점판이려면 $n\geq 7$이다.

둘째, $n\times 5$ 점판이 완전색점판이려면 $n\geq 5$이다.

학생들에게 단계적으로 문제를 해결하게 하면서 위와 같은 사실을 발견해 보게 하고, 각각의 부분적인 단계가 성립하는 이유에 대하여 어떻게 추론하는지를 살펴보았다.

주제 3 : 넓이 구하기

이 주제는 일반적으로 피크(Pick)의 정리로 알려진 것으로(하경미 외, 2001), 일반적인 점판에 그려진 도형의 넓이의 성질과 관련된다.



예를 들어 눈금의 간격이 1cm인 점판에 그려진 위의 도형의 넓이는 3이다. 이러한 도형에 대하여, 도형의 둘레에 걸쳐 있는 점의 수를 n, 도형 내부에 포함된 점의 수를 k, 도형의 넓이를 S라고 하면, $S=\frac{n}{2}+k-1$인 관계가 성립한다. 이러한 일반적인 원리에 이르기 위하여 도형 내부의 점의 개수를 0, 1, 2개로 고정시키고서 각각의 경우에 도형 둘레의 점의 수가 변화할 때 넓이의 변화 관계를 추론하도록 하고, 도형 둘레의 점의 수를 고정시키고서 각각의 경우에 도형 내부의 점의 수가 변화할 때 넓이의 변화 관계를 추론하도록 하여 일반적인 넓이 공식을 찾아낼 수 있는지를 보고자 하였다.

위의 세 가지 주제에 바탕한 문제지를 제작한 후 연구자들과 현장 교사들과의 세 차례의 검토 작업을 거쳐서 최종적인 문제지를 완성하였다(부록 1, 2, 3 참조). 이 실험지를 이용하여 강원도 원주 지역의 J 초등학교 5학년 학생 32명과 경기도 여주 지역의 Y 초등학교 5학년 학생 38명 등 모두 70명의 초등학교 5학년 학생에 대한 실험을 수행하였다. 실험은 2개 학교 모두 2002년 5월달의 2주와 3주, 4주째 수요일 오후에 시간 제한 없이 시행되었으며, 하루에 한 가지 주제에 대한 문제를 해결하도록 하였다. 주제 2의 '용어 약속하기' 단계에 대해서는 교사로 하여금 용어를 설명해 주게 하였고, 주제 3에서는 학생들이 아직 학교에서 넓이 개념을 학습하기 이전이었기 때문에 교사들에게 '예비 활동' 단계를 해결하는 학생들을 적극적으로 도와주어 점판에서 넓이를 구하는 기본적인 방법을 알려 주도록 하였다.

IV. 연구의 결과 및 논의

1. 주제 1 : 정사각형 나누기

주제 1의 문항 중 '문제 해결하기 1'에서는 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수만큼의 정사각형으로 나누는 방법을 묻고 있다. 이를 위한 기초 활동으로 제시된 1번에서 4번까지 문항의 정답률은 다음의 <표 1>과 같다.

<표 1> 주제 1의 1~4번 문항의 결과

(N=70)

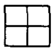
문항 번호	1	2	3			4		
정답자 수(명)	70	70	70	70	70	65	65	63
정답률(%)	100	100	100	100	100	92.9	92.9	90

1번에서 4번까지의 문항에서는 처음에 주어진 정사각형을 4개로 나누는 것으로 시작하여 계속하여 3개씩을 추가하면서 25개까지 나누어 보게 하고 있다. 1, 2, 3번 문항의 정답률에서 알 수 있듯이 학생들 전원이 1개에서 시작하여 16개까지는 나눌 수 있었으며, 더 나아가 19, 22, 25개로 진행하면서 정사각형을 분할하는 데 어려움을 겪는 학생들이 나타나기 시작하였다. 한편, 여기까지의 활동에 기초하여 직접적인 활동 없이 더 나눌 수 있는 경우 세 가지를 쓰고, 그 이유를 묻는 5번 문항에 대한 학생들의 반응은 다음의 <표 2>와 같다.

<표 2> 주제 1의 5번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	25	35.7
01	막연하게 계속 나누어진다고 생각함	9	12.9
10	28, 31, 34라고 쓰고, 이유는 쓰지 않음	1	1.4
11	28, 31, 34라고 쓰고, 막연히 계속 나누어진다고 답함	5	7.1
12	숫자는 틀렸으나, 3개씩 더 늘어난다고 답함	5	7.1
13	28, 31, 34라고 쓰고, 숫자가 3씩 커진다고 답함	6	8.6
20	28, 31, 34라고 쓰고 1개를 항상 4개로 나눌 수 있다고 답함	19	27.1

5번 문항에 대하여 학생들에게서 나온 최선의 반응은 유형 '20'에 해당하는 것으로, 4번까지 다루었던 25에 이어서 28, 31, 34라고 쓰고서, 정사각형 1개를 항상 4개로 나누어 3개를 추가할 수 있기 때문이라는 것이었으며, 27.1%인 19명의 학생들이 이와 같이 반응하였다. 그리고, 나눌 수 있는 세 가지 사례를 정확히 들었거나 이유를 정확히 쓴 학생의 수(반응 유형 10, 11, 12, 13, 20에 해당)는 36명으로서 전체의 51.4%에 달하였다. 특히, 반응 유형 '12'에 해당하는 학생들은 대개 와 같은 그림을 그려 놓아 정사각형 1개가 4개로 나누어진다는 생각은 하였지만, 명확히 28이나 31, 34와 같은 자연수로 연결시키지는 못하였다.

'문제 해결하기 2'에서는 9에서 시작하여 3의 배수만큼의 정사각형으로 나누는 방법을 묻고 있다. 이를 위한 기초 활동에 해당하는 6번과 7번 문항의 정답률은 다음의 <표 3>과 같다.

<표 3> 주제 1의 6, 7번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	6	7		
정답자 수(명)	63	45	49	45
정답률(%)	90	64.3	70	64.3

주어진 큰 정사각형을 9개로 나누게 하는 6번 문항의 정답률은 90%를 보이고 있다. 또한, 7번 문항에서는 앞의 '문제 해결하기 1'의 활동 경험을 단축하여 12개로 나누게 한 다음 바로 36개와 39개로 나누어보게 하였으며, 정답률은 64% 정도로 낮아졌다. 이는 무엇보다도 나누는 개수가 많아지면서 혼란을 겪는 학생들이 늘어난 데 그 이유가 있다. 특히, 적지 않은 학생들은 12개에서 36개로 늘어나면서 개수에만 주목하여 정사각형이 아닌 도형을 포함하기도 하였다. 한편, 여기까지의 활동에 기초하여 직접적인 활동 없이 더 나눌 수 있는 경우 세 가지를 쓰고, 그 이유를 묻는 8번 문항에 대한 학생들의 반응은 다음의 <표 4>와 같다.

<표 4> 주제 1의 8번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	28	40
01	막연하게 계속 나누어진다고 생각함	12	17.1
10	42, 45, 48이라고 쓰고, 이유는 쓰지 않음	1	1.4
11	42, 45, 48이라고 쓰고, 막연히 계속 나누어진다고 답함	8	11.4
12	숫자는 틀렸으나, 3개씩 더 늘어난다고 답함	4	5.7
13	42, 45, 48이라고 쓰고, 숫자가 3씩 커진다고 답함	4	5.7
20	42, 45, 48을 쓰고 1개를 항상 4개로 나눌 수 있다고 답함	13	18.6

'문제 해결하기 1'에 비하여 숫자가 커지면서 어려움을 겪은 학생들이 많아진 것으로 보인다. 그 결과 정답에 해당하는 유형 '20'에 해당하는 학생 수는 13명으로 <표 2>에 비하여 6명이 줄어들고, 유형 00과 01에 해당하는 학생이 3명 늘어난 결과를 보여 주고 있다.

'문제 해결하기 3'은 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수로 분할하는 것을 포함한다. 하지만, 그 출발점이 되는 8개로 나누기 위해서는 앞에서 이용했던 방법과는 달리, 16개로 나눈 다음 몇 개를 묶어서 큰 정사각형 1개와 작은 정사각형 7개로 나눌 필요가 있었다. 따라서, 9번에서는 이렇게 나눈 다음 묶는 방법을 아는지를 묻는 것과 동시에 3의 배수에서 빠진 6개로 나누는 방법을 묻고 있으며, 10번에서는 이 방법을 계속 적용하여 8개, 10개, 13개로 나누는 방법을 묻고 있다. 그리고, 11번에서는 8개에서 출발하여 11개와 14개로 나누게 하고 있으며, 31개를 포함하였다. 이는 14개에서 계속 3개를 추가하는 방법으로 구할 수 있는 것이 아니며, 오히려 '문제 해결하기 1'에서 다룬 내용이지만, 이를 통하여 일반적인 경우에 적용할 수 있다는 것을 인식하기를 기대하여 의도적으로 31개로 한 것이다. 이 세 개의 문항에 대한 학생들의 반응은 다음의 <표 5>와 같다.

<표 5> 주제 1의 9~11번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	9	10			11		
정답자 수(명)	59	50	53	52	36	38	27
정답률(%)	84.3	71.4	75.7	74.3	51.4	54.3	38.6

앞의 문제와는 다른 방법을 써야 하는 문제였지만 9번의 정답률은 84.3%였고 10번의 정답률도 70%를 상회하였다. 다만, 11번 문항의 정답률은 11개와 14개일 때 50%를 조금 상회하고 있으며, 상황이 바뀌고 숫자가 커진 31개를 묻는 문항에 대해서는 38.6%까지 떨어지고 있다. 상대적으로 11번의 처음 두 문항의 정답률이 앞의 활동에 비하여 낮은 이유로는 10번에 포함된 8개로 나누는 활동과의 관련이 직접적으로 보이지 않은 것을 들 수 있을 것 같고, 또한 앞의 두 활동에서는 동일한 크기의 정사각형을 4개씩 나누었던 반면, 8개로 나누어진 도형은 그 크기가 다르다는 것이 학생들에게 어려움의 요인이 되었을 것으로 보인다. 한편, 여기까지의 활동에 기초하여 직접적인 활동 없이 더 나눌 수 있는 경우 세 가지를 쓰고, 그 이유를 묻는 12번 문항에 대한 학생들의 반응은 다음의 <표 6>과 같다.

