

복소형 다각형 불변영역을 이용한 입력제한 예측제어

Input Constrained Receding Horizon Control Using Complex Polyhedral Invariant Region

이영일, 방대인, 윤태웅, 김기용

(Young Il Lee, Dane Bahng, Tae-Woong Yoon and Ki. Yong. Kim)

Abstract : The concept of feasible & invariant region plays an important role to derive closed loop stability and achieve adequate performance of constrained receding horizon predictive control. In this paper, we define a complex polyhedral feasible & invariant set for all stabilizable input-constrained linear systems by using a complex transform and propose a one-norm based receding horizon control scheme using these invariant sets. In order to get a larger stabilizable set, a convex hull of invariant sets which are defined for different state feedback gains is used as a target invariant set of the constrained receding horizon control. The proposed constrained receding horizon control scheme is formulated so that it can be solved via linear programming.

Keywords : constrained receding horizon predictive control, feasible & invariant region, input constraint, linear programming, dual-mode paradigm, convex-hull

I. 서론

이동구간 예측제어는 미래의 계의 상태를 예측하여 주어진 비용함수(cost function)를 최소화하는 유한한 개수의 제어 입력의 시퀀스를 계산한 후, 이 시퀀스의 첫 번째 값을 실제 제어 입력으로 부여한 후, 그 다음 단계부터 같은 과정을 반복하는 "이동 구간 제어법"을 말하며, 설정치를 제어기에 반영하기 때문에 우수한 추종 특성을 가지고 시불변계와 불특정 시변 파라미터를 가지는 계에 적용 가능하다. 한편 예측제어의 안정도를 보장하는 기준의 방법으로는, 유한한 시간 내에 계의 상태가 영이 된다는 제한조건(constraint)을 인위적으로 부과하는 방법이 있다[1]. 하지만 물리적인 입력 제한 조건(input constraint)이 있을 경우 이 방법을 사용하였을 때에는 입력 제한 조건을 만족하는 해, 즉 가능성(feasibility)을 만족하는 해가 존재하지 않거나 극히 제한된 일부 상태에 대해서만 가능성을 만족하는 해가 존재할 수 있다는 문제점이 있다.

따라서 마지막 단계의 상태를 영으로 보내는 조건을 완화하여, 영점 주위의 일정한 가능 불변 영역(feasible & invariant region)을 정의하고 그 안으로 주어진 유한한 시간 내에 제한된 입력을 사용해서 계의 상태를 끌어넣는다는 조건을 사용한다. 여기서 불변 영역이란 그 내부에 존재하는 모든 상태에 대해 $u=Kx$ 형태의 제어기를 통해 제어기 포화를 방지하면서 계의 상태를 영으로 보낼 수 있도록 정의된 영역을 말한다. 따라서 현재 계산된 입력의 시퀀스를 모두

논문접수 : 2002. 5. 23., 채택확정 : 2002. 10. 23.

이영일 : 서울산업대학교 제어계측공학과 정밀기계연구소
(yilee@snu.ac.kr)

방대인 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부(dibang@neuro.snu.ac.kr)

윤태웅 : 고려대학교 전기공학과(twy@cello.korea.ac.kr)

김기용 : 서울산업대학교 제어계측공학과(ykим@plaza.snu.ac.kr)

*본 연구는 서울산업대학교 연구기금의 지원을 일부 받아 수행되었음.

*본 연구는 방대인의 고려대학교 전기공학과 석사과정 재학 당시 수행되었음.

사용하여 계를 불변 영역 안으로 집어넣은 후에는 입력 제한이 있더라도 $u=Kx$ 를 사용하여 폐루우프 안정도를 보장할 수 있게 된다. 즉, 이와 같은 방법을 이동구간 제어법에 따라 매 단계 적용하면 비용함수 감소법에 따라 폐루우프 안정도를 보장할 수 있게 된다[2][3]. 가능 불변 영역의 구성 방법은 크게 다각형 방법(polyhedral approach)[3]과 타원형 방법(ellipsoidal approach)[2]으로 나뉘어진다. 따라서 계의 상태를 영으로 보내는 제한조건 대신에 완화된 제한조건을 사용함으로 인해 안정화시킬 수 있는 계의 영역을 넓힐 수 있다.

한편 위에서 언급한 불변 영역의 구성법들 중 타원형법에 대해서는 [2][4]에서 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequality)을 사용하여 불변영역의 구성과 제어법을 다루고 있는데 이 방법의 특성상 계산 시간이 오래 걸리기 때문에 화학 공정 등의 비교적 느린 공정에 적용 가능하다. 한편 다각형법은 제어법과 불변 영역 구성 전반에 걸쳐 선형 계획법(linear programming)을 사용, 계산 시간이 적어 타원형법에 비해 고속의 제어를 수행할 수 있다. 다각형법의 구성에 관해서 [5]에서는 주어진 영역이 불변 가능한지의 여부를 판별할 수 있는 조건을 제시하고 있으며, [6],[3]에서는 불변 가능하도록 영역을 정의하는 조건을 제시하고 있다. [6]에서는 각 요소별 비교를 용이하게 하기 위해 실제 계를 유사 변환(similar transform)하고, 이 변환된 계의 불변성을 검증하고 있으며 변환행렬을 폐루우프계의 고유벡터를 이용하여 정의한다. 하지만 [6][3]에서는 이 변환행렬이 복소 요소를 포함하는 경우에 대한 해법을 제시하지 않고 있다.