<표 6> 주제 1의 12번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	32	45.7
01	막연하게 계속 나누어진다고 생각함	10	14.3
10	34, 37, 40이라고 쓰고, 이유는 쓰지 않음	1	1.4
11	34, 37, 40이라고 쓰고, 막연히 계속 나누어진다고 답함	8	11.4
12	숫자는 틀렸으나, 3개씩 더 늘어난다고 답함	1	1.4
13	34, 37, 40이라고 쓰고, 숫자가 3씩 커진다고 답함	7	10
20	34, 37, 40을 쓰고 1개를 항상 4개로 나눌 수 있다고 답함	11	15.7

'문제 해결하기 3'으로 오면서 정답률은 15.7%까지 떨어지고 있으며, 반응 유형 '00'과 '01'의 수도 크게 늘어나고 있다. 이는 숫자의 크기와 함께 지금까지와는 다른 상황에서 방법을 적용해야 하는 데에 기인한 것으로 보인다.

'문제 해결하기 4'는 지금까지의 활동을 정리하는 것이다. 주어진 정사각형을 나눌 수 없는 경우를 발견하게 하기 위한 활동이 13번 문항이며, 지금까지의 활동에서 나눌 수 있는 경우를 모두 써보게 하는 것이 14번 문항이다. 각각의 문항에 대한 결과는 다음의 <표 7> 및

<표 8>과 같다.

<표 7> 주제 1의 13번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	13					
정답자 수(명)	53	55	57	54	36	47
정답률(%)	75.7	78.6	81.4	77.1	51.4	67.1

<표 8> 주제 1의 14번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못함	37	52.9
20	앞의 활동에서 나온 것만 나열함	7	10
21	앞의 활동에서 나온 것에서 1~5개가 빠짐	11	15.7
22	앞의 활동에서 나온 것에서 6개 이상 빠짐	2	2.9
30	앞의 활동에서 나온 것 사이에 빠진 자연수를 모두 추가함	2	2.9
31	앞의 활동에서 나온 것에 몇 개를 추가함	3	4.3
40	2, 3, 5를 제외한 모든 자연수라고 답함	4	5.7
41	무한히 많은 수를 언급하였지만 모든 자연수는 아님	4	5.7

먼저, 13번 문항에서는 학생들이 6개로 나누는 다섯째 문항을 가장 어려워했음을 알 수 있다. 9개로 나눈 그림을 주고서 6개로 나누게 했던 9번 문항의 정답률이 84.3%였음에 비하여, 그림을 주지 않았을 때에는 앞에서 해 본 문항임에도 정답률이 51.4%로 낮아진 것이다. 그리고, 2, 3, 5개로 나누게 하는 첫째, 둘째, 넷째 문항은 아무 것도 쓰지 않는 것이 정답이기 때문에 몰라서 쓰지 못한 학생과 구분되지 않는다는 문제점이 있다. 그리고, 앞의 세 가지 활동과 13번의 활동에 기초하여, 정사각형을 나눌 수 있는 방법을 모두 써 보는 14번 문항에서 37명의 학생들이 아무 것도 쓰지 못하였다. 그리고, 20명의 학생들은 앞의 활동에서 나온 것만을 쓰거나 그 중 몇 개를 빠뜨리고 쓰는 반응을 보여 주었으며(유형 20, 21, 22), 5명의 학생들은 앞의 활동에서 나온 것에 몇 개를 추가하여 답하였다(유형 30, 31). 그리고, 앞의 활동으로부터 2, 3, 5를 제외한 모든 자연수라고 답한 학생이 4명이 있었으며, '1, 4, 6, 9, ...' 또는 '4, 7, 10, 13, ...'과 같이 특정한 수로부터 계속 3개씩 늘어난다는 반응을 보인 학생이 4명이 있었다.

2. 주제 2 : 점판 이야기

주제 2의 '문제 해결하기 1'에서는 ☆×◇ 점판 중에서 한 쪽이 2인 경우에 불완전색점판을 만들 수 있는 가능성을 묻고 있다. 1번에서 3번까지 3개 문항에 대한 결과는 다음의 <표 9>와 같다.

<표 9> 주제 2의 1~3번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	1				2	3
정답자 수(명)	61	57	51	40	39	41
정답률(%)	87.1	81.4	72.9	57.1	55.7	58.6

한 수가 2인 점판을 불완전색점판으로 만드는 가장 보편적인 방법 두 가지는 두 줄 중에서 한 줄을 모두 검은 색으로 칠하거나 아니면 교대로 검은색을 칠하는 것이다. 위의 결과로부터 숫자가 1씩 커질수록 정답자 수는 조금씩 줄어들어 약 40명 정도에 수렴하고 있음을 알 수 있다. 따라서, 2가 포함된 점판을 불완전색점판으로 만드는 일반적인 규칙을 발견한 학생은 대략 57% 정도인 40명 정도임을 알 수 있다.

'문제 해결하기 2'에서는 가로 첫째 줄을 모두 검은색으로 칠한 $n\times 3$ 점판을 불완전색점판으로 만드는 방법을 묻고 있다. 이 경우 불완전색점판을 만들 수 있는 것은 3×3 점판 뿐이며, n이 4 이상인 경우는 모두 완전색점판이 된다. 4~6번까지 문항에 대한 결과는 다음의 <표 10> 및 <표 11>, <표 12>와 같다.

<표 10> 주제 2의 4번 문항의 결과

(N=70)

정답자 수(명)	54	26	28
정답률(%)	77.1	37.1	40

<표 11> 주제 2의 5번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	24	34.3
01	모두 만들 수 있다고 답함	8	11.4
02	3×3 점판이라고 답함	2	2.9
11	4×3 점판을 들고, 시도해 보았더니 안 된다고 답함	7	10
12	4×3 점판을 들었으나 이유는 쓰지 않음	2	2.9
13	5×3 점판을 들고, 시도해 보았더니 안 된다고 답함	8	11.4
14	5×3 점판을 들었으나 이유는 쓰지 않음	2	2.9
20	4×3과 5×3 점판을 들고, 시도해 보니 안 된다고 답함	15	21.4
21	4×3과 5×3 점판을 들었으나 이유는 쓰지 않음	2	2.9

<표 12> 주제 2의 6번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	23	32.9
01	그림을 그려서 시도한 흔적은 있으나 답이 없음	5	7.1
02	만들 수 있다고 답하고 부적절한 논리적 설명을 시도함	7	10
03	잘못된 예에 기인하여 만들 수 있다고 답함	12	17.1
20	만들 수 없다고 답하고, 시도해 보니 안 된다고 답함	19	27.1
21	만들 수 없다고 답했으나, 이유는 쓰지 않음	2	2.9
30	앞의 것보다 더 커서 안 된다는 관계적 설명을 함	2	2.9

<표 10>에서 보는 바와 같이 첫째 줄을 모두 검은색으로 칠한 n×3 점판과 관련하여 불완전색점판을 그릴 수 있는 3×3 점판의 정답률에 비하여 그릴 수 없는 4×3 점판과 5×3 점판에 대한 정답률은 절반 수준으로 떨어지고 있다. 이는 4번 문항을 채점하면서 5번 문항을 고려했기 때문이기도 하다. 즉, 아무 것도 쓰지 않은 경우 중에서도 5번에서 만들 수 없는 경우로 4×3 점판이나 5×3 점판이 포함되어 있지 않으면 각각을 오답으로 처리한 결과이다. 5번과 6번의 결과에서 알 수 있듯이, 전체의 약 $\frac{1}{3}$에 해당하는 학생들이 아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 쓰는 반응을 보이고 있으며, 5번에서 불완전색점판을 만들 수 없는 두 가지 경우를 정확히 찾은 학생은 17명이었다. 이 중 2명은 아무 이유를 쓰지 못하였으며, 나머지 15명은 점판 그림을 그린 다음 시행착오의 과정을 거쳐서 만들 수 없다고 대답하였다. 6번에서 5번에 비하여 오히려 정답률이 높아진 것은, 5번에서는 두 개를 찾아야 했던 반면 6번은 6×3 점판 하나만 조사하면 되었기 때문이었을 가능성이 커 보인다.

특기할만한 사실은 이미 4번과 5번에서 다룬 문항 중에서 불완전색점판을 만들 수 없는 경우가 있었기 때문에 6번은 그보다 더 큰 경우이므로 만들 수 없다는 관계적 설명을 시도한 학생이 2명이 있었다는 점이다. 이 2명의 학생들은 이미 이 단계부터 '어떤 완전색점판보다 더 큰 점판은 완전색점판이다.'라는 스키마를 구성해 가고 있는 것으로 보인다. 주제 2에 대하여 결과를 추론할 수 있는 방법은 우선 경험적으로 불완전색점판을 만들 수 있는 가장 큰 것을 찾고, 그 다음 단계부터는 어디에 칠해도 완전색점판이 된다는 것으로, 어느 정도 숫자가 커졌을 때에 관계적인 설명을 제공할 수 있다면 주어진 주제에 대한 일반적인 내용을 파악한 것으로 보는 것이 적절할 것으로 보인다.

'문제 해결하기 3'에서는 가로 첫째 줄을 모두 검은색으로 칠한 n×4 점판을 불완전색점판으로 만드는 방법을 묻고 있다. 이 경우 불완전색점판을 만들 수 있는 것은 3×4 점판 뿐이며, n이 4 이상인 경우는 모두 완전색점판이 된다. 7~9번까지 문항에 대한 결과는 다음의 <표 13> 및 <표 14>, <표 15>와 같다.

<표 13> 주제 2의 7번 문항의 결과

(N=70)

정답자 수(명)	32	29	29
정답률(%)	45.7	41.4	41.4

<표 14> 주제 2의 8번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	28	40.0
01	모두 만들 수 있다고 답함	6	8.6
02	모두 만들 수 없다고 답함	4	5.7
03	3×4 점판이라고 답함	1	1.4
11	4×4 점판을 들고, 시도해 보았더니 안 된다고 답함	8	11.4
12	4×4 점판을 들었으나, 이유는 쓰지 않음	0	0.0
13	5×4 점판을 들고, 시도해 보았더니 안 된다고 답함	5	7.1
14	5×4 점판을 들었으나 이유는 쓰지 않음	1	1.4
20	4×4와 5×4 점판을 들고, 시도해 보니 안 된다고 답함	16	22.9
21	4×4와 5×4 점판을 들었으나 이유는 쓰지 않음	1	1.4

<표 15> 주제 2의 9번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	21	32.9
01	그림을 그려서 시도한 흔적은 있으나 답이 없음	10	7.1
02	만들 수 있다고 답하고 부적절한 논리적 설명을 시도함	7	10
03	잘못된 예에 기인하여 만들 수 있다고 답함	11	17.1
20	만들 수 없다고 답하고, 시도해 보니 안 된다고 답함	16	27.1
21	만들 수 없다고 답했으나, 이유는 쓰지 않음	1	2.9
30	앞의 것보다 더 커서 안 된다는 관계적 설명을 함	4	2.9

바로 앞의 '문제 해결하기 2'와 유사한 주제이기도 하거니와 첫 번째 문항의 정답률은 대략 40% 정도로 수렴하고 있음을 알 수 있다. 그리고, 불완전색점판을 만들 수 없는 경우와 6×4 점판에 대하여 묻는 8번과 9번 문항에 대한 응답 분포도 앞의 5번과 6번 문항의 분포와 비슷함을 알 수 있다. 다만, 6번 문항에서 점판의 크기와 관련된 관계적 설명을 했던 학생이 2명이었음에 비하여 9번 문항에서는 4명으로 늘어났다는 것에 주목할 필요가 있는 것으로 보인다. 2명이라는 차이가 그리 큰 것은 아니겠지만, 어떤 완전색점판보다 큰 점판은 완전색점판이라는 보다 일반적인 원리를 파악하는 학생이 점진적으로 늘고 있음을 알 수 있는 것이다.

'문제 해결하기 4'에서는 첫줄을 검은색으로 칠한다는 조건이 없는 n×3 점판에 대한 성질을 묻고 있다. 완전색점판이 되는 것은 n이 7 이상인 경우로서 이를 발견하기 위해서는 n이 3, 4, 5, 6인 경우를 모두 정확히 시도해 보아야 한다는 점에서, 학생들에게 매우 까다로왔던 것으로 보인다. 10~12번 문항의 결과는 다음의 <표 16> 및 <표 17>, <표 18>과 같다.

<표 16> 주제 2의 10번 문항의 결과

(N=70)

정답자 수(명)	41	29	19	10	15
정답률(%)	58.6	41.4	27.1	14.3	21.4

<표 17> 주제 2의 11번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률(%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	34	48.6
01	모두 만들 수 있다고 답함	14	20
02	모두 만들 수 없다고 답함	0	0
03	7×3 점판이 아닌 다른 점판 하나로 답함	7	10
04	7×3 점판이 아닌 다른 점판 두 개로 답함	1	1.4
11	7×3 점판을 포함하여 두 개 이상의 점판으로 답함	6	8.6
20	7×3 점판을 들고, 시도해 보니 안 된다고 답함	7	10
21	7×3 점판을 들었으나 이유는 쓰지 않음	1	1.4

<표 18> 주제 2의 12번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	28	40
01	그림을 그려서 시도한 흔적은 있으나 답이 없음	6	8.6
02	만들 수 있다고 답하고 부적절한 논리적 설명을 시도함	4	5.7
03	잘못된 예에 기인하여 만들 수 있다고 답함	10	14.3
20	만들 수 없다고 답하고, 시도해 보니 안 된다고 답함	19	27.1
21	만들 수 없다고 답했으나, 이유는 쓰지 않음	1	1.4
30	앞의 것보다 더 커서 안 된다는 관계적 설명을 함	2	2.9

<표 16>과 <표 17>의 결과는 학생들이 '문제 해결하기 4'에 포함된 활동을 매우 어려워했음을 보여 주고 있다. 먼저 10번 문항에 포함된 5개의 문항에 대한 정답률은 6×3 점판까지 낮아지다가 7×3 점판에서 다시 높아지는 결과를 보이고 있다. 이는 마지막에 제시된 7×3 점판만이 완전색점판이기 때문에 여기에 이르는 동안 많은 학생들이 오류를 범했기 때문이며, 특히, 이미 6×3 점판 정도부터 완전색점판이라고 생각한 학생들이 상당수 있었기 때문이다. 그리고, 이 결과로 11번 문항에서도 불완전색점판을 만들 수 있는 4개를 정확히 찾은 학생은 8명에 불과하였다. 그러나, <표 18>과 같이 8×3 점판에 대한 정답률은 다시 높아져서 6번이나 9번과 비슷한 결과를 보여 주고 있다. 특히, 11번 문항에서 7×3 점판을 비롯한 여러 개를 선택한 6명의 학생들은 모두 12번 문항을 정확히 해결하였다. 그리고, 앞의 예와 관련된 관계적 설명을 시도한 학생은 2명으로 줄어들었는데, 이는 앞의 활동과 문제 상황이 다를 뿐만 아니라, 더 많은 시행착오를 경험해야 했던 때문인 것으로 생각된다.

'문제 해결하기 5'에서는 첫줄을 모두 검은색으로 칠한 n×5 점판에 대한 성질을 묻고 있다. 이 경우는 n이 3이상인 경우부터 모두 완전색점판이 된다는 점 때문에 앞에서 다루었던 활동과는 차이가 있다. 13~15번 문항의 결과는 다음의 <표 19> 및 <표 20>, <표 21>과 같다.

<표 19> 주제 2의 13번 문항의 결과

(N=70)

정답자 수(명)	11	27
정답률(%)	15.7	38.6

<표 20> 주제 2의 14번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	30	42.9
01	모두 만들 수 있다고 답함	20	28.6
11	3×5 점판을 들고, 시도해 보니 안 된다고 답함	3	4.3
12	4×5 점판을 들고, 시도해 보니 안 된다고 답함	17	24.3
13	4×5 점판을 들었으나 이유는 쓰지 않음	2	2.9
20	3×5와 4×5 점판을 들고, 시도해 보니 안 된다고 답함	8	11.4

<표 21> 주제 2의 15번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	27	38.6
01	그림을 그려서 시도한 흔적은 있으나 답이 없음	6	8.6
02	만들 수 있다고 답하고 부적절한 논리적 설명을 시도함	2	2.9
03	잘못된 예에 기인하여 만들 수 있다고 답함	8	11.4
20	만들 수 없다고 답하고, 시도해 보니 안 된다고 답함	24	34.3
30	앞의 것보다 더 커서 안 된다는 관계적 설명을 함	3	4.3

13번 문항의 결과에서 첫 번째 문항의 정답률이 15.7%로 상당히 낮고, 두 번째 문항에서 대략 두 배 정도로 높아지고 있다. 이는 이전까지의 활동에서는 항상 처음 몇 개는 불완전색점판을 만들 수 있었던 반면, 13번에서는 처음부터 완전색점판이 나오기 때문에 혼란을 겪은 학생들이 많았기 때문인 것으로 풀이된다. 이렇듯

상황이 다르다는 것은 14번에도 영향을 주어서, <표 20>에서 정확히 두 개의 점판을 찾은 학생은 8명에 불과하며, 4×5 점판 하나만을 든 학생이 19명으로 앞의 활동과 비교하여 상당히 많음을 알 수 있다. 그러나, <표 21>에서 보여 주는 15번의 결과는 앞에서 다룬 여러 활동에 비하여 보다 높은 정답률을 보여 주고 있다. 첫줄이 색칠된 $n\times3$ 점판에서도 정답을 한 학생 수는 21~22명이었음에 비하여 여기서는 27명이 정답을 하였고, 그 중 3명의 학생이 관계적으로 설명을 하였다. 결과적으로 '문제 해결하기 5'에서는 모두 완전색점판인 예가 나옴으로써 완전색점판을 정확히 찾는 데는 학생들이 어려움을 겪었지만, 이보다 큰 점판에 대한 생각은 앞의 여러 활동을 거치면서 보다 향상되고 있음을 알 수 있다.

'문제 해결하기 6'에서는 가장 큰 경우와 지금까지의 활동을 종합하는 활동을 다루고 있다. 처음 세 문항은 일반적인 $n\times5$ 점판에 대한 것을 묻고 있으며, 결과는 다음의 <표 22> 및 <표 23>, <표 24>와 같다.

<표 22> 주제 2의 16번 문항의 결과

(N=70)

정답자 수(명)	15	8	21
정답률(%)	21.4	11.4	30

<표 23> 주제 2의 17번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률(%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	31	44.3
01	모두 만들 수 있다고 답함	14	20
02	모두 만들 수 없다고 답함	1	1.4
03	3×5와 4×5 점판 중에서 하나로 답함	3	4.3
04	3×5와 4×5 점판으로 답함	2	2.9
11	4×5와 5×5 점판으로 답함	1	1.4
20	5×5 점판을 들고, 시도해 보니 안 된다고 답함	16	22.9
21	5×5 점판을 들었으나 이유는 쓰지 않음	2	2.9

<표 24> 주제 2의 18번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률(%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	29	41.4
01	그림을 그려서 시도한 흔적은 있으나 답이 없음	5	7.1
02	만들 수 있다고 답하고 부적절한 논리적 설명을 시도함	5	7.1
03	잘못된 예에 기인하여 만들 수 있다고 답함	9	12.9
20	만들 수 없다고 답하고, 시도해 보니 안 된다고 답함	16	22.9
21	만들 수 없다고 답했지만 이유는 쓰지 않음	4	5.7
30	앞의 것보다 더 커서 안 된다는 관계적 설명을 함	2	2.9

16번 문항에 대한 학생들의 정답률은 앞의 활동에 비하여 전반적으로 낮아진 편이다. 이는 무엇보다도 점판이 넓어지면서 완전색점판 여부를 따지는 과정이 점점 복잡해진 데 따른 결과인 것으로 보인다. 다만, 제시된 점판 중 가장 큰 5×5 점판에 대해서는 완전색점판임을 발견하기가 더 쉬웠던 것으로 보인다. 완전색점판을 찾는 17번 문항에서는 정확히 찾은 학생이 18명으로서, 앞의 활동과 비교하여 큰 차이가 없다. 또한, 6×5 점판이 완전색점판인지를 묻는 18번 문항에 대한 반응 분포와 정답률도 앞에서의 활동과 비슷하다.