본 논문에서는 [6][3]에서의 결과를 폐루우프의 고유벡터 또는 변환 행렬이 복소수인 경우로 확장한다. 이와 더불어 폐루우프 고유치 존재영역의 변화와 이에 따른 불변 가능한 영역의 변화에 대해 고찰하여 폐루우프 고유치 존재영역을 제한하는 대신 보다 넓은 불변 가능 영역을 구성할 수 있음을 보이고 간단한 예제를 통해 이를 검증한다.

II. 다각형 불변 영역의 정의

다음과 같은 시불변 선형계를 고려하자.

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (1)$$

여기서 (A, B) 는 안정화 가능하고 $x[k] \in R^n$, $u[k] \in R^m$ 이며, 각각 k 단계에서의 계의 상태와 입력을 의미한다. (1)의 계에 $u[k] = Kx[k]$ 형식의 피드백 법칙을 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$x[k+1] = \Phi x[k], \quad \Phi = A + BK \quad (2)$$

이제 다음과 같이 정의된 집합의 불변성을 생각해 본다. 본 논문 전반에 걸쳐 절대값 부호와 부등호는 벡터/행렬의 각 요소별로 적용된다.

$$R_K^W(\alpha) = \{x \in R^n \mid Wx \leq \alpha\} \quad (3)$$

여기서 $W \in C^{n,n}$ 은 역행렬이 존재하는 복소 행렬이며 W 의 선택은 피드백 이득 K 에 따라 달라진다. $|Wx|$ 는 각 요소들의 절대값들의 벡터로서 정의된다. 또 $\alpha \in R^n$ 은 양의 벡터이다. $|Wx| \geq 0$ 은 직관적으로 확인할 수 있으며 $x=0$ 일 때에만 등호가 성립된다. (3)으로 정의된 집합의 불변성을 검증하기 위해 다음 보조정리1이 필요하다.

보조정리 1: 복소 요소를 가지는 벡터인 $w \in C^{1,n}$ 과 $z \in C^{n,1}$ 을 고려하자. z 의 각 요소들이 $|z_i| < \alpha (\in R^{n,1})$ 을 만족하면, 다음 부등식이 만족된다.

$$|wz| < |w|\alpha \quad (4)$$

증명 : $w = [w_1 e^{j\phi_1}, w_2 e^{j\phi_2}, \dots, w_n e^{j\phi_n}]$, $z = [z_1 e^{j\psi_1}, z_2 e^{j\psi_2}, \dots, z_n e^{j\psi_n}]^T$ 라고 두면 다음 식이 성립한다. 여기서 $(w_k, \phi_k), (z_k, \psi_k)$ 는 각각 w 와 z 의 k 번째 요소의 (절대값, 각도)를 의미한다.

$$\begin{aligned} |wz| &= \left| \sum_{j=1}^n w_j z_j e^{j(\phi_j + \psi_j)} \right| \leq \sum_{j=1}^n |w_j| |z_j| \\ &< \sum_{j=1}^n |w_j| \alpha_j = |w| \alpha \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (5)$$

이제 (3)으로 정의된 집합이 $u = Kx$ 에 대해서 불변하기 위한 조건을 다음 정리를 통해 알아본다.

정리 1: (2)의 폐루우프계가 안정하면 다음 식을 만족하는 W 와 α 가 존재한다.

$$|W\Phi W^{-1}| \alpha < \alpha \quad (6)$$

(6)을 비롯하여 본 논문 전반의 절대값 부호와 부등호는 벡터/행렬의 각 요소들에 관해 적용됨을 재차 강조한다. 그리고 이 경우, $R_K^W(\alpha)$ 는 $u = Kx$ 에 대해 불변하다.

증명 : 먼저 (6)을 만족하는 W 와 α 가 존재함을 보인다.

잘 알려진 바대로 안정한 정방 행렬 Φ 는 다음과 같이 정방 블록을 중앙에 가지는, 조단 형태의 행렬과 유사관계에 있다 [7].

$$W\Phi W^{-1} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_n \end{bmatrix}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 s 는 Φ 의 선형 독립적인 고유 행렬의 개수이다. 중앙에 있는 각 블록은 각각 하나의 고유 행렬과 고유치를 가지며, 그 각 블록의 중앙요소 바로 위에는 1이 위치한다. 가정에 의해 Φ 의 모든 고유치의 절대값은 1보다 작으므로, (7)를 만족하는 $W\Phi W^{-1}$ 에 대해 (6)을 만족하는 양의 벡터 α 가 존재함을 알 수 있다.

이제 W 와 α 가 (6)을 만족하면 $R_K^W(\alpha)$ 는 $u = Kx$ 에 대해 불변임을 증명한다. 스칼라 $\mu > 0$ 을 (6)의 양변에 곱해도 부등식에는 변함이 없다. 따라서 x_0 가 주어지면 (6)을 만족하는 W , α 에 대해, $|Wx_0| < \mu\alpha$ 가 만족되도록 μ 를 선택할 수 있다. 그러면 가정과 보조정리1을 통해 다음 식이 만족됨을 쉽게 확인할 수 있다.

$$|Wx_1| = |W\Phi x_0| = |W\Phi W^{-1}Wx_0| \leq |W\Phi W^{-1}| \mu\alpha \leq \gamma \tilde{\alpha} \quad (8)$$

여기서 $\tilde{\alpha} = \mu\alpha$ 이고 $\gamma (0 < \gamma < 1)$ 인 스칼라이다. (8)의 식을 반복적으로 적용하면 $L > 1$ 에 대해 다음 식을 얻는다.

$$|Wx_L| \leq \gamma^L \tilde{\alpha} \quad (9)$$

(9)에 의해, L 이 커짐에 따라 $|Wx|$ 안에 있는 상태가 L 이 커져도 불변함을 알 수 있다.