마지막으로, 지금까지의 활동을 통하여 불완전색점판인 것으로 점이 가장 많은 경우를 그려보게 하는 19번 문항에서 학생들의 반응은 매우 다양하게 나타났다. 사실, 순수히 점의 수로만 따진다면 $n\times2$ 점판에서 n을 얼마든지 크게 할 수 있으므로 엄밀한 의미에서는 정답은 없는 문항이다. 2가 포함되는 경우를 제외한다면, 가장 점이 많은 경우는 5×4 점판이며, 다음으로 6×3 점판이 나오게 된다. 다만, 2가 포함된 경우를 제외한다는 제한을 둘 경우 초등학생들 수준에서 문항 수준이 너무 복잡해질 우려가 있어서, 검사 장면에서 이러한 답을 쓰는 학생이 나올 경우 이 경우는 제외하도록 구두로 지시하기로 계획하였다. 하지만, 다음의 <표 25>의 반응 분포에서 보는 바와 같이 이러한 답을 제시한 학생은 없었다.

<표 25> 주제 2의 19번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	47	41.4
01	완전색점판이 되는 예를 든 경우	8	11.4
05	3×3 점판의 예를 든 경우	1	1.4
06	5×3 점판의 예를 든 경우	1	1.4
07	6×3 점판의 예를 든 경우	7	10
10	5×4 또는 4×5 점판의 예를 든 경우	5	7.1
11	6×4 점판의 예를 든 경우	1	1.4

이 문항에서 대부분이 아무 것도 쓰지 못한 반응유형 '00'에 해당하는 학생이 47명이나 있었다. 앞에서 진행된 각각의 활동이 쉽지 않았기 때문에 많은 학생들이 이를 종합적으로 사고하기에 더욱 어려움을 겪었던 것으로 생각된다. 그리고, 앞의 활동을 통하여 완전색점판임이 밝혀진 예를 든 학생이 8명이 있었고, 이 중 4명의 학생은 5×5 점판을 선택하였다. 정답으로 예상한 5×4 또는 4×5 점판을 선택한 학생은 단 5명이 있었으며, 1명의 학생은 앞에서 다루지 않은 6×4 점판으로 답하였다. 그리고, 불완전색점판이 되는 경우를 쓴 학생 중 가장 많은 7명의 학생이 선택한 답은 6×3 점판이었다. 이는 옆으로 가장 넓어 보이는 것이 6×3 점판이라는 것이 그 이유가 될 것 같다.

3. 주제 3 : 넓이 구하기

실험에 참여한 학생들이 모두 넓이 단원을 학습하기 이전이었기 때문에 주제 3에서는 우선 예비 활동을 통하여 교사의 도움을 받아 점판에 다각형을 그려보고, 그 넓이를 구하는 경험을 해 보게 하였다. 그렇기에 다음 <표 26>에 제시된 1번에서 5번까지의 결과는 순수히 학생들의 힘으로 답한 결과는 아니라는 점에 유의할 필요가 있다. 또한, 1번과 2번 문항을 한 문항으로 채점하였는데, 1번에서 그린 도형의 넓이를 2번에서 정확히 구한 경우를 정답으로 처리하였다.

<표 26> 주제 3의 1~5번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	1, 2						3					
정답자 수(명)	37	39	39	41	39	39	63	46	52	52	41	43
정답률 (%)	52.9	55.7	55.7	58.6	55.7	55.7	90	65.7	74.3	74.3	58.6	61.4
문항 번호	4						5					
정답자 수(명)	45	38	35	37	37	29	41	33	26	24	20	24
정답률 (%)	64.3	54.3	50	52.9	52.9	41.4	58.6	47.1	37.1	34.3	28.6	34.3

점판 위에 자유롭게 다각형을 그리고 넓이를 구하는 1번과 2번 문항은 대략 55% 정도의 정답률을 보여 주고 있다. 이 문항을 해결하는 과정에서 교사의 지도가 포함되었기 때문에 다음 3번 문항의 정답률은 보다 높아진 것으로 보인다. 3번에서 5번까지는 도형 내부의 점을 포함하지 않는 것과 1개 포함하는 것, 2개 포함하는 것의 순서로 자유롭게 3개씩 도형을 그리고 넓이를 구하는 것이다. <표 26>에 제시된 정답률은 우선 3개의 다른 도형 각각에 대하여 채점을 하고, 다음으로 학생이 그린 도형의 넓이가 옳은지를 차례대로 채점한 것이다. 도형 안에 포함되는 점의 수가 많을수록 다각형을 그리거나 넓이를 구하는 데 있어서 점점 어려워하는 경향을 보여 주고 있다. 교사는 5번 문항까지 부분적으로 개입하였으며, 다음의 활동부터는 개입하지 않았다.

'문제 해결하기 1'에서는 도형 내부에 한 점도 포함하지 않는 경우에 둘레의 점의 수를 4에서 9까지 1씩 증가시키면서 넓이가 변화하는 규칙을 찾고 그 이유를 찾아보게 하는 것이다. 여기에 포함된 6번과 7번 문항에 대한 학생들의 반응은 다음의 <표 27>과 <표 28>에 제시되어 있다.

<표 27> 주제 3의 6번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	6											
정답자 수(명)	49	47	49	40	46	38	43	38	41	35	38	32
정답률 (%)	70	67.1	70	57.1	65.7	54.3	61.4	54.3	58.6	50	54.3	45.7

<표 28> 주제 3의 7번 문항의 결과[2)]

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	30	42.9
01	1씩 커진다고 답함	4	5.7
02	1 또는 1.5와 같이 일관된 수치를 제시하지 않음	2	2.9
10	0.5라고 답했지만 이유를 쓰지 않음	14	20
11	0.5라고 답하고, 숫자 자체로부터 규칙을 찾음	5	7.1
12	0.5라고 답하고, 두 예를 들어 차이를 설명함	4	5.7
13	0.5라고 답하고, 막연히 커지기 때문이라고 답함	4	5.7
20	0.5라고 답하고, ⊿ 만큼 커지기 때문이라고 답함	7	10

내부의 점을 포함하지 않고 둘레의 점의 수가 4개에서 9개까지인 다각형을 그리고 넓이를 묻는 6번 문항의 정답률은 대략 40~60%를 보이고 있다. 전반적으로는 점의 개수가 많아질수록 학생들이 어려워하고 있으나, 둘레의 점이 8개인 경우가 7개인 경우보다는 더 쉬웠다는 점이 주목할 만하다. 이는 가로와 세로가 2인 정사각형 모양에서 꼭지점 하나를 중심으로 꺾어서 8개인 도형을 그린 학생이 적지 않았고, 이 도형을 찾는 편이 둘레의 점이 7개인 도형을 찾는 것보다는 쉬웠다는 것을 의미한다. 6번의 결과로 완성되는 표에서 넓이가 증가하는 규칙을 찾고 이유를 쓰는 7번 문항에서 0.5라는 답을 구한 학생은 거의 50%인 34명이었다. 하지만, 6번 문항으로부터 둘레의 점이 1개가 늘 때마다 넓이가 0.5인 직각삼각형만큼의 넓이가 더 생겨난다는 사실을 정확히 이유로 든 학생은 10%인 7명이었다. 이유를 쓰지 못한 학생이 20%인 14명이었으며, 자신이 정리한 표에서 숫자가 0.5씩 커지기 때문이라고 답한 학생이 5명이 있었다. 그리고, 6번에서 그린 예 중 특정한 연속된 두 예를 들거나 막연히 커지기 때문이라고 답한 학생이 각각 4명씩 있었다.

2) 학생들은 0.5라고 쓰기도 하고 $\frac{1}{2}$이라고 쓰기도 하였으나, 여기서는 편의상 0.5로 표현하였다.

'문제 해결하기 2'에서는 도형 내부에 한 점을 포함하는 경우에 둘레의 점의 수를 4에서 9까지 1씩 증가시키면서 넓이가 변화하는 규칙을 찾고 그 이유를 찾아보게 하는 것이다. 여기에 포함된 8번과 9번 문항에 대한 학생들의 반응은 다음의 <표 29>와 <표 30>에 제시되어 있다.

<표 29> 주제 3의 8번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	8											
정답자 수(명)	51	42	48	42	44	39	36	29	31	31	35	30
정답률 (%)	72.9	60	68.8	60	63.9	55.7	51.4	41.4	44.3	44.3	50	42.9

<표 30> 주제 3의 9번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	29	41.4
01	1씩 커진다고 답함	4	5.7
02	1 또는 1.5와 같이 일관된 수치를 제시하지 않음	5	7.1
10	0.5라고 답했지만 이유를 쓰지 않음	12	17.1
11	0.5라고 답하고, 숫자 자체로부터 규칙을 찾음	5	7.1
12	0.5라고 답하고, 두 예를 들어 차이를 설명함	3	4.3
13	0.5라고 답하고, 막연히 커지기 때문이라고 답함	7	10
20	0.5라고 답하고, ⊿ 만큼 커지기 때문이라고 답함	5	7.1

도형 내부의 점이 1개 포함된 경우의 결과는 점을 포함하지 않는 경우와 대략적으로 비슷한 것으로 나타났다. 다만, 8번 문항의 정답률이 대략 40~50% 정도로서, 6번 문항에 비하여 다소 어려움을 느꼈음을 알 수 있다. 9번 문항의 결과는 7번 문항의 결과와 비슷하지만, 반응 유형 '02'에 해당하는 일관된 수치를 제시하지 못한 학생과 '24'에 해당하는 막연히 커지기 때문이라고 답한 학생이 각각 3명 늘었고, 정확히 답한 학생이 2명이 줄어들었다

는 차이가 있다.

'문제 해결하기 3'에서는 도형 내부에 두 점을 포함하는 경우에 둘레의 점의 수를 4에서 9까지 1씩 증가시키면서 넓이가 변화하는 규칙을 찾고 그 이유를 찾아보게 하는 것이다. 여기에 포함된 10번과 11번 문항에 대한 학생들의 반응은 다음의 <표 31>과 <표 32>에 제시되어 있다.

<표 31> 주제 3의 10번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	10											
정답자 수(명)	38	42	43	39	41	35	26	27	32	33	36	30
정답률(%)	54.3	60	61.4	55.7	58.6	50	37.1	38.6	45.7	47.1	51.4	42.9

<표 32> 주제 3의 11번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	39	55.7
01	1씩 커진다고 답함	0	0
02	1 또는 1.5와 같이 일관된 수치를 제시하지 않음	2	2.9
10	0.5라고 답했지만 이유를 쓰지 않음	14	20
11	0.5라고 답하고, 숫자 자체로부터 규칙을 찾음	6	8.6
12	0.5라고 답하고, 두 예를 들어 차이를 설명함	3	4.3
13	0.5라고 답하고, 막연히 커지기 때문이라고 답함	5	7.1
20	0.5라고 답하고, ⊿ 만큼 커지기 때문이라고 답함	1	1.4

도형 내부에 포함되는 점이 2개로 되면서 앞의 활동에 비하여 정답률은 다소 떨어졌다. 3개의 도형을 그리고 넓이를 구하는 10번 문항에서는 둘레의 점이 4개인 경우와 5개인 경우가 매우 어려웠고, 점의 수가 6개 이상인 것이 더 쉬웠던 것으로 보인다. 넓이가 커지는 규칙을 찾고 그 이유를 설명하는 11번 문항의 반응 분포를 보면 도형 내부의 점이 없거나 1개 있는 것에 비하여 크게 어려웠음을 알 수 있다. 무엇보다도 처음에 둘레의 점이 4개나 5개인 경우를 찾기가 쉽지 않았기 때문에 넓이가 0.5인 직각삼각형만큼 넓이가 커진다는 규칙을 발견하기가 어려웠던 것 같고, 이로 인하여 1명만이 적절한 이유를 들어 답하였다. 그리고, 앞의 활동에서 반응 유형 '01'이나 '02'에 해당하는 학생들 대부분이 여기서는 의미 있는 답을 제시하지 못하였다.

'문제 해결하기 4'에서는 둘레의 점의 수를 고정시키고 도형 내부의 점의 증가에 따른 넓이의 변화 관계와 도형의 넓이에 대한 일반적인 표현을 조사하였다. 먼저, 둘레의 점이 5개이고 도형 내부의 점이 0, 1, 2개로 변화할 때의 관계를 묻는 12번과 13번 문항에 대한 결과는 다음의 <표 33>과 <표 34>에 제시되어 있다.

<표 33> 주제 3의 12번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	10					
정답자 수(명)	45	43	33	39	35	27
정답률(%)	64.3	61.4	47.1	55.7	50	38.6

<표 34> 주제 3의 13번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	38	54.3
01	1이 아닌 다른 숫자로 답함	2	2.9
02	1 또는 1.5와 같이 일관된 수치를 제시하지 않음	1	1.4
10	1이라고 답했지만 이유를 쓰지 않음	13	18.6
11	1이라고 답하고, 숫자 자체로부터 규칙을 찾음	6	8.6
12	1이라고 답하고, 두 예를 들어 차이를 설명함	2	2.9
13	1이라고 답하고, 막연히 커지기 때문이라고 답함	4	5.7
20	1이라고 답하고, □나 ⊿ 2개 만큼 커지기 때문이라고 답함	4	5.7

12번 문항의 결과는 도형 내부의 점의 수가 늘어날수록 학생들이 넓이를 구하기 어려워함을 보여 주고 있다. 특히 도형 내부의 점의 수가 2개인 경우의 정답률 38.6%는 10번에서의 정답률과 일치하는 것이다. 넓이가 증가하는 규칙과 이유를 묻는 13번 문항에서 1씩 커진다는 규칙을 찾은 학생은 41.4%인 29명이었다. 다만, 그 이유

로서 ⊿ 두 개 또는 □ 한 개가 늘어난다고 답한 학생은 4명이었으며, 13명의 학생이 이유를 쓰지 못하였다. 그리고, 대략적인 분포는 11번에서 보여 주었던 분포와 비슷한 양상을 보이고 있다.

둘레의 점이 6개이고 도형 내부의 점이 0, 1, 2개로 변화할 때의 관계를 묻는 14번과 15번 문항에 대한 결과는 다음의 <표 35>과 <표 36>에 제시되어 있다.

<표 35> 주제 3의 14번 문항의 결과

(N=70)

문항 번호	10					
정답자 수(명)	38	39	39	36	30	32
정답률(%)	54.3	55.7	55.7	51.4	42.9	45.7

<표 36> 주제 3의 15번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	35	50
01	1이 아닌 다른 숫자로 답함	5	7.1
02	1 또는 1.5와 같이 일관된 수치를 제시하지 않음	3	4.3
10	1이라고 답했지만 이유를 쓰지 않음	13	18.6
11	1이라고 답하고, 숫자 자체로부터 규칙을 찾음	2	2.9
12	1이라고 답하고, 두 예를 들어 차이를 설명함	2	2.9
13	1이라고 답하고, 막연히 커지기 때문이라고 답함	7	10
20	1이라고 답하고, □나 ⊿ 2개 만큼 커지기 때문이라고 답함	3	4.3

도형 둘레의 점의 수가 6개이고 내부의 점의 수가 변화할 때 3개의 도형의 그림과 넓이에 대한 14번 문항의 정답률은 12번 문항에 비하여 다소 낮아졌다. 다만, 내부의 점이 2개인 경우는 12번보다 높으며, 10번의 결과와 일치하고 있다. 넓이가 증가하는 규칙과 이유를 찾는 15번 문항의 결과도 대략적으로는 13번 문항과 비슷한 것으로 나타났다. 결과적으로 대략 40% 정도의 학생들이 넓이를 정확히 구하고 그 규칙을 바르게 찾아내었음을 알 수 있으며, 정확한 이유를 제시한 학생은 약 5% 정도임을 알 수 있다.

마지막으로, 지금까지의 활동으로부터 넓이를 구하는 일반적인 식인 $\frac{\square}{2}+\triangle-1$을 찾아보게 하는 16번 문항에 대한 결과가 다음의 <표 37>에 제시되어 있다.

<표 37> 주제 3의 16번 문항의 결과

(N=70)

반응 유형	반응 유형의 설명	응답자 수(명)	응답률 (%)
00	아무 것도 쓰지 못하거나 관련 없는 내용을 씀	57	81.4
01	변수는 사용하였지만 의미 없는 식 □-4+△를 씀	2	2.9
02	하나의 예로부터 잘못된 공식을 씀	3	4.3
03	2를 곱하거나 2로 나눈다는 생각이 포함된 식을 씀	8	11.4

아직 학생들이 변수를 학습하지 않은 상태이기 때문에 이 문항은 많은 학생들이 풀 것으로 기대하지는 않은 문항이었으나, 정확히 정답을 제시한 학생은 1명도 없었다. 80% 이상의 학생들이 아무 것도 쓰지 않았거나 변수를 이용하지 않은 무의미한 서술을 하였다. 또한, 변수를 사용하였지만 무의미한 식을 쓴 학생이 2명이 있었다. 반응 유형 '01'에 해당하는 학생들 중 1명은 바로 위의 15번에서 다루었던 도형 둘레의 점이 6개이고 내부의 점이 2개인 도형의 넓이가 4라는 사실로부터 □-4+△라는 공식을 유도했음을 밝히고 있다. 그렇기에 이 이유를 명시하지 않은 학생도 비슷한 이유에서 이 공식으로 답했을 것으로 추측된다. 정답자는 없었지만 변수에 2를 곱하거나 2로 나눈다는 생각이 포함된 답을 쓴 학생은 8명이 있었다. 이는 □가 1이 커질 때 넓이는 0.5가 커지고 △가 1이 커질 때 넓이는 1이 커진다는 사실에서 착안한 것으로 보인다. 하지만, □+△ ÷2과 같이 정답과는 거리가 있었으며, □와 △ 사이의 관계를 $\square\times\frac{1}{2}=\triangle$(2명), $\triangle\times2+2=\square$(1명), $\square=\triangle\times2+1$(1명)과 같이 등식으로 표현한 학생이 4명이 있었다.

4. 결과에 대한 논의

앞의 세 절을 통하여 본 연구에서 조사한 세 가지 주제에 대한 학생들의 결과를 살펴보았다. 세 가지 주제는 학생들이 교과서에서 다루지 않은 주제였으며, 처음 시작하는 단계에서 기본적인 내용은 교사의 지도를 받았지만 대부분의 문항은 학생들이 스스로 해결하였으며 각 단계에서 필요한 추론도 학생들 스스로 해결하였다. 그 결과 세 가지 주제 전반에 대하여 70명 중 약 40%인 30명 정도의 학생들은 추론을 요구하는 문항에 대하여 아무런 반응도 보이지 못하였다. 하지만, 이 학생들을 제외한 약 60%의 학생들은 어떠한 형식의 반응이건 보이고자 했다는 사실이 더 중요한 것으로 보인다. 추론과 관련된 문항에 대한 결과 중에서 1로 시작하는 유형은 부분적으로 정확한 반응을 보인 학생들이며, 2로 시작하는 유형이 정확한 반응을 보인 학생들이다. 또한, 30이나 40은 일반적인 수준을 넘어서 관계적인 반응을 보인 학생들이다. 주제에 따라서 다소간의 차이는 있었지만, 20이상의 숫자로 표현되는 반응 유형을 보인 학생들의 숫자가 평균적으로 10명 정도로 나타나고 있다. 그리고, 평균적으로 30명 정도의 학생들은 부분적으로는 정확한 반응을 보였지만 학생들의 수준에서 가능한 추론을 완성하지 못하였다.