주목 1 : W 를 선정하는 가장 좋은 방법은 W^{-1} 가 Φ 의 고유 벡터들을 각 열로 사용하는 것이다. 변환 행렬인 W 가 주어지면 (6)은 α 에 관해 선형이므로 LP나 QP 방법을 사용하여 (6)을 만족하는 α 를 찾을 수 있다. ■

이제 정리 1과 함께, 계의 입력에 부과되는 다음과 같은 물리적 제한조건을 고려한다.

$$|u[k]| \leq \bar{u}, \quad k \geq 0 \quad (10)$$

(10)의 제한 조건이 존재하면 피드백 제어출력인 $u = Kx$ 는 가능하지(feasible) 않을 수 있다. 즉, (10)의 입력 제한 조건을 벗어날 수 있다. 이러한 경우 (3)의 상태집합을 다시 고려하자.

보조정리1로부터, 다음 조건이 만족되는 경우 $u = Kx$ 는 $R_K^W(\alpha)$ 안의 임의의 x 에 대해 제한 조건 (10)을 만족함을 확인할 수 있다.

$$|KW^{-1}| \alpha \leq \bar{u} \quad (11)$$

이제까지 설명한 바를 바탕으로 정리 1과 가능성 조건을 끌어서 다음과 같이 쓸 수 있다.

정리 2 : 입력 제한 조건 (10)을 가지는 계 (1)과 $u = Kx$ 에 의한 폐루우프 계 (2)에 대한 (3)의 상태 집합 $R_{\mathcal{K}}^W(\alpha)$ 를 고려하자. 주어진 입력제한 조건에 대하여 W, K , 그리고 α 가 (6)과 (11)을 만족하면 $u = Kx$ 는 입력제한 조건을 만족시키면서 $R_{\mathcal{K}}^W(\alpha)$ 상의 모든 초기 상태를 영상태로 접근시킨다. ■

이후부터는 $R_{\mathcal{K}}^W(\alpha)$ 의 W 와 α 가 주어진 K 에 대하여 (6)과 (11)을 만족한다고 가정한다. 그러면 정리 2에 따라 $R_{\mathcal{K}}^W(\alpha)$ 에 있는 임의의 상태에 대해 $u = Kx$ 는 입력 제한 조건을 만족함과 동시에 폐루우프 안정성을 보장한다.

$R_{\mathcal{K}}^W(\alpha)$ 밖에 있는 상태를 다루는 방법들 중 하나는 입력 제한 조건을 만족하는 유한개의 입력들을 사용해서 계의 상태를 $R_{\mathcal{K}}^W(\alpha)$ 로 끌어들이고, 일단 상태가 $R_{\mathcal{K}}^W(\alpha)$ 에 들어온 후에는 $u = Kx$ 로 제어를 수행하는 것으로, 이를 이중 모드 법칙(dual mode paradigm)이라 부른다[6][8]. 단, 이 때 K 가 개루우프 최적 피이드백 이득인 경우 일반적인 MPC 문제와 동일해진다. 이제 복소 가능한 불변 집합 $R_{\mathcal{K}}^W(\alpha)$ 에 기반한 제한 예측제어 기법을 제안하기 위하여 다음과 같은 비용함수를 생각한다.

$$\begin{aligned} & J(x[k], U[k], \alpha) \\ & := \sum_{j=1}^{N-1} q|x[k+j|k]| + q_{N_f}|x[k+N|k]| \\ & U[k] := [u[k|k] \dots u[k+N-1]]^T \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 q 와 q_{N_f} 는 각각 양의 행벡터이고 $x[k+j|k]$ 는 k 단계에서 예측한, $k+j$ 단계의 상태이다. 이제 다음과 같은 문제를 매 단계 풀고 $u[k|k]$ 를 계에 입력한다.

$$\min_{U[k], \alpha} J(x[k], U[k], \alpha) \quad (13)$$

단 (6), (11), 그리고

$$|u[k+j]| \leq \bar{u} \quad (14_1)$$

$$|Wx[k+N|k]| \leq \alpha \quad (14_2)$$

이 만족된다.

이제 이러한 이동구간 제어법의 안정도를 다음 정리와 같이 보일 수 있다.

정리 3 : (1)의 계와 (2)와 (3)으로 정의되는 불변영역을 생각한다. (13-14)문제의 해가 초기 k 단계에서 존재한다면 (13-14) 문제는 계속 해가 존재하게 되고 (15)가 만족하면 이동구간 제어법에 따라 제어입력을 부과했을 때 폐루우프 접근안정성이 보장된다.

$$q_{N_f}I - q(I + \Phi) \geq 0 \quad (15)$$

증명 : 초기 k 단계의 (13-14)의 최적해를 다음 시퀀스로 나타내 보자.

$$U^*[k] := [u^*[k|k] \dots u^*[k+N-1]]^T$$

그리고 다음 단계인 $k+1$ 단계에서의 입력 시퀀스를 $U^*[k]$ 를 이용하여 다음과 같이 정의하자. 그러면 $R_{\mathcal{K}}^W(\alpha)$ 의 불변 가능 조건에 따라 $\mathcal{U}[k+1]$ 도 (14_1,2),(6),(11)을 만족하므로 (13-14)문제의 가능한 해 중의 하나가 된다.