주제 1을 구성하는 단계적인 문항을 통하여 학생들이 파악할 수 있는 일반적인 성질은 '정사각형이 주어져 있을 때 선분을 여러 개 그려서 2, 3, 5를 제외한 모든 자연수만큼의 정사각형으로 나눌 수 있다.'는 것이다. 이러한 성질을 정확히 발견한 학생은 4명이 있었고, 9명의 학생은 무한히 많은 자연수에 대한 논의를 하였다. 그리고, 20명의 학생이 앞에서 자신이 하였던 결과를 체계적으로 정리할 수 있었다. 따라서, 33명의 학생은 교사가 약간의 조언만 해 주었다면 위의 성질을 발견할 수 있었을 것으로 예상된다. 또한, 3으로 나눈 나머지에 따라 나눈 각각의 경우에서 반응을 보였던 40명 정도의 학생들은 적어도 '하나의 정사각형은 네 개의 정사각형으로 나눌 수 있다.'는 일반적인 스키마를 구성하였거나 교사의 도움을 받아서 구성할 수 있는 가능성이 충분히 있는 것으로 보인다.

주제 2를 구성하는 단계적인 문항을 통하여 학생들이 파악할 수 있는 일반적인 성질은 '$m \times n$ 점판에 대하여, $m \geq 5$, $n \geq 5$이거나 $m \geq 3$, $n \geq 7$이거나 $m \geq 4$, $n \geq 7$이면 완전색점판이다.'라는 것이다. 이러한 성질로 종합하는 과정까지는 본 연구에서 의도하지 않은 것이지만, 학생들의 결과로부터 약 20명 정도의 학생들은 '완전색점판'이라는 용어를 처음 접하고 있음에도 부분적인 문항에 대하여 정확한 반응을 보여 주었으며, 2~4명의 학생들은 '완전색점판임을 확인한 점판보다 숫자가 큰 점판은 완전색점판이다.'라는 일반적인 스키마를 구성한 것으로 보인다. 그리고, 40명 정도의 학생들이 부분적으로 또는 전체적으로 정확한 반응을 보이고 있다는 사실은 교사의 지도에 의하여 상당한 정도로 위와 같은 성질을 학습할 수 있는 가능성을 제시하고 있는 것이다.

주제 3을 구성하는 단계적인 문항을 통하여 학생들이 파악할 수 있는 일반적인 성질은 점판 위에 그린 다각형의 넓이에 대하여 '내부의 점의 수가 일정하면 둘레의 점의 수가 1이 커질 때 넓이는 0.5가 커진다.'는 것과 '둘레의 점의 수가 일정하면 내부의 점의 수가 1이 커질 때 넓이는 1이 커진다'는 것, 그리고 궁극적으로 '둘레의 점의 수가 n이고 내부의 점의 수가 k인 다각형의 넓이 S는 $S=\frac{n}{2}+k-1$이다.'라는 것이다. 최종적인 넓이 공식을 발견한 학생은 한 명도 없었으며, 부분적인 성질을 발견하고 추론한 학생은 1~7명이 있었다. 하지만, 학생들은 넓이를 아직 학습하지 않았으며 점판에 다각형을 그리는 상황의 생소함을 생각한다면 앞의 두 주제에 비하여 정확히 반응한 학생의 수가 적은 것은 일면 당연할 수도 있는 것이다. 그리고, 처음 접하는 주제임에도 평균적으로 약 30명 정도의 학생들은 주어진 조건을 만족하는 정확한 다각형을 그리고 넓이를 구하였으며 0.5 또는 1씩 커진다는 사실을 발견하는 데 성공하였다. 따라서, 이 주제 역시 교사의 체계적인 지도가 있다면 많은 학생들이 위의 성질을 발견할 수 있을 것으로 기대된다.

V. 결론 및 제언

본 연구의 출발점이 된 것은 우리 나라 중학생들의 연역 추론 능력이 매우 낮다는 사실과 초등학교부터 학습해 왔던 귀납 추론에 의한 경험적 정당화와 연역 추론

을 모두 정당한 추론으로 받아들이며 경험적 정당화로부터 더욱 강한 확신감을 느낀다는 것이었다. 이러한 현상이 나타나는 원인을 파악하기 위하여 초등학교 교과서에서 여러 가지 성질이나 공식을 정당화하기 위하여 이용되고 있는 추론 과정을 분석하였고, 그 결과 대부분의 경우 하나의 예로부터 일반 원리를 지도하고 있으며, 이 사이의 비약을 메우는 일은 교사나 학생의 재량에 맡겨져 있음을 확인하였다. 그래서, 한 가지 예에 대한 경험적 정당화로부터 연역 추론을 보다 단계적으로 자연스러운 과정에 의하여 연결할 수 있는 방안을 모색하기 위한 기초 연구로서 초등학교 학생들의 추론 능력을 조사해 보았다.

호일즈(1996)는 학생들의 추론에 의한 정당화는 모종의 계층을 따라서 조직되며, 최하위 수준을 이루는 것은 행동에 의한 경험적 정당화나 절차적 정당화이며, 최상위 수준을 이루는 것은 전제와 여러 성질에 근거한 엄밀한 연역적 논증이나 관계적 정당화임을 밝히고 있다. 이렇듯 점진적인 과정을 통하여 학생들에게 연역 추론을 도입하자는 생각은 상당한 설득력이 있어 보이며, 중간적인 단계에서 이용할 수 있는 방법으로서 세마데니(1984)의 활동 증명이나 미야자키(1991)의 예에 의한 설명을 들 수 있다. 세마데니의 활동 증명이나 미야자키의 예에 의한 설명은, 이러한 경험적 정당화와 관계적 정당화의 중간 단계로서 제시된 것이며, 두 방법에서 공통적으로 보이는 것은 몇 가지 사례에 대하여 지속적으로 동일한 과정을 수행함으로써 이러한 성질이 모든 사례에 대하여 성립하리라는 확신을 얻거나 스키마를 구성하는 것이다. 우리 나라의 초등학교 교과서 분석을 통하여 이러한 스키마를 구성하는 과정은 명시적으로 드러나 있지 않음을 확인할 수 있었다. 그렇기에 보다 점진적인 추론 지도를 위하여 이러한 중간 단계의 방법을 활용하고, 모프쇼비츠-하다(Movshovitz-Hadar, 1988)가 제시하고 있는 바와 같이, 중간 단계의 방법이 지니는 한계를 명시적으로 보여 줌으로써 연역 추론의 필요성을 인식하게 해 주는 과정은 상당한 도움이 될 것으로 보인다.

본 연구에 참가했던 70명의 학생들 중에서 10명 정도는 주어진 주제를 해결하는 스키마를 구성한 것으로 보이며, 30명 정도는 이러한 스키마를 부분적으로 구성한 것으로 보이며, 나머지 30명 정도의 학생들은 거의 진전이 없었던 것으로 보인다. 그러나, 본 연구에서 시행했던 실험 상황은 처음 시작 단계에서 기본적인 내용 지도 장면에서만 교사가 개입하였고, 이어지는 단계적인 문제는 학생 스스로 해결해 가면서 스스로 추론해야 했음을 감안한다면, 교사의 적절한 지도가 있을 때 본 연구에서 주어진 주제에 대하여 일반적인 스키마를 파악할 가능성이 있는 학생은 적어도 40명은 될 것으로 보인다. 그렇기에 본 연구로부터 경험적 정당화와 연역 추론의 중간 단계의 방법을 초등학교 5학년 수준에서 도입하는 것이 가능하다는 주장하더라도 그렇게 무리한 것 같지는 않다.

그러나, 세마데니나 미야자키가 주장한 중간 단계의 추론 방법을 통하여 점진적으로 학생들에게 학습시키는 것이 더욱 효과가 있는지는 지속적으로 검증해 보아야 할 연구 문제인 것으로 보인다. 초등학교 5학년부터 중학교 2학년에 이르는 기간 동안 이러한 연구를 대규모로 지속적으로 수행하는 일은 그리 쉬워 보이지는 않는다. 따라서, 우선적으로 시행해 볼 필요가 있다고 생각되는 연구는, 본 연구에서 다루었던 것과 유사한 주제를 이용하여 학생들을 직접적으로 지도해 보고, 초등학생의 수준에서 어느 정도까지 스키마를 형성할 수 있으며, 나아가 연역 추론까지 가능할 수 있는지를 검증해 보는 것이다. 본 연구는 이러한 여러 가지 가능성을 열어 두었다는 점에서 의의가 있다.

참 고 문 헌

강지형·김수환·라병소·박성택·이의원·이정재·정은실 (1999). 제 7차 교육과정에 의한 초등수학교육, 서울: 동명사.

교육인적자원부 (1997). 제 7차 수학과 교육과정, 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부 (2001a). 수학 4-가, 서울: 교육인적자원부.

교육인적자원부(2001b). 수학 5-가, 서울: 교육인적자원부.

김연식·김흥기 (1994). 중학교 수학 2, 서울: 두산동아.

김응태·박한식·우정호 (1984). 수학교육학개론, 서울: 서울대학교출판부.

라병소 (2000). 초등수학에서의 증명 지도에 관하여, 과학교육연구. 24. 춘천교육대학교 과학교육연구소. pp.25-35.

류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색, 한국교원대학교 교육학박사학위논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성 요소 분석 및 교수-학습 방향 탐색, 서울대학교대학원 교육학박사학위논문.

우정호 (1994). 증명 지도의 재음미, 대한수학교육학회 논문집. **4.(1)**, pp.3-24, 서울: 대한수학교육학회.

우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교출판부.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교출판부.

하경미 · 정재숙 · 안소영 (2001). 효율적인 교수-학습 자료의 활용, 수학교육 워크샵. **3**, pp.55-79, 서울: 학교수학교육학회.

황혜정 · 나귀수 · 최승현 · 박경미 · 임재훈 · 서동엽 (2001). 수학교육학신론. 서울: 문음사.

Bell, Alan W. (1976). "A Study of Pupil's Proof-Explanations in Mathematical Situations". *Educational Studies in Mathematics*. **7(1/2)**. pp. 23-40.

Fischbein, Efraim & Irith Kedem (1982). "Proof and Certitude in the Development of Mathematical Thinking". In Alfred Vermandel(ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education*. pp.128-131.

Hoyles, Celia (1996). The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. *For the Learning of Mathematics*. **17(1)**, pp.7-16.

Miyazaki, Mikio (1991). The Explanation by 'Example' - For Establishing the Generality of Conjectures. In Fulvia Furinghetti(Ed.). *Proceedings of Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education*. **III**. pp.9-16.

Movshovits-Hadar (1988). Stimulating Presentation of Theorems Followed by Responsive Proofs. *For the Learning of Mathematics*. **8(2)**, pp.12-20.

Semadeni Zbigniew (1984). Action Proof in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics*. **4(1)**, pp.32-34.

Senk, Sharon L. (1985). "How Well Do Students Write Geometry Proofs?". *The Mathematics Teacher*. **78(6)**, pp.448-456.

Investigation on the Primary School Children's Abilities of Formal Reasoning

Na, Byung-So(bsna@cnue.ac.kr)
Shin, Kyung-Ja(shinkj@cnue.ac.kr)
Shin, Joon-Sik(joonsik@cnue.ac.kr)
Seo, Dong-Yeop(dseo@cnue.ac.kr)
Chuncheon National University of Education, 339, Seoksa Dong, Chuncheon City, Kangwon Do, The Republic Korea.

We investigated on the primary school children's abilities of formal reasoning. Seventy students in grade 5 participated in the study. They responsed their best reactions on the problems constituted of three parts requiring the informal or formal reasoning and generalization. Their reactions are classified by some criteria depending the level of reasoning. About 10 students showed that they constructed a kind of scheme for solving the problems, similar to formal reasoning and beyond naive informal reasoning. And about 30 students did so partially. We concluded that the teaching and learning of reasoning by the progressive increasing the degree of rigor from grade 5 is possible.

* ZDM classification : E53, C33
* MSC2000 classification : 97C30
* key word : formal reasoning, informal reasoning, scheme, generalization, justification.

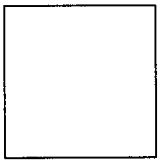
부록 1. 주제 1에 대한 조사 연구 실험지

주제 1 : 정사각형 나누기

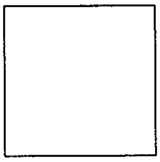
※ 주제 1은 주어진 정사각형을 더 작은 정사각형으로 주어진 개수만큼 나누는 활동입니다. 나누어지는 정사각형의 모양은 서로 다를 수도 있습니다.

<문제 해결하기 1>

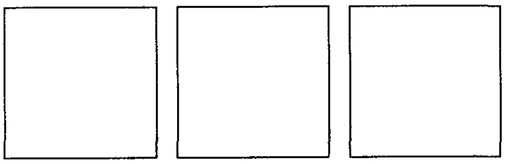
1. 다음 그림의 정사각형을 4개의 정사각형으로 나누어 보아라.



2. 위에서 나눈 그림에 3개의 정사각형을 더 만들어서 모두 7개의 정사각형으로 나누어보아라.

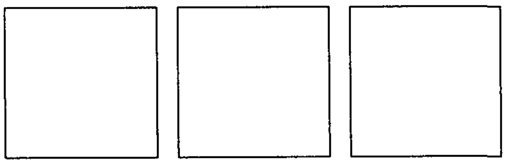


3. 다음 정사각형을 10개, 13개, 16개의 정사각형으로 나눈 그림을 그려보아라.



(10개) (13개) (16개)

4. 다음 정사각형을 19개, 22개, 25개의 정사각형으로 나눈 그림을 그려보아라.

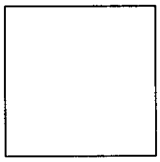


(19개) (22개) (25개)

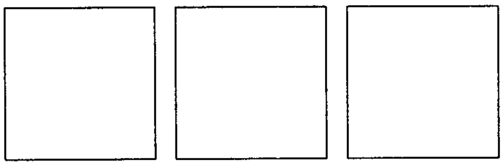
5. 위와 같은 방법을 계속 이용할 때, 25개보다 많이 나눌 수 있는 경우 세 가지를 써 보고, 그 이유를 써 보아라.

<문제 해결하기 2>

6. 다음 그림의 정사각형을 9개의 정사각형으로 나누어 보아라.



7. 다음 정사각형을 12개, 36개, 39개의 정사각형으로 나눈 그림을 그려보아라.

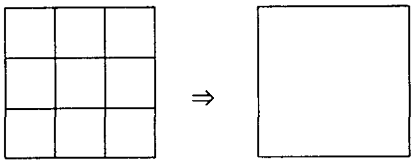


(12개) (36개) (39개)

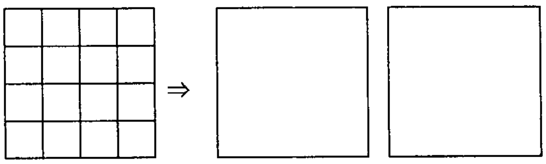
8. 위와 같은 방법을 계속 이용할 때, 39개보다 많이 나눌 수 있는 경우 세 가지를 써 보고, 그 이유를 써 보아라.

<문제 해결하기 3>

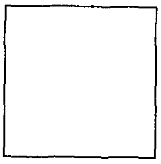
9. 다음의 왼쪽 그림에 나누어진 9개의 정사각형으로부터 작은 정사각형 몇 개를 묶어 6개의 정사각형으로 나눈 그림을 그려보아라.



10. 다음의 왼쪽 그림에 나누어진 16개의 정사각형으로부터 작은 정사각형 몇 개를 묶어 8개, 10개, 13개의 정사각형으로 나누어보아라.

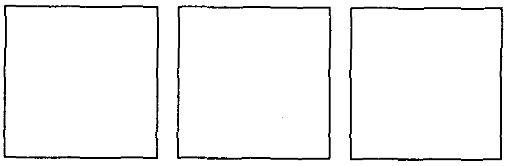


(8개) (10개)



(13개)

11. 다음 정사각형을 11개, 14개, 31개의 정사각형으로 나눈 그림을 그려보아라.

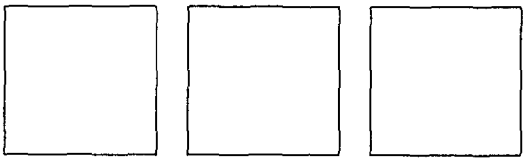


(11개) (14개) (31개)

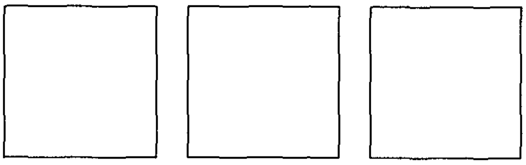
12. 위와 같은 방법을 계속 이용할 때, 31개보다 많이 나눌 수 있는 경우 세 가지를 써 보고, 그 이유를 써 보아라.

<문제 해결하기 4>

13. 다음 그림을 주어진 개수의 정사각형으로 나눈 그림을 그려보아라.(단, 나눌 수 없는 것은 그대로 두어라.)



(2개) (3개) (4개)



(5개) (6개) (7개)

14. 지금까지의 활동을 통하여 주어진 정사각형을 작은 정사각형으로 나눌 때 몇 개로 나누는 것이 가능하다고 말할 수 있겠는가? 작은 것부터 차례대로 써 보아라.

부록 2. 주제 2에 대한 조사 연구 실험지

주제 2 : 점판 이야기

<용어 약속하기>

1. **☆×◇ 점판**

평면에 가로로 ☆개의 점을 세로로 ◇ 줄만큼 같은 간격으로 배열한 점판을 **☆×◇ 점판** 이라고 한다. 다음은 2×3 점판과 3×2 점판의 예이다.

○ ○
○ ○
○ ○

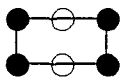
2×3 점판

○ ○ ○
○ ○ ○

3×2 점판

2. **완전색점판, 불완전색점판**

이 점판의 원에 검은색을 칠하거나 칠하지 않을 수 있다(칠하지 않은 것은 흰색으로 본다). 이 때 점판에 검은색이나 흰색이 칠해진 네 점을 연결하여 직사각형이 되는 것이 하나라도 있을 때 **완전색점판** 이라고 한다. 그리고, 점판에 검은색이나 흰색이 칠해진 네 점을 연결하여 직사각형을 하나도 만들 수 없을 때 **불완전색점판** 이라고 한다.



완전색점판

○ ● ○
● ○ ○

불완전색점판

<문제 해결하기 1>

1. 다음은 2×2 점판, 3×2 점판, 4×2 점판, 5×2 점판을 각각 1개씩 그린 것이다. 불완전색점판이 되도록 검은색을 칠하여 보아라.

(1) 2×2 점판

○ ○
○ ○

(2) 3×2 점판

○ ○ ○
○ ○ ○

(3) 4×2 점판

○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

(4) 5×2 점판

○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○

2. 아래에 6×2 점판을 하나 그린 다음 불완전색점판을 만들어 보아라.
3. 다음 그림의 2×7 점판이 불완전색점판이 되도록 검은 색을 칠해 보아라.

○ ○
○ ○
○ ○
○ ○
○ ○
○ ○
○ ○

<문제 해결하기 2>

4. 다음은 가로 첫째 줄을 모두 검은색으로 칠한 3×3 점판과 4×3 점판, 5×3 점판을 그린 것이다. 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들어 보아라.

(1) 3×3 점판

● ● ●
○ ○ ○
○ ○ ○

(2) 4×3 점판

● ● ● ●
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

(3) 5×3 점판

● ● ● ● ●
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○

5. 위에서 불완전색점판을 만들 수 없는 것은 어느 점판인가? 왜 그런지 써 보아라.
6. 첫째 줄을 모두 검은색으로 칠한 6×3 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들 수 있는가? 답을 쓰고 왜 그런지 써 보아라.

<문제 해결하기 3>

7. 다음은 가로 첫째 줄을 모두 검은색으로 칠한 3×4 점판과 4×4 점판, 5×4 점판을 그린 것이다. 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들어 보아라.