$$\mathcal{U}[k+1] :=$$

$$[u^*[k+1|k] \dots u^*[k+N-1] K\hat{x}[k+N|k]]^T$$

여기서 $\hat{x}[k+N|k]$ 는 k 단계에서 예측한, $k+N$ 단계에서의 상태이다. 이제 (15)의 조건을 이용하여 다음과 같이 반복적으로 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} & J(x[k]) = \\ & = q|x[k+1|k]| + \sum_{j=2}^{N-1} q|x[k+j|k]| + q_{N_f}|x[k+N|k]| \\ & = q|x[k+1|k]| + \sum_{j=1}^{N-1} q|x[k+j+1|k]| \\ & + q_{N_f}|x[k+N+1|k]| + q_{N_f}|x[k+N|k]| \\ & - q|x[k+N|k]| - q_{N_f}|x[k+N+1|k]| \\ & = q|x[k+1|k]| + J^*(x[k+1|k]) \\ & + (q_{N_f} - q)|x[k+N|k]| - q_{N_f}|x[k+N+1|k]| \\ & \geq q|x[k+1|k]| + J^*(x[k+1|k]) \\ & + (q_{N_f}I - q(I + \Phi))|x[k+N|k]| \geq \dots \\ & \geq \sum_{j=0}^L q|x[k+j+1|k+j]| + J^*(x[k+L+1|k+L]) \\ & \geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 L 이 커짐에 따라 $|x|$ 가 영으로 수렴하게 됨을 알 수 있다. ■

위 최적화 문제에서 제한 조건 (6), (11), (14_1)은 $u[k+j](j=0, 1, \dots, N-1)$ 과 α 에 대해 선형이지만 말단 상태 포함 조건인 (14_2)은, 다음과 같이 $\hat{x}[k+N|k]$ 에 대해 비선형이다.

$$\begin{aligned} & |W\hat{x}[k+N|k]| \\ & = |Re(W)\hat{x}[k+N|k] + jIm(W)\hat{x}[k+N|k]| \leq \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $Re(W), Im(W)$ 은 각각 복소 행렬 W 의 실수부와 허수부를 의미한다. 위 사실로부터 LP, QP 알고리즘으로 이 최적화 문제를 푸는 것이 불가능함을 알 수 있다. 다음 절에서는 (17)의 조건을 선형 부등식으로 대치하는 방법에 대해 논한다.

III. 선형계획법으로 풀 수 있는 제한 예측제어

다음과 같이 표현되는 영역을 생각해 보자.

(17)과 (18)로 표현된 영역이 그림 1에서 보여지고 있다.

$$|Re(Wx)| + |Im(Wx)| \leq \alpha \quad (18)$$

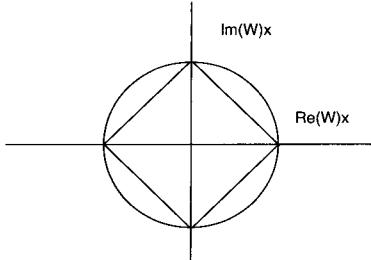


그림 1. 불변 가능한 영역의 경계.

Fig. 1. The proposed feasible & invariant region.

그림 1에서 외부에 있는 원이 $|Wx| \leq \alpha$ 로서 정의된 영역이며, 그 원에 내접하는 정다각형이 (18)이 나타내는 영역이다.

위의 아이디어를 사용하여 $R^W_K(\alpha)$ 의 부분집합인 다음과 같은 영역을 고려하자.

$$R^W_K(\alpha) := \{x \in R^n \mid |Re(W)x| + |Im(W)x| \leq \alpha\} \quad (19)$$

$R^W_K(\alpha)$ 의 불변성 조건과 가능성 조건은 다음 정리로 요약된다.

정리 4 : 입력 제한 조건 (10)을 가지는 게 (1)에서, (19)로 정의된 상태집합 $R^W_K(\alpha)$ 을 고려하자. $R^W_K(\alpha)$ 안에 있는 임의의 초기 상태 x_0 에 대해, 다음 조건이 만족되면 $u = Kx$ 는 입력제한을 만족하면서 이 초기상태를 영 상태로 접근시킨다.

$$(|Re(W\Phi W^{-1})| + |Im(W\Phi W^{-1})|)\alpha < \alpha \quad (20)$$

$$(|Re(KW^{-1})| + |Im(KW^{-1})|)\alpha \leq \bar{u} \quad (21)$$

증명 : 일단 다음과 같은 등식이 성립함을 따져보고 (20)을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} Re(KWW^{-1}x) &= \\ Re(KW)Re(W^{-1}x) - Im(KW)Im(W^{-1}x) & \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Im(KWW^{-1}x) &= \\ Re(KW)Im(W^{-1}x) + Im(KW)Re(W^{-1}x) & \end{aligned} \quad (23)$$

이제 $x[k] \in R^W_K(\alpha)$ 에 대해 $x[k+1] \in R^W_K(\alpha)$ 이 되도록 하기 위해서 다음과 같이 전개함으로서 (20)을 얻어 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} & |Re(Wx[k+1])| + |Im(Wx[k+1])| \\ &= |Re(W\Phi W^{-1}Wx[k])| + |Im(W\Phi W^{-1}Wx[k])| \\ &\leq |Re(W\Phi W^{-1})Re(Wx[k]) - Im(W\Phi W^{-1})Im(Wx[k])| \\ &\quad + |Re(W\Phi W^{-1})Im(Wx[k]) + Im(W\Phi W^{-1})Re(Wx[k])| \\ &\leq (|Re(W\Phi W^{-1})| + |Im(W\Phi W^{-1})|) \\ &\quad \times (|Re(Wx[k])| + |Im(Wx[k])|) \\ &\leq (|Re(W\Phi W^{-1})| + |Im(W\Phi W^{-1})|)\alpha \leq \alpha \end{aligned} \quad (24)$$

(24)에 의해, (20)이 $R^W_K(\alpha)$ 의 불변성을 보장한다. (21)도 유사한 방법으로 유도할 수 있다.

주목 2 : (6)과는 달리 (20)을 만족하는 W 가 존재하려면 Φ 의 고유치들이 다음 식을 만족할 때에만 보장된다. 이것은 사용할 수 있는 K 의 범위가 제한됨을 의미한다. 다음 식에서 λ_i 가 Φ 의 고유치를 나타낸다.

$$|Re(\lambda_i)| + |Im(\lambda_i)| < 1 \quad (25)$$

IV. A+BK의 고유치 존재범위를 제한할 경우

가능불변 구간 영역에 관여하는 피드백 이득인 K 에 따라 $\Phi (= A+BK)$ 의 고유치의 값이 달라진다. 본 절에서는 결과적으로 (18)을 변형시킴으로서 더욱 넓은 불변 가능 영역을 얻을 수 있음을 보인다. K 를 결정하면 λ_i 들도 결정되므로, 이렇게 결정된 고유치들을 포함하는 조건이라면 우선 (25)를 다소 변형할 수 있다는 점을 유념하자. 먼저 다음과 같은 구간에 λ_i 가 존재한다고 가정하는데, 여기서 μ_1, μ_2 는 각각 양의 스칼라이다.

$$\mu_1|Re(\lambda_i)| + \mu_2|Im(\lambda_i)| < 1 \quad (26)$$

이에 따라 다음과 같은 집합을 생각해 보자.

$$R^W_K(\alpha) := \{x \in R^n \mid k_1|Re(Wx)| + k_2|Im(Wx)| \leq \alpha\} \quad (27)$$

이제 $R^W_K(\alpha)$ 가 가능 불변하도록 k_1, k_2 를 선정하는 문제를 (26)의 조건 하에서 따져보는 것이 이 절의 목표이다. $x[k]$ 가 (27)를 만족한다고 하자. 이 때 $x[k+1]$ 도 (27)를 만족하도록 만들기 위해 다음과 같이 전개한다.

$$Wx[k+1] = W\Phi W^{-1}Wx[k] \text{에서,}$$

$$\begin{aligned} & k_1|Re(W\Phi W^{-1}Wx[k])| + k_2|Im(W\Phi W^{-1}Wx[k])| = \\ & k_1|Re(W\Phi W^{-1})Re(Wx[k])| \\ & - Im(W\Phi W^{-1})Im(Wx[k])| \\ & + k_2|Re(W\Phi W^{-1})Im(Wx[k])| \\ & + Im(W\Phi W^{-1})Re(Wx[k])| \end{aligned}$$

이고, 이 때 (26)을 사용하기 위해 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{aligned} & \leq (\max(\frac{k_1}{\mu_1}, \frac{k_2}{\mu_2})|Re(Wx[k])| \\ & + \max(\frac{k_1}{\mu_2}, \frac{k_2}{\mu_1})|Im(Wx[k])|) \\ & \times (\mu_1|Re(W\Phi W^{-1})| + \mu_2|Im(W\Phi W^{-1})|) \\ & \leq (k_1|Re(Wx[k])| + k_2|Im(Wx[k])|) \\ & \times (\mu_1|Re(W\Phi W^{-1})| + \mu_2|Im(W\Phi W^{-1})|) \\ & \leq \alpha \end{aligned} \quad (28)$$

(28)에 따라 $R^W_K(\alpha)$ 가 불변하려면 다음 식이 만족되

도록 k_1, k_2 를 구해야 한다.

$$\begin{aligned} k_1 &\geq \max\left(\frac{k_1}{\mu_1}, \frac{k_2}{\mu_2}\right) \\ k_2 &\geq \max\left(\frac{k_1}{\mu_2}, \frac{k_2}{\mu_1}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

이는 선형계획법으로 다음과 같이 구현할 수 있다.

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline & -1 + \frac{1}{\mu_1} & 0 \\ & -1 & \frac{1}{\mu_2} \\ \hline \frac{1}{\mu_2} & & -1 \\ 0 & & -1 + \frac{1}{\mu_1} \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (30)$$

주목 3 : 이때 $\mu_1 > 1, \mu_2 > 1$ 이어야지 양수인 k_1, k_2 를 얻어낼 수 있다. 따라서 (26)은 (25)가 나타내는 영역에 완전히 포함되기 때문에 λ_i 의 존재 영역은 확대되지 않는다. 이러한 점은 피드백 이득의 존재 영역을 제한한다는 점에서, K 를 결정하지 않은 시점에서는 좋지 않은 특성이라 할 수 있다. 하지만 개루우프 최적화 알고리즘 등에 따라 K 를 이미 정한 상태라면, 고의로 λ_i 의 허용영역을 (λ_i 는 포함하는 한에서) 축소시킨 후, 이에 따라 가능 불변한 영역을 확장할 수 있는지에 관심을 가진다. 정리 4와 유사한 논리로, $R^W_K(a)$ 의 불변성과 가능성 조건은 다음 정리 5로 설명된다.