(1) 3×4 점판

● ● ●
○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○

(2) 4×4 점판

● ● ● ●
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

(3) 5×4 점판

● ● ● ● ●
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○

8. 위에서 불완전색점판을 만들 수 없는 것은 어느 점판인가? 왜 그런지 써 보아라.
9. 첫째 줄을 모두 검은색으로 칠한 6×4 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들 수 있는가? 답을 쓰고 왜 그런지 써 보아라.

<문제 해결하기 4>

10. 다음은 3×3 점판과 4×3 점판, 5×3 점판, 6×3 점판, 7×3 점판을 그린 것이다. 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들어 보아라.

(1) 3×3 점판

○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○

(2) 4×3 점판

○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

(3) 5×3 점판

○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○

(4) 6×3 점판

○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○

(5) 7×3 점판

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

11. 위에서 불완전색점판을 만들 수 없는 것은 어느 점판인가? 왜 그런지 써 보아라.
12. 8×3 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들 수 있는가? 답을 쓰고, 왜 그런지 써 보아라.

<문제 해결하기 5>

13. 다음은 가로 첫째 줄을 모두 검은색으로 칠한 3×5 점판과 4×5 점판을 그린 것이다. 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들어 보아라.

(1) 3×5 점판

● ● ●
○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○

(2) 4×5 점판

● ● ● ●
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

14. 불완전색점판을 만들 수 없는 것은 어느 점판인가? 그 이유는 무엇인가?

15. 첫째 줄을 모두 검은색으로 칠한 5×5 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들 수 있는가? 답을 쓰고 왜 그런지 써 보아라.

<문제 해결하기 6>

16. 다음은 3×5 점판과 4×5 점판, 5×5 점판을 그린 것이다. 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들어 보아라.

(1) 3×5 점판

○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○

(2) 4×5 점판

○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

(3) 5×5 점판

○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○

17. 불완전색점판을 만들 수 없는 것은 어느 점판인가? 그 이유는 무엇인가?

18. 6×5 점판에 검은색을 칠하여 불완전색점판을 만들 수 있는가? 답을 쓰고, 왜 그런지 써 보아라.

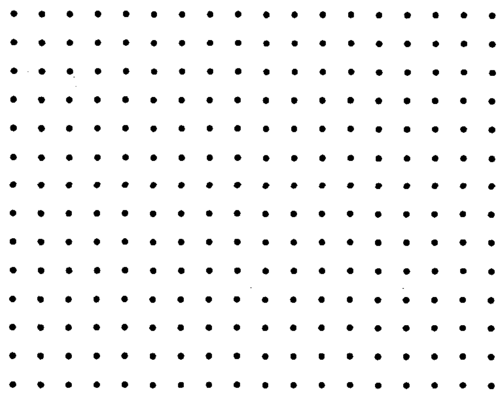
19. 지금까지의 활동과 문제로부터 ☆×◇ 점판에서 불완전색점판을 만들 수 있는 경우 중에서 점이 가장 많은 경우를 그려보아라.

부록 3. 주제 3에 대한 조사 연구 실험지

주제 3 : 넓이 구하기

<예비 활동>

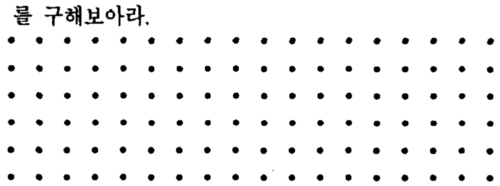
1. 다음 그림은 가로와 세로의 간격이 1*cm*인 점판이다. 점판 위의 점을 선분으로 연결하여 6개의 닫힌 도형을 그리고, 각각의 도형에 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥번의 번호를 붙여보아라.



2. 위에서 그린 6개의 도형의 넓이를 구해보아라.

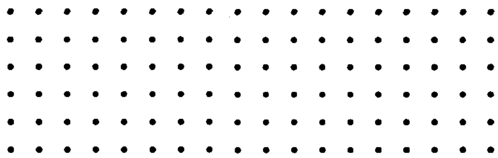
① : ______ ② : ______ ③ : ______
④ : ______ ⑤ : ______ ⑥ : ______

3. 다음 점판 위에 네 점을 지나고 도형 내부에 한 점도 포함하지 않는 도형 3개를 그려보고, 각 도형의 넓이를 구해보아라.



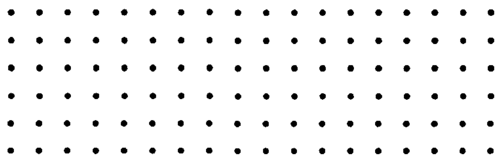
① : ______ ② : ______ ③ : ______

4. 다음 점판 위에 네 점을 지나고 도형 내부에 한 점만 포함하는 도형 3개를 그려보고, 각 도형의 넓이를 구해보아라.



①: ______ ②: ______ ③: ______

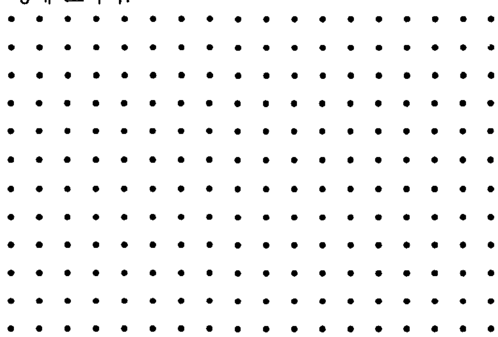
5. 다음 점판 위에 다섯 점을 지나고 도형 내부에 한 점만 포함하는 도형 3개를 그려보고, 각 도형의 넓이를 구해보아라.



①: ______ ②: ______ ③: ______

<문제 해결하기 1>

6. 다음 그림의 점판 위에 4개, 5개, 6개, 7개, 8개, 9개의 점을 지나고 도형 내부에 한 점도 포함하지 않는 도형을 그려보고, 각각의 넓이를 구하여 아래의 표를 완성해 보아라.

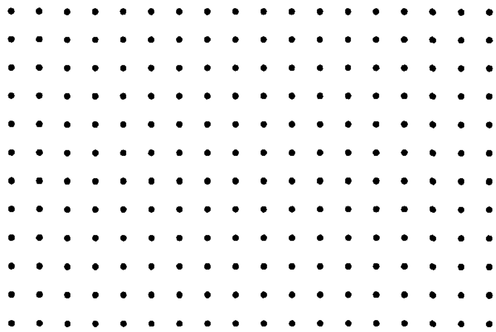


도형 둘레의 점의 수	4	5	6	7	8	9
넓이						

7. 점의 수가 1개 늘어날 때 넓이는 얼마씩 커지는가? 위에서 그린 그림을 이용하여 그 이유를 설명하여 보아라.

<문제 해결하기 2>

8. 다음 그림의 점판 위에 4개, 5개, 6개, 7개, 8개, 9개의 점을 지나고 도형 내부에 한 점만 포함하는 도형을 그려보고, 각각의 넓이를 구하여 아래의 표를 완성해 보아라.

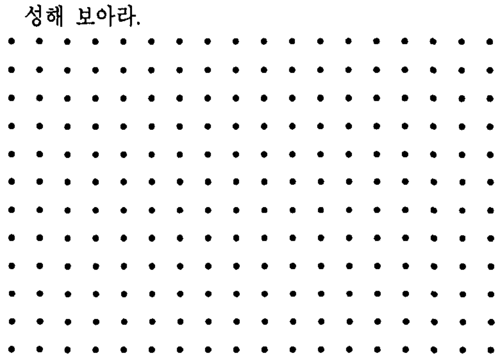


도형 둘레의 점의 수	4	5	6	7	8	9
넓이						

9. 점의 수가 1개 늘어날 때 넓이는 얼마씩 커지는가? 위에서 그린 그림을 이용하여 그 이유를 설명하여 보아라.

<문제 해결하기 3>

10. 다음 그림의 점판 위에 4개, 5개, 6개, 7개, 8개, 9개의 점을 지나고 도형 내부에 두 점만 포함하는 도형을 그려보고, 각각의 넓이를 구하여 아래의 표를 완성해 보아라.

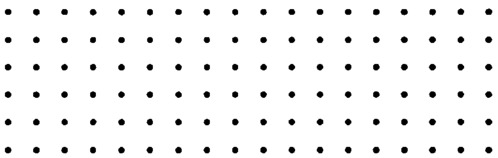


도형 둘레의 점의 수	4	5	6	7	8	9
넓이						

11. 점의 수가 1개 늘어날 때 넓이는 얼마씩 커지는가? 위에서 그린 그림을 이용하여 그 이유를 설명하여 보아라.

<문제 해결하기 4>

12. 다음 그림의 점판 위에 5개의 점을 지나고 도형 내부에 포함되는 점의 수가 각각 0개, 1개, 2개인 도형을 그려보고, 각각의 넓이를 구하여 보아라.

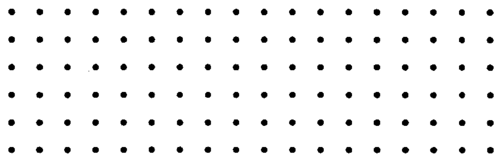


0개일 때 : ____ 1개일 때 : ____

2개일 때 : ____

13. 도형 내부의 점의 수가 1개 늘어날 때 넓이는 얼마씩 커지는가? 위에서 그린 그림을 이용하여 그 이유를 설명하여 보아라.

14. 다음 그림의 점판 위에 6개의 점을 지나고 도형 내부에 포함되는 점의 수가 각각 0개, 1개, 2개인 도형을 그려보고, 각각의 넓이를 구하여 보아라.



0개일 때 : ____ 1개일 때 : ____

2개일 때 : ____

15. 도형 내부의 점의 수가 1개 늘어날 때 넓이는 얼마씩 커지는가? 위에서 그린 그림을 이용하여 그 이유를 설명하여 보아라.

16. 도형 둘레의 점의 수가 □개이고 내부의 점의 수가 △개인 도형의 넓이는 어떻게 나타낼 수 있겠는가?