정리 5 : 입력 제한 조건 (10)을 가지는 계 (1)에서 (29)로 얻어진 k_1, k_2 를 적용한, (27)의 상태집합 $R^W_K(a)$ 를 고려하자. $R^W_K(a)$ 안에 있는 임의의 초기 상태 x_0 에 대해 다음 (31), (32)가 만족되면 $u = Kx$ 는 입력제한을 만족하면서 이 초기상태를 영으로 접근시킨다.

$$(\mu_1 |Re(W\Phi W^{-1})| + \mu_2 |Im(W\Phi W^{-1})|) \alpha < \alpha \quad (31)$$

$$\left(\frac{1}{k_1} |Re(KW^{-1})| + \frac{1}{k_2} |Im(KW^{-1})| \right) \bar{\alpha} \leq \bar{u} \quad (32)$$

증명 : λ_i 의 존재영역을 (25)에서 (26)으로 수정하였기 때문에 (20)이 (31)로 바뀐다는 것은 직관적이다. 또 입력제한 조건 만족에 관한 (21)의 증명과 같은 논리로 다음과 같이 (32)를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} |Kx| &= |Re(KW^{-1}Wx)| = \\ &= |Re(KW^{-1})Re(Wx) - Im(KW^{-1})Im(Wx)| \\ &\leq \left(\frac{1}{k_1} |Re(KW^{-1})| + \frac{1}{k_2} |Im(KW^{-1})| \right) \\ &\quad \times (k_1 |Re(Wx)| + k_2 |Im(Wx)|) \\ &\leq \left(\frac{1}{k_1} |Re(KW^{-1})| + \frac{1}{k_2} |Im(KW^{-1})| \right) \bar{\alpha} \leq \bar{u} \end{aligned} \quad (33)$$

이제 $R^W_K(a)$ 이 $R^W_K(a)$ 와 다른 모양을 가진다는 것을 보이기 위해 다음 보조정리 2가 필요하다.

보조정리 2 : 폐루우프 고유치가 중근을 가지지 않는 경우, $x \in R^W_K, x \notin R^W_K$ 인 x 를 존재하게 하는 양의 스칼라 k_1, k_2 가 존재한다. 단 a 는 (21)를, \bar{a} 는 (32)를, k_1, k_2 는 (30)을 만족한다.

증명 : (19)에서의 불변가능 영역과 입력제한 조건을 요소별로 분리하면 다음과 같다. (괄호 안의 정수는 벡터의 원소 위치를 나타낸다.)

$$\begin{aligned} |Re(Wx)(1)| + |Im(Wx)(1)| &\leq a(1), \dots \\ |Re(Wx)(k)| + |Im(Wx)(k)| &\leq a(k), \dots \\ |Re(Wx)(n)| + |Im(Wx)(n)| &\leq a(n) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} &(|Re(KW^{-1})(1)| + |Im(KW^{-1})(1)|) \alpha(1), \dots + \\ &(|Re(KW^{-1})(k)| + |Im(KW^{-1})(k)|) \alpha(k), \dots + \\ &+ (|Re(KW^{-1})(n)| + |Im(KW^{-1})(n)|) \alpha(n) \leq \bar{u} \end{aligned} \quad (35)$$

한편 (27)의 불변가능 구간과 입력제한 조건도 마찬가지 방법을 쓰면 다음과 같이 얻어진다.(새로운 a 를 \bar{a} 로 표기하였다.)

$$\begin{aligned} k_1 |Re(Wx)(1)| + k_2 |Im(Wx)(1)| &\leq \bar{a}(1), \dots \\ k_1 |Re(Wx)(k)| + k_2 |Im(Wx)(k)| &\leq \bar{a}(k), \dots \\ k_1 |Re(Wx)(n)| + k_2 |Im(Wx)(n)| &\leq \bar{a}(n) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{k_1} |Re(KW^{-1})(1)| + \frac{1}{k_2} |Im(KW^{-1})(1)| \right) \bar{a}(1) \\ &+ \left(\frac{1}{k_1} |Re(KW^{-1})(k)| + \frac{1}{k_2} |Im(KW^{-1})(k)| \right) \bar{a}(k) \\ &+ \left(\frac{1}{k_1} |Re(KW^{-1})(n)| + \frac{1}{k_2} |Im(KW^{-1})(n)| \right) \bar{a}(n) \\ &\leq \bar{u} \end{aligned} \quad (37)$$

이제 $k_1 > 0, k_2 > 0$ 로 정하고, (35)와 (37)을 살펴본다. 두 식에서 절대값에 곱해지는 상수들을 각각 비교해 보면, 모든 $1 \leq k \leq n$ 인 k 에 대해 (37)의 상수들이 (35)의 상수들

보다 모두 작지는 않으므로 $\frac{\bar{a}(k)}{k_1} \geq a(k)$ 또는 $\frac{\bar{a}(k)}{k_2} \geq a(k)$ 인 $\bar{a}(k)$ 가 존재한다. ($1 \leq k \leq n$) 이 때 이러한 k 에 해당하는 (34), (36)식의 k 번째 식들에 대해 다음이 성립한다. 이 두 식의 각 k 번째 식들의 x, y 축을 각각 $|Re(Wx)(k)|, |Im(Wx)(k)|$ 로 두었을 때, (36)식의 k 번째 식의 x 절편 혹은 y 절편은 (34)의 k 번째 식의 x 절편 혹은 y 절편보다 크거나 같다. 따라서 $z (= Wx)$ 벡터의 k 번째 요소에 관해 생각해 볼 때, (36)의 k 번째 식에서 보여지는 $z (= Wx)$ 의 k 번째 요소들은, (34)에서의 그것들보다 뛰어나온 부분을 가진다. W^{-1} 라는 선형변환을 통해서 z 로부터 얻어지는 x 도 마찬가지 성질을 지니므로

$x \in R_K^W(\alpha), x \notin R_K^W(\alpha)$ 인 x 가 존재한다.

주목 4 : k_1, k_2 의 선정에 따라 각각 다른 형태의 불변 가능 집합이 구성되며, 이들 영역들은 각각 $R_K^W(\alpha)$ 에 비해 튀어나온 부분이 존재한다. 그리고 k_1, k_2 에 따라 달라지는 각각의 불변 가능 집합의 합집합이 최종적인 불변 가능 구간이 되며, 이에 근사하는 불록 포체(convex hull)을 구하는 다음 알고리즘을 [9]에서 보이고 있다. [9]의 결과를 이용하면 k_1, k_2 에 따라 다르게 구성되는 불변 가능 영역들의 불록 포체를 구성하고 그 안에 계의 상태가 속하는지 확인해 볼 수 있다. 이제 k_1, k_2 의 변화에 따른 불변 가능 영역의 변화를 모의실험을 통하여 검증한다.

V. 모의실험

본 절에서는 2차 선형 시불변 이산계에 관해 III에서 유도한 불변 가능 영역과 IV에서 고유치 존재영역을 축소함으로서 얻어지는 불변 가능 영역을 각각 도시한다. 다음과 같이 입력 제한 조건을 가지는 선형 불안정 시불변 이산계를 고려하자.

$$\begin{aligned} x[i+1] &= \begin{bmatrix} 0.1 & -0.7 \\ 3.1 & 0.2 \end{bmatrix} x[i] + \begin{bmatrix} -0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix} u[i] \\ -10 \leq u[i] &\leq 10, \quad i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (38)$$

여기서 $x[i]$ 는 i 시간에서의 상태이며, $u[i]$ 는 i 순간에서의 제어 입력을 의미한다. 이제 불변 가능 영역 구성을 위해 사용할, 개루우프 최적이득 K 와 변환행렬 W 를 다음과 같이 각각 구한다.

$$K = [-3.9611 \quad 0.8391] \quad (39)$$

$$W = \begin{bmatrix} -1.6708 & -0.9789 - j0.6073 \\ -1.6708 & -0.9789 + j0.6073 \end{bmatrix} \quad (40)$$

W 가 복소 행렬이라는 점에서 III의 아이디어를 적용할 수 있다. 이 때 $A+BK$ 의 고유치를 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.0363 + j0.4069 \\ \lambda_2 &= -0.0363 - j0.4069 \end{aligned} \quad (41)$$

이제 불변가능 영역이 최고로 넓어지도록 하기 위해 α 를 가변토록 하여 다음과 같은 불변가능 영역을 얻었다.

이제 $A+BK$ 의 고유치들의 존재조건을 제한하는 경우 불변 가능 영역을 도시해 본다. (41)에서, 고유치들은

$$|Re(\lambda_i)| + |Im(\lambda_i)| < 0.5 \quad (42)$$

도 만족함을 알 수 있다. 따라서 (30)으로부터 $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{0.5} \approx 2$ 으로 결정하면 다음 조건식을 얻는다.

$$k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad 0.5k_1 \leq k_2 \leq 2k_1 \quad (43)$$

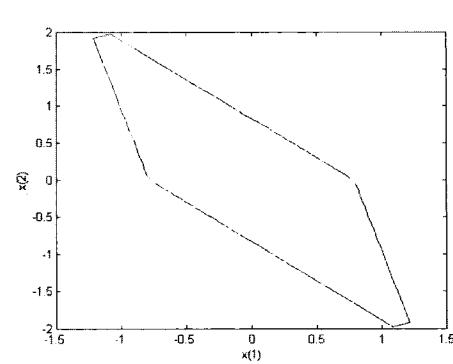


그림 2. (25)(A+BK의 고유치 존재영역을 고정했을 때)를 적용하였을 때의 불변가능 영역.

Fig. 2. The feasible & invariant region with fixed region for closed-loop eigenvalues.

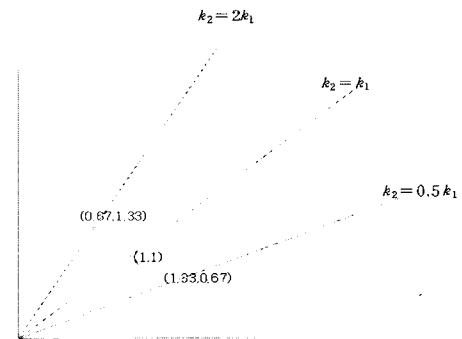


그림 3. 파라미터의 설정.

Fig. 3. Parameters.

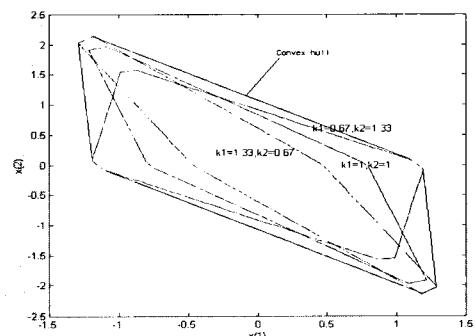


그림 4. (26) (k_1, k_2 를 통해 A+BK의 고유치 존재영역을 변형하였을 때)의 불변가능 영역.

Fig. 4. Enlarged feasible & invariant region due to varying parameters.

그리고 그림 2의 결과와 비교하기 위해 (43)을 만족하는 (k_1, k_2) 를 다음 그림 3의 3개의 점으로 설정한다.

결과적으로 구해지는 불변 가능 영역은 그림 4와 같다. $k_1 = k_2 = 1$ 이면 그림 2의 결과와 일치한다는 사실을 주목하자.

이제 [9]의 알고리즘을 통해, 그림 4에서 나타난 3개의 영역의 볼록포체가 최종적인 불변영역이 되고, 이는 그림 2에서의 그것보다 확장되었음을 알 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 변환행렬이 복소수로 구성되는 경우에 대해 [6][3]에서 제시된 다각형 방법의 불변영역을 변환행렬이 복소수일 경우로 확장하고, 페루우프 계의 고유치 존재영역을 상대적으로 제한하는 대신 다각형 불변가능 영역을 확장하였다. 고유치 존재영역이 축소된다는 점은 피드백 이득의 선정범위를 제한하지만, 개루우프 최 적화 알고리즘 등에 따라 피드백 이득을 미리 정한 상태이거나 불변가능 영역 확장에 주된 관심이 있는 경우라면 본 논문에서 제시한 알고리즘을 통해 종전보다 넓은 불변가능 영역을 구성할 수 있음을 보였고 모의실험을 통해 이를 검증하였다. 따라서 제어목적에 맞는 유연한 제어법 구현에 일조할 수 있으리라 기대된다.

참고문헌

- [1] Keerthi, S. S. and Gilbert, E. G. "Optimal infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: stability and moving horizon approximations", *Journal of Optimal Theory and Application*, Vol. 57, pp. 265-293, 1998.
- [2] J. W. Lee, W. H. Kwon and J. H. Choi. "On stability of constrained receding horizon control with finite terminal weighting matrix", *Automatica*, Vol. 34, No. 12, pp. 1607-1612, 1998.
- [3] Y. I. Lee and B. Kouvaritakis. "Stabilizable regions of receding horizon predictive control with input constraints", *Systems and Control Letters*, Vol. 38, No. 1, pp. 13-20, 1999.
- [4] M. V. Kothare, V. Balakrishnan and M. Morari. "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities", *Automatica*, Vol. 32, No. 10, pp. 1361-1379, 1996.
- [5] K. Yoshida, "Simple LP-Type criteria for positively invariant polyhedral sets." *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 45, No. 1, 2000.
- [6] Y. I. Lee. and B. Kouvaritakis, "Constrained receding horizon predictive control for systems with disturbances", *International Journal of Control*, Vol. 72, No. 11, 1993.
- [7] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Harcourt brace & Company, third edition, pp. 453-460, 1988.
- [8] D. Q. Mayne and H. Michalska, "Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems", *IEEE Trans. of Automatic Control*, Vol. 38, No. 11, pp. 1623-1633, 1993.
- [9] Y. I. Lee and B. Kouvaritakis. "State decomposition and the enlargement of stabilizable regions", submitted to *Automatica*, 2000.

이영일



1986년 서울대학교 제어계측공학과 학사. 1988년 서울대학교 제어계측공학과 석사. 1993년 서울대학교 제어계측공학과 박사. 1994년 3월~2001년 7월 경상대학교 제어계측공학과 재직. 1998년 3월~1999년 7월 Oxford University에서

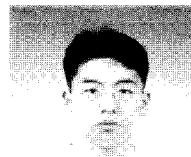
Visiting Research Fellow. 2001년 8월~현재 서울산업대학교 제어계측 공학과 부교수. 관심분야 : 장인/이득계획 예측제어, 전력선 통신을 이용한 Home Automation 시스템 구성 등.

윤태웅



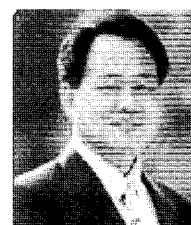
1984년 서울대학교 제어계측공학과 학사. 1986년 서울대학교 제어계측공학과 석사. 1991년 Oxford University Department of Engineering Science 박사. 1986년~1995년 한국과학기술연구원 연구원/선임연구원. 1995년~현재 고려대학교 공과대학 전기공학과 부교수. 관심분야 : 적응제어, MPC, Hybrid systems.

방대인



1999년 고려대 전기공학과 학사. 2002년, 고려대 전기공학과 석사. 2002년~현재 서울대학교 전기, 컴퓨터공학부 박사 과정. 관심분야 : 적응/지능제어, MPC.

김기용



1964년 인하공대 전기공학과 학사. 1979년 인하공대 전기공학과 석사. 1990년 중앙대학교 전기공학과 박사. 1976~1980년 대전산업대 전기공학과 조교수. 1980년~현재 서울산업대 전기공학과 부교수. 관심분야 : 전력전자